

# 不安定周期領域を用いた時間遅延フィードバック制御

## Time Delayed Feedback Control Using Unstable Periodic Region

清水能理

Yoshimasa Shimizu

八戸工業大学

Hachinohe Institute of Technology

キーワード：カオス制御 (Chaos control), 時間遅延フィードバック制御 (Time delayed feedback control), 未知系 (Unknown system), 不安定周期領域 (Unstable periodic region), ファジィモデル (Fuzzy model), スライディングモード制御 (Sliding mode control)

連絡先：〒 031-8501 八戸市大字妙字大開 8-1 八戸工業大学 工学部 システム情報工学科 清水研究室  
清水能理, Tel.: (0178)25-8135, E-mail: [shimizu@hi-tech.ac.jp](mailto:shimizu@hi-tech.ac.jp)

## 1. はじめに

カオス現象は、非線形電気回路や電子回路素子の中にも見出すことができる。水や空気の乱流や株価の変動そして血糖値の変化もカオスと考えられている。このように、カオスは生態系を含む自然のシステムや人工のシステムを問わず、非線形性を有するシステムに遍在する現象である<sup>1, 2)</sup>。有界の領域内で起こる非周期で初期値に鋭敏な振動現象であり、決定論的法則に従ってシステムの状態が変化する。カオスシステムから生成される状態はエルゴード性を有し、時間発展する状態の非周期的な軌道はカオス特有の軌跡であるストレンジアトラクタと呼ばれるアトラクタ領域を描く。そして、このストレンジアトラクタの中には、周期軌道を僅かに外れただけで、システムの状態がどんどん軌道から離れていくような不安定周期軌道 (UPO) を構成する不安定周期解が埋め込まれ

ている<sup>2, 3)</sup>。

カオス工学のひとつに、制御工学へのカオス応用であるカオス制御がある。カオス制御は、システムにおけるカオス自体をシステムの安定性や最適性の目的から制御系において好ましくないものと考え、システムの状態を UPO に安定化させることである<sup>4, 5)</sup>。一方、カオス制御は、医療工学の分野においても既に応用されはじめている。それは、生体の中に存在するカオス的な機構を利用して、外部から生体のリズムを制御しようという試みである<sup>6, 7)</sup>。その例として、不整脈の治療が挙げられる<sup>8)</sup>。

波の制振、乱流の安定や不整脈の治療など、対象となるシステムが自然や生体であるときは、状態のダイナミクスを記述する数学モデルを得ることが困難な場合も考えられる<sup>6, 8, 9)</sup>。このように厳密な数学モデルを得ることができないシステム

(未知システム)に対してカオス制御を実行するには、システムからの出力として観測できるシステムの状態やその時系列を用いた未知システムのモデリングに基づいた制御を行うことが考えられる<sup>2, 3, 10)</sup>。しかし、対象が未知システムであるときは、時系列に混入する雑音を検知することが困難な場合もあり、モデリングにおける影響も無視できない。さらに、外乱が操作量の誤差となっても、検出できない問題がある。したがって、カオス制御系は目標軌道、近似モデルの誤差や外乱に対してロバストである必要がある<sup>11, 12)</sup>。

よって、システムのダイナミクスを記述する数学モデルを得られないカオスシステムの状態を、UPOに安定化することを目的とする。

## 2. カオス制御

対象とする非線形システムがカオス的特長を有するとき、従来の非線形システム制御理論を用いてもシステムを安定化できる場合がある。しかし、カオス制御には、システムのカオス性を用いることにより、制御系を簡単に構成したり操作量を小さくできる利点がある<sup>5)</sup>。よって、制御エネルギーを補給することが必ずしも容易ではない海中・海洋上や宇宙空間におけるカオス的な振動を、カオス制御を用いることで効果的に安定化することが有用であると考えられている<sup>6)</sup>。カオス制御の例として、外部入力による操作を加える Time Delayed Feedback Control (DFC) 法がある。

### 2.1 Time Delayed Feedback Control (DFC)

Pyragas によって提案された DFC 法では、連続時間カオスシステムの安定化に対し、現在のシステムの状態と安定化したい UPO の周期である  $\tau$  時刻前の状態との誤差に基づき、システムを安定化する操作量を決定する。離散時間システムに

対しても容易に適用できる。DF 制御 (DFC) には以下の特徴がある。ノイズに対して強い。ポアンカレ写像を求める必要が無い。安定化したい不安定周期軌道を計算する必要はないが、同じ  $\tau$  周期の不安定周期軌道が複数存在する場合には、どの不安定周期軌道が安定化されるか分らない。閉ループシステムのダイナミクスは微・差分方程式で記述されているので理論的解析が煩雑で、実際にフィードバックゲイン定数行列  $K$  を求めるのは難しく、選択は試行錯誤的になる。局所線形フィードバック制御であり、UPO 近傍以外で制御入力を印加すると、返って系が不安定になる問題がある<sup>5, 14)</sup>。

対象とする  $n$  次元の離散時間カオスシステムが式 (1) で表されるとする。

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)) \quad (1)$$

ここで  $\boldsymbol{x}(k) \in \mathcal{R}^n$  はシステムの状態ベクトル、 $\boldsymbol{u}(k) \in \mathcal{R}^m$  は制御入力ベクトルである。そして、 $\boldsymbol{f}$  は関数ベクトルであり、 $\boldsymbol{u}(k) = \mathbf{0}$  のとき式 (1) はカオスを発生する。式 (1) を周期  $\tau$  の UPO の各不安定周期点  $\boldsymbol{x}_{pi}$  ( $i = 1, 2, \dots, \tau$ ) に局所的に安定化させる。離散時間システムに対する DFC の制御入力は、式 (2) で表されるように、 $\tau$  時刻過去の状態  $\boldsymbol{x}(k-\tau)$  と現在の状態  $\boldsymbol{x}(k)$  との差に基づく外部入力である<sup>5)</sup>。

$$\boldsymbol{u}(k) = \begin{cases} K_{Di} \{ \boldsymbol{x}(k-\tau) - \boldsymbol{x}(k) \} & \text{if } r(k) < \varepsilon \\ \mathbf{0} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $K_{Di} \in \mathcal{R}^{m \times n}$  は、カオス制御入力  $\boldsymbol{u}(k)$  のフィードバックゲイン行列で、印加条件の  $r(k)$  は式 (3) で表される。

$$r(k) = \| \boldsymbol{x}(k-\tau) - \boldsymbol{x}(k) \| \quad (3)$$

また、 $\varepsilon$  は十分に小さな正の実数で、 $\tau$  周期の UPO の各  $\boldsymbol{x}_{pi}$  近傍領域の大きさの推定値に相当する。ここで、図 1 に DFC の構成図を示す。

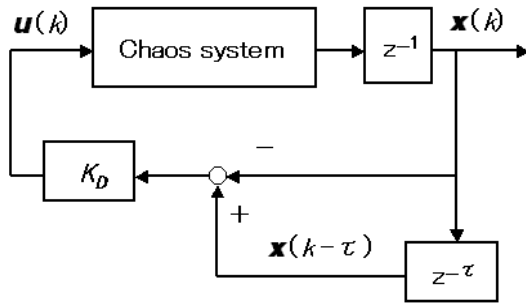


Fig. 1 時間遅延フィードバック制御の構成図

## 2.2 スライディングモード制御 (SMC)

状態空間に超平面を構成し, 系の状態軌道を制御するスライディングモード制御 (SMC) がある。線形系を対象として, 系のパラメータの摂動や外乱などシステムの不確かさに対してロバストな制御系設計が研究されてきた<sup>13)</sup>。非線形系に対してもスライディングモードのときシステムがロバストなことから, Yau らは, 不確かさをともなう連続時間カオス系の UPO 安定化に連続時間系 SMC をそのまま適用した。カオス系の状態と UPO との誤差システムの拡大システムに基づき設計した切換超平面を用い, 系の状態が一定の速度で超平面に到達するように SMC 入力を計算している。連続制御入力を用いて任意の状態から目標軌道に収束させるように制御を行い, 近似法を用いずチャタリングの抑制に優れているが, 操作量が非常に大きくなる場合もある<sup>12)</sup>。

## 3. 問題の記述

対象とするシステムは離散時間のカオスシステムである。システムのダイナミクスを記述する数学モデルは得られないが, 未知システムからの出力として式(4)の  $m$  次元の時系列データ  $\mathbf{x}(k) \in \mathcal{R}^m$  を直接観測することができる。

$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ \cdots \ x_m(k)]^T \quad (4)$$

そして, ファジニューラルネットワーク (FNN) を用いて, 時系列データ  $\mathbf{x}(k)$  から対象とする未知カオスシステムのファジモデルを得ることが可能である。予め求めるファジモデルは, IF-THEN 型のルールで未知システムの特徴を記述することができる高木・菅野のファジモデルとする。システムはエルゴード性を有するので, 状態ベクトル  $\mathbf{x}(k)$  は必ず  $\tau$  周期の UPO の各  $p^\xi$  の近傍領域を通過する<sup>2, 3, 5)</sup>。

未知システムの状態  $\mathbf{x}(k)$  を,  $\tau$  周期の UPO の各不安定周期点  $p^\xi \in \mathcal{R}^m$  ( $\xi = 1, 2, \dots, \tau$ ) に安定化することを考える。代表的な安定化手法であり, ロバスト性を有することで知られている DFC 法は未知システムに対するカオス制御手法であるが, 制御入力のパラメータ値の決定法が問題となる。さらに, 未知システムに外乱が存在する場合には, システムが安定になるまでに時間を有したり, カオス制御系の設計において, ファジモデルの不確かさを考慮する必要がある。

## 4. 不安定周期領域 (UPR)

未知カオスシステムのファジモデルから UPO の各不安定周期点における状態方程式を求めたり, カオス制御入力を未知システムに印加する際に必要な各不安定周期点の近傍を探索するには, 式(4)の時系列  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_k \in \mathcal{R}^m$  を用いて得ることができる不安定周期領域 (UPR) が必要である<sup>14)</sup>。

UPR は状態空間内における  $m$  次元のストレンジアトラクタを構成するカオス軌道の推移から算出することができ, UPO の周期と軌道に関する情報を示す。いま, 未知システムの状態ベクトル  $\mathbf{x}_k$  の  $N$  個の時系列が予め得られているとする。 $\mathbf{x}_k$  は, カオスシステムのエルゴード性により  $\tau$  周期の UPO の  $\tau$  個の各不安定周期点に必ず接近し, その前後に数回に渡り各周期点の近傍を通過する。よって, 軌道データ  $\mathbf{x}_k$  から, 式(5)の条

件を満たす  $\{ \boldsymbol{x}_{(\gamma-1)\tau}, \boldsymbol{x}_{\gamma\tau} \}$  のペアを出来るだけ多く算出する。

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{x}_{(\gamma-1)\tau} - \boldsymbol{x}_{\gamma\tau}\| < \varepsilon \\ \varepsilon < \delta < \|\boldsymbol{x}_{\gamma\tau-\beta} - \boldsymbol{x}_{\gamma\tau}\| \end{cases} \quad (5)$$

ここで,  $\gamma = 2, 3, \dots, N$  であり, また  $\beta = 1, 2, \dots, \tau-1$  である。そして,  $\varepsilon$  は周期  $\tau$  の UPO が周回性を及ぼす  $\tau$  個の各不安定周期点の近傍領域の大きさの許容範囲を示す十分に小さな正の実数であり,  $\delta$  は  $\varepsilon$  の数倍程度の大きさとする。算出されたデータ  $\boldsymbol{x}_k$  がなす各クラスタが示す状態空間内の領域が UPR である。  $\tau$  を変化させて式 (5) の条件を満たすデータ  $\boldsymbol{x}_k$  の組を求めることにより, 何周期の UPR でも算出可能である<sup>14, 15)</sup>。

式 (5) より得られる  $\tau$  周期の UPR とは, 低周期の UPR を含んだものである。つまり, 4 周期の場合なら 1, 2 周期の UPR を含んでおり, 6 周期の場合なら 1, 2, 3 周期の UPR を含んでいる。したがって,  $\tau$  周期の UPO の各不安定周期点を求める場合には,  $\tau$  の約数の周期をもつ UPR を予め 1 周期から全て算出しておき取り除くようにする。この UPR の重心ベクトル  $\boldsymbol{c}^\xi$  ( $\xi = 1, 2, \dots, \tau$ ) を UPO の各不安定周期点の近似値として用いる。

さらに, 低周期の UPR を除いた  $\tau$  周期の UPR が  $\tau \times g$  個あるときは,  $g$  個の  $\tau$  周期 UPR が算出されている場合である。このときは, カオス制御において, 任意のクラスタに属する重心ベクトル  $\boldsymbol{c}^\xi$  ( $g = 1, 2, \dots, \tau g$ ) に制御することを各クラスタにおいて繰り返し,  $g$  個の  $\tau$  周期 UPR を順次特定していく。このタイプの制御法は,  $\tau$  イテレーションごとに ( $\tau$  ステップに一回) 制御入力を印加する方法で収束が遅いので, 複数ある  $\tau$  周期 UPR を特定するときのみ用いる (完全に安定化しなくても, 各クラスタが  $g$  個の  $\tau$  周期 UPR のうち, どれに属するか区別できればよい)。よって, 制御対象のカオスシステムの非線形性が高い

場合や目標 UPO の周期が大きい場合などに有効であるように,  $\tau$  周期 UPO の  $\tau$  個の各不安定周期点のそれぞれを制御目標点として扱い, それぞれの UPR の  $\boldsymbol{c}^\xi$  において制御入力を更新する方法を用いる。

## 5. ファジィモデリング

ファジィモデルは, 重複を許して  $p$  個にファジィ分割した各々の領域に対し, 式 (6) の IF-THEN 型のルール  $L^i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) を用いて未知システムの特徴を表現する。

$L^i$  :

IF

$x_{1k}$  is  $M_1^i$ ,  $x_{2k}$  is  $M_2^i$ ,  $\dots$ , and  $x_{mk}$  is  $M_m^i$

THEN

$x_{1(k+1)}^i = a_{10}^i + a_{11}^i x_{1k} + \dots + a_{1m}^i x_{mk} + b^i u_k$

$\vdots$

$x_{m(k+1)}^i = a_{m0}^i + a_{m1}^i x_{1k} + \dots + a_{mm}^i x_{mk} \quad (6)$

ここで, 式 (4) の状態ベクトル  $\boldsymbol{x}_k$  の  $m$  個の要素として得られる前件部の  $x_{jk} \in \mathcal{R}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) と後件部の  $x_{j(k+1)}^i \in \mathcal{R}$  は, ファジィ変数である未知システムの状態である。そして,  $M_j^i$  はルール  $L^i$  における前件部の各状態変数  $x_{jk}$  のラベルを表現するファジィ集合である<sup>10)</sup>。

ファジィモデル後件部の線形回帰式は制御入力  $u_k \in \mathcal{R}$  を含む ARX モデルで,  $u_k$  は  $x_{1(k+1)}^i$  の第一式にのみ付加されるとする。各ルール  $L^i$  に対する適合度  $\mu^i(\boldsymbol{x}_k)$  は, 式 (7) のように前件部の各状態変数  $x_{jk}$  に対するメンバーシップ値  $M_j^i(x_{jk})$  の積で表される。

$$\mu^i(\boldsymbol{x}_k) = \prod_{j=1}^m M_j^i(x_{jk}) \quad (7)$$

そして, 各ルール  $L^i$  の正規化された適合度  $\rho^i(\boldsymbol{x}_k)$  は, 式 (8) を用いて得ることができる。

$$\rho^i(\mathbf{x}_k) = \frac{\mu^i(\mathbf{x}_k)}{\sum_{i=1}^p \mu^i(\mathbf{x}_k)} \quad (8)$$

式(4)の状態変数ベクトル  $\mathbf{x}_k$  が与えられたとき、式(8)を用いて各ルール後件部の線形回帰式を加重平均するファジィ推論の結果として、式(9)のファジィモデルが得られる。式(9)は、状態依存で時変型の係数をもつ区分線形の非線形状態方程式である<sup>15)</sup>。

$$\begin{aligned} x_{1(k+1)} &= a_{10}(\mathbf{x}_k) + a_{11}(\mathbf{x}_k)x_{1k} + \cdots \\ &\quad + a_{1m}(\mathbf{x}_k)x_{mk} + b(\mathbf{x}_k)u_k \\ x_{2(k+1)} &= a_{20}(\mathbf{x}_k) + a_{21}(\mathbf{x}_k)x_{1k} + \cdots \\ &\quad + a_{2m}(\mathbf{x}_k)x_{mk} \\ &\quad \vdots \\ x_{m(k+1)} &= a_{m0}(\mathbf{x}_k) + a_{m1}(\mathbf{x}_k)x_{1k} + \cdots \\ &\quad + a_{mm}(\mathbf{x}_k)x_{mk} \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)を係数行列と係数ベクトルを用いて式(10)のように書き改める。

$$\mathbf{x}_{k+1} = A(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k + B(\mathbf{x}_k)u_k + \mathbf{a}(\mathbf{x}_k) \quad (10)$$

ここで、システム行列  $A(\mathbf{x}_k) \in \mathcal{R}^{m \times m}$  は式(11)で、入力ベクトル  $B(\mathbf{x}_k) \in \mathcal{R}^{m \times l}$  は式(12)で、制御入力  $u_k \in \mathcal{R}^l$  は式(13)で、そして定数ベクトル  $\mathbf{a}(\mathbf{x}_k) \in \mathcal{R}^m$  は式(14)で、それぞれ表される。

$$A(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{x}_k) & \cdots & a_{1m}(\mathbf{x}_k) \\ a_{21}(\mathbf{x}_k) & \cdots & a_{2m}(\mathbf{x}_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}(\mathbf{x}_k) & \cdots & a_{mm}(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$B(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} b(\mathbf{x}_k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} u_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} a_{10}(\mathbf{x}_k) & a_{20}(\mathbf{x}_k) & \cdots & a_{m0}(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

## 6. 未知システムに対する SMC

DFC 法は従来の手法と比較してもロバストな傾向があったが、外乱が大きい場合にはシステムが安定になるまでに時間を要したり、有限時間内にカオス制御が実行されない場合も考えられる<sup>5, 9)</sup>。そこで、ファジィモデルを得られるような未知システムを対象とした SMC 系を設計する。

ファジィモデルは、IF-THEN 型ルール  $L^i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) において、後件部の線形回帰式が制御入力を含まない式(15)の AR モデルとする。

$$\mathbf{x}(k+1) = A(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{a}(\mathbf{x}(k)) \quad (15)$$

ここで、式(15)の  $A(\mathbf{x}(k)) \in \mathcal{R}^{m \times m}$  と  $\mathbf{a}(\mathbf{x}(k)) \in \mathcal{R}^m$  は、状態依存で時変のシステム行列と定数ベクトルである<sup>10)</sup>。未知システムに対して加法的なカオス制御入力  $u(k) \in \mathcal{R}$  を用いるとすると、式(15)は式(16)となる。

$$\mathbf{x}(k+1) = A(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) + \mathbf{a}(\mathbf{x}(k)) \quad (16)$$

式(16)の  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^m$  は入力ベクトルである。UPO の各不安定周期点  $p^\xi$  は未知であるが、制御入力  $u(k) \in \mathcal{R}$  を未知システムに印加する際に必要な各  $p^\xi$  の近傍領域は UPR として得ることができる<sup>15)</sup>。UPR は式(5)を用いて時系列  $\mathbf{x}(k)$  より決定でき、式(17)の UPR の重心ベクトル  $\mathbf{c}^\xi \in \mathcal{R}^m$  ( $\xi = 1, 2, \dots, \tau$ ) を UPO の各  $p^\xi$  の近似として  $u(k)$  の設計に用いる。

$$\mathbf{c}^\xi = [c_1^\xi \ c_2^\xi \ \cdots \ c_{m-1}^\xi \ c_m^\xi]^T \quad (17)$$

いま、未知システムの状態  $\mathbf{x}(k) \in \mathcal{R}^m$  が UPO の不安定周期点  $p^\xi \in \mathcal{R}^m$  のひとつの近傍に在るとすると、式(17)の重心ベクトル  $\mathbf{c}^\xi$  のひとつも  $\mathbf{x}(k)$  の近傍に存在すると考えられる。このとき、 $p^\xi$  を  $\mathbf{p}_k \in \mathcal{R}^m$ 、そして  $\mathbf{c}^\xi$  を  $\mathbf{c}_k \in \mathcal{R}^m$  と表すとす。もし  $\mathbf{x}(k)$  が  $\mathbf{c}^\tau$  の近傍にあるなら、 $\dots, \mathbf{c}_{k-1}, \mathbf{c}_k, \mathbf{c}_{k+1}, \dots, \mathbf{c}_{k+\tau-1}, \mathbf{c}_{k+\tau}, \dots$  は、各々  $\dots, \mathbf{c}^{\tau-1},$

$c^r, c^1, \dots, c^{r-1}, c^r, \dots$  に対応する。 $p_{k-\tau} = p_k$  であり、 $c_{k-\tau} = c_k$  となる。状態  $x(k)$  が重心ベクトル  $c_k \in \mathcal{R}^m$  に在るとき、式(16)の制御系のファジィモデルは式(18)と表現される。

$$x(k+1) = A(c_k)x(k) + bu(k) + a(c_k) \quad (18)$$

未知システムの各  $p^s$  近傍における線形化システムを、式(18)のファジィモデルに基づいて構成し、制御入力  $u(k)$  の設計に用いる

## 6.1 制御入力的设计

状態ベクトル  $x(k) \in \mathcal{R}^m$  が UPR に在るとき。このとき、 $p_k \in \mathcal{R}^m$  近傍の線形化システムは、ファジィモデルの  $c_k \in \mathcal{R}^m$  近傍における線形化システムとして式(19)で表されるとする。

$$e(k+1) = A(c_k)e(k) + bu(k) \quad (19)$$

ここで、式(19)の  $e(k) \in \mathcal{R}^m$  は式(20)で表される誤差ベクトルである。

$$e(k) = x(k) - c_k \quad (20)$$

したがって、式(19)の  $u(k) \in \mathcal{R}$  は、 $k \rightarrow \infty$  で  $e(k) \rightarrow 0$  となるように誤差システムに基づくレギュレータ制御入力  $u_{rg}(k) \in \mathcal{R}$  として設計する<sup>15)</sup>。

$u_{rg}(k)$  を SMC 入力として設計するために必要な切換関数  $\sigma(k) \in \mathcal{R}$  の設定に式(20)の  $e(k)$  を用いると、 $\sigma(k)$  は式(21)となる。

$$\sigma(k) = Se(k) \quad (21)$$

ここで、 $S \in \mathcal{R}^{1 \times m}$  は式(22)の係数横ベクトルである。

$$S = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_{m-1} \ s_m] \quad (22)$$

$c_k \in \mathcal{R}^m$  の近傍において、レギュレータ制御に基づくスライディングモード制御(SMC)を行う

$u_{rg}(k) \in \mathcal{R}$  は、式(23)となる<sup>13)</sup>。

$$u_{rg}(k) = -(Sb)^{-1} \{ S(A(c_k) - I)e(k) + \eta_{rg} \sigma(k) \} \quad (23)$$

リアプノフ関数法を用いると、式(24)を満たすゲイン  $\eta_{rg}$  の範囲で、SMCの切換面  $\sigma(k) = 0$  への到達条件は満たされる。

$$0 < \eta_{rg} < 2 \quad (24)$$

また、 $\eta = 1$  のときは有限整定を意味し、次の時刻  $k+1$  で切換関数値は  $\sigma(k+1) = 0$  となり、切換面に到達する。

## 6.2 制御系のロバスト性

各 UPR の重心ベクトル  $c_k \in \mathcal{R}^m$  におけるファジィモデルのシステム行列を  $A(c_k) \in \mathcal{R}^{m \times m}$  とする。いま、観測雑音のため算出した各 UPR に領域のずれが生じ、その重心ベクトル  $c_k$  と UPO の  $p_k$  との間に式(25)のように誤差  $\delta p_k \in \mathcal{R}^m$  が生じたとする。

$$c_k = p_k + \delta p_k \quad (25)$$

このとき、システム行列を  $A(c_k)$  にも、式(26)のように真値  $A(p_k) \in \mathcal{R}^{m \times m}$  との間に誤差  $\delta A(c_k) \in \mathcal{R}^{m \times m}$  が生じる。

$$\begin{aligned} A(c_k) &= A(p_k + \delta p_k) \\ &= A(p_k) + \delta A(p_k) \end{aligned} \quad (26)$$

さらに、観測雑音を原因とするファジィモデルの不確かさが存在するとする。よって、式(27)のように、 $c_k$  に対するシステム行列の値  $A(c_k)$  と正確なファジィモデルのシステム行列  $A_c(c_k) \in \mathcal{R}^{m \times m}$  との間に誤差  $\delta A_c(c_k) \in \mathcal{R}^{m \times m}$  が生じる。

$$A(c_k) = A_c(c_k) + \delta A_c(c_k) \quad (27)$$

ファジィモデルおよび UPR に誤差が存在するとき、その影響による集中的なファジィモデルシ

システム行列の誤差を,  $\Delta A_c(\mathbf{p}_k) \in \mathcal{R}^{m \times m}$  とする。式(26)(27)より, 不確かなファジィモデルのシステム行列  $A(\mathbf{c}_k)$  と正確なファジィモデルのシステム行列  $A_c(\mathbf{p}_k) \in \mathcal{R}^{m \times m}$  との間には, 式(28)のような関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} A(\mathbf{c}_k) &= A_c(\mathbf{c}_k) + \delta A_c(\mathbf{c}_k) \\ &= A_c(\mathbf{p}_k + \delta \mathbf{p}_k) + \delta A_c(\mathbf{p}_k + \delta \mathbf{p}_k) \\ &= A_c(\mathbf{p}_k) + \delta A_c(\mathbf{p}_k) + \delta A_c(\mathbf{p}_k + \delta \mathbf{p}_k) \\ &= A_c(\mathbf{p}_k) + \Delta A_c(\mathbf{p}_k) \end{aligned} \quad (28)$$

未知の  $\mathbf{p}_k$  との誤差ベクトルとして式(29)の  $\mathbf{e}(k) \in \mathcal{R}^m$  を用いると, 式(19)(28)より,  $\mathbf{p}_k$  近傍における未知システムの線形化システムは, 正確には式(30)となる。

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{p}_k \quad (29)$$

$$\mathbf{e}(k+1) = A_c(\mathbf{p}_k)\mathbf{e}(k) + \mathbf{b} \{ u_{rg}(k) + w(k) \} \quad (30)$$

ここで, 式(30)の  $w(k)$  は, 式(31)のように最大値  $W_{\max}$  をもつ加法的な外乱を表すとする。

$$|w(k)| \leq W_{\max} \quad (\forall k) \quad (31)$$

このとき, 式(30)の  $u_{rg}(k) \in \mathcal{R}$  は, 式(32)の関係をを用いると, 式(20)(21)(23)より式(33)となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) - \mathbf{c}_k &= \mathbf{x}(k) - \mathbf{p}_k - \delta \mathbf{p}_k \\ &= \mathbf{e}(k) - \delta \mathbf{p}_k \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} u_{rg}(k) &= \\ &= -(S\mathbf{b})^{-1} \{ S A_c(\mathbf{p}_k)\mathbf{e}(k) + (\eta_{rg} - 1)\sigma(k) \\ &\quad + S \Delta A_c(\mathbf{p}_k)\mathbf{e}(k) + C_k \} \end{aligned} \quad (33)$$

ここで, 式(33)の  $C_k \in \mathcal{R}$  は式(34)を表す。

$$\begin{aligned} C_k &= -S A_c(\mathbf{p}_k)\delta \mathbf{p}_k - (\eta_{rg} - 1)S\delta \mathbf{p}_k \\ &\quad - S \Delta A_c(\mathbf{p}_k)\delta \mathbf{p}_k \end{aligned} \quad (34)$$

式(33)の  $-(S\mathbf{b})^{-1}C_k$  は, ファジィモデルと UPR の誤差に依存する式(30)の  $u_{rg}(k)$  の誤差であり, 各  $\mathbf{p}_k$  の近傍領域において一定の値をとる。一方, 式(33)の  $-(S\mathbf{b})^{-1}S \Delta A_c(\mathbf{p}_k)\mathbf{e}(k)$  もファジィモデルと UPR に依存する  $u_{rg}(k)$  の誤差であるが, 各  $\mathbf{p}_k$  近傍において状態  $\mathbf{e}(k)$  の変化にともなって, その大きさが変化する。

式(21)(30)(33)より,  $\sigma(k)$  のダイナミクスは式(35)のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma(k+1) &= S\mathbf{b} w(k) - S \Delta A_c(\mathbf{p}_k)\mathbf{e}(k) \\ &\quad - C_k + (1 - \eta_{rg})\sigma(k) \end{aligned} \quad (35)$$

ここで, 全ての時刻  $k$  に対する  $-S \Delta A_c(\mathbf{p}_k)\mathbf{e}(k)$  の変化の範囲を, その最大値  $E$  を用いて式(36)とする。

$$|-S \Delta A_c(\mathbf{p}_k)\mathbf{e}(k)| \leq E \quad (\forall k) \quad (36)$$

式(35)で  $\eta_{rg} = \eta$  とおき  $k = 0$  から繰り返し用いると,  $\sigma(k+1)$  は式(31)(36)(37)を用いて式(38)のように表すことができ, 一定の範囲に存在する。

$$S\mathbf{b} W_{\max} = W \quad (37)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1-(1-\eta)^{k+1}}{\eta} (W + E + C_k) + (1-\eta)^{k+1}\sigma(0) \\ \leq \sigma(k+1) \leq \\ \frac{1-(1-\eta)^{k+1}}{\eta} (W + E - C_k) + (1-\eta)^{k+1}\sigma(0) \end{aligned} \quad (38)$$

ゲインを  $0 < \eta < 2$  に取ると  $|1 - \eta| < 1$  であるから,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(k+1)$  は式(39)のように収束し, 初期値  $\sigma(0)$  に関わらず一定の範囲に存在する。

$$\begin{aligned} \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ -\frac{W+E+C_k}{\eta} \leq \sigma(\infty) \leq \frac{W+E-C_k}{\eta} \end{aligned} \quad (39)$$

式(39)の範囲の切換超平面  $\sigma(k) = 0$  近傍領域では, スライディングモードが発生して  $\|\mathbf{e}(k) +$

1)  $\| \cdot \| < \| e(k) \|$  となるが, 式(33)の  $u_{rg}(k)$  は  $k \rightarrow \infty$  で  $x(k) \rightarrow c_k$  となるように設計している。このとき, 式(32)の関係から  $k \rightarrow \infty$  で  $e(k) \rightarrow \delta p_k$  となる。よって, 極限値を  $P_k \in \mathcal{R}$  とおいた式(40)がなりたつ。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} | -S\Delta A_c(p_k)e(k) | = | -S\Delta A_c(p_k)\delta p_k | = P_k \quad (40)$$

式(36)(40)より,  $k \rightarrow \infty$  で  $E \rightarrow P_k$  となる。したがって, 式(39)は式(41)と改めて表現できる。

$$-\frac{W + P_k + C_k}{\eta} \leq \sigma(k) \leq \frac{W + P_k - C_k}{\eta} \quad (k \rightarrow \infty) \quad (41)$$

外乱に依存する式(41)の  $W \in \mathcal{R}$  は既知で, ファジィモデルと UPR の誤差に依存する  $P_k \in \mathcal{R}$  と  $C_k \in \mathcal{R}$  は  $\tau$  周期で一定の値を取る。よって,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(k)$  は, 未知システムの状態  $x(k) \in \mathcal{R}^m$  に関わらず, 式(41)のように一定の範囲で偏差を生じる。したがって,  $e(k) \in \mathcal{R}^m$  の  $\sigma(k) = 0$  からの偏差は必ず  $1/\eta$  以下に抑圧され, 制御系はロバーストになる。

## 7. 未知システムに対する DFC

状態ベクトル  $x_k = x(k) \in \mathcal{R}^m$  を未知システムの不安定周期点  $p_k \in \mathcal{R}^m$  に安定化する DFC のカオス制御入力  $u_k = u_d(k) \in \mathcal{R}$  を式(42)とする。

$$u_d(k) = K_k \{ x(k - \tau) - x(k) \} \quad (42)$$

式(42)の  $K_k \in \mathcal{R}^{1 \times m}$  は式(43)のフィードバックゲイン行列である。

$$K_k = \left[ \mathcal{K}_k^1 \quad \mathcal{K}_k^2 \quad \cdots \quad \mathcal{K}_k^m \right] \quad (43)$$

ここで,  $\mathcal{K}_k^i \in \mathcal{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) である。

$\lim_{k \rightarrow \infty} (x(k) - p_k) \rightarrow \mathbf{0}$  とするため, 式(42)を用いた式(10)の ARX ファジィモデルにおいて  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x(k) - c_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}(k) \rightarrow \mathbf{0}$  となるように, 式(44)の拡

大システムを考える。

$$\bar{X}(k+1) = \bar{A}_k \bar{X}(k) \quad (44)$$

式(44)の  $\bar{X}(k) \in \mathcal{R}^{m \times (\tau+1)} \times 1$  は, 式(45)の状態ベクトルを表す。

$$\bar{X}(k) = \left[ \bar{x}^T(k) \quad \bar{x}^T(k-1) \quad \cdots \quad \bar{x}^T(k-\tau) \right]^T \quad (45)$$

また, 式(44)の  $\bar{A}_k \in \mathcal{R}^{m \times (\tau+1)} \times \{m \times (\tau+1)\}$  は, 式(46)のような拡大システム行列を表す。

$$\bar{A}_k = \begin{bmatrix} E_{1k} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & E_{2k} \\ & & & & \mathbf{0} \\ & & & & \vdots \\ & & & I_{m \times \tau} & \\ & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (46)$$

式(44)の  $c_k$  近傍における各線形化システムが  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{X}(k) \rightarrow \mathbf{0}$  となるように, 式(46)の  $\bar{A}_k$  を用いた各特性方程式に Jury の安定判別法<sup>5)</sup>を適用して, ゲイン行列  $K_k \in \mathcal{R}^{1 \times m}$  の各要素  $\mathcal{K}_k^i \in \mathcal{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) を決定する。

## 8. カオス制御入力の構成法

カオス制御入力  $u(k) \in \mathcal{R}$  は, 式(19)に示した周期係数のシステム行列をもつ各  $c_k$  近傍の線形化システムに基づき, 式(23)の制御入力  $u_{rg}(k)$  と式(42)の制御入力  $u_d(k)$  を用いて式(47)のように設計し, 各条件に基づいて切り換える。

$$u(k) = \begin{cases} u_{rg}(k) & \text{if } \| e(k) \| < \varepsilon_k \\ u_d(k) & \text{if } \| e(k) \| < \varphi_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (47)$$

ここで, 式(47)の  $\varepsilon_k$  は時刻  $k$  における  $c_k$  近傍の UPR の大きさである。また,  $\varphi_k$  は時刻  $k$  における UPO の不安定周期点  $p_k$  近傍の大きさであるとする。

## 9. シミュレーション

式(48)で操作量を零とした二次元離散時間カオスシステムのエノン写像を繰り返し用い, 初期値



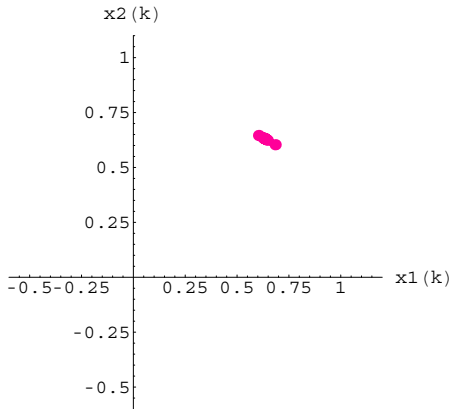


Fig. 2 エノン写像の周期1のUPR

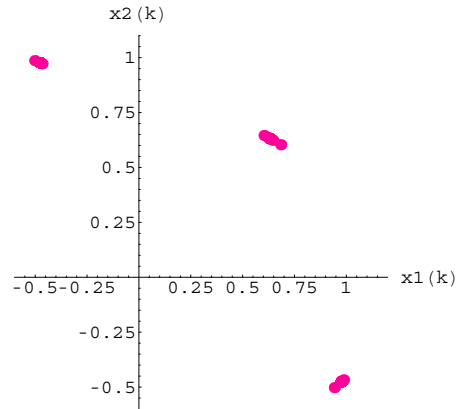


Fig. 3 エノン写像の周期2のUPR

の影響がなくなった時系列データを自由系の未知システムからの出力と仮定して数値実験を行った。

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1.0 - 1.4x_k^2 + 0.3y_k + u_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases} \quad (48)$$

ここで、 $x_k \in \mathcal{R}$  と  $y_k \in \mathcal{R}$  はシステムの状態である。そして、 $u_k \in \mathcal{R}$  は加法的制御入力であり、 $u_k = 0$  のとき式(48)はカオスを発生する。また、 $u_k \neq 0$  のときでも、その大きさが小さいならば、ストレンジアトラクタには歪が生じるがカオス性は未だ保持するとする。簡単のため、観測される二次元の状態ベクトル  $[x_k \ y_k]^T$  の要素が時間おくれ、すなわち  $y_k = x_{k-1}$  であることは既知であり、一次元の時系列  $x_k$  から二次元のファジィモデルを構築できるとした。式(48)の制御系のファジィモデルを得るため、操作量に潮らの予測に基づいたカオス制御(PFC)法<sup>5)</sup>に基づいた  $u_k \in \mathcal{R}$  を用いて数回の予備実験を行い、 $u_k = 0$  としたときの式(48)の状態ベクトルを2周期のUPOに安定化した。このとき、フィードバックゲインは試行錯誤的に  $K^1 = -0.5$ ,  $K^2 = 0.2$  とした。得られた制御過程の時系列  $x_k \in \mathcal{R}$  を用いてFNNの訓練を行い<sup>10, 15)</sup>、式(48)の未知システムのARXファジィモデルを得ることができた。

## 9.1 UPRの探索

$u_k = 0$  のときの式(48)の未知システムの状態ベクトル5000個の時系列  $x_k \in \mathcal{R}^2$  を用いて、式(5)の条件から、不安定周期領域(UPR)を算出した。式(5)のパラメータ  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\delta = 0.05$  とした。図2に算出した周期1のUPRを、図3に算出した周期2のUPRを示す。ただし、図3の2周期のUPRは、1周期のUPRを含んだものである。したがって、図3のUPRから図2の1周期のUPRを取り除いて、図4に示す2周期のUPRを得た。そして、UPOの各不安定周期点の近傍領域として算出した各UPRから、周期1のUPRの重心ベクトル  $c_f = [0.63 \ 0.63]^T$  と周期2のUPRの重心ベクトル  $c_p^1 = [c^1 \ c^2]^T$ ,  $c_p^2 = [c^2 \ c^1]^T$  を求めた。ここで、 $(c^1, c^2) = (0.9758, -0.4758)$  である。

## 9.2 2周期軌道の安定

エノン写像にカオス制御入力を付加した式(48)の二次元離散時間システムの時系列データを未知システムからの出力と仮定して、2周期軌道を安定化する数値実験を行った。不安定2周期点の2成分  $\{p^1, p^2\}$  に安定化された未知システムの状態  $x_1(k) \in \mathcal{R}$  の振舞いを、図5に示す。このとき、

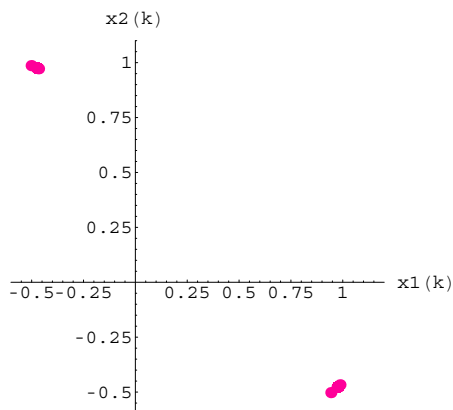


Fig. 4 エノン写像の周期2のUPR(周期1のUPRを除いたもの)

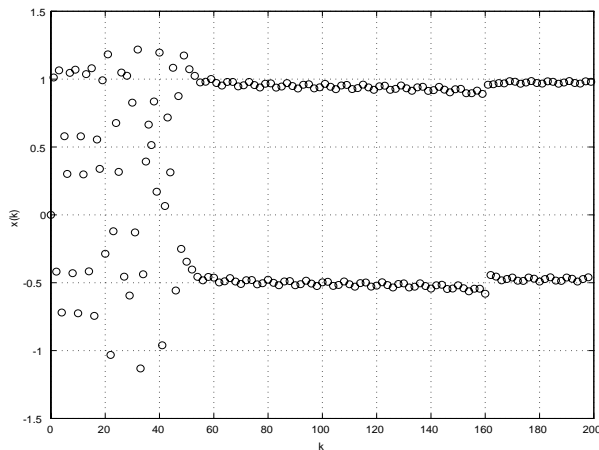


Fig. 5 未知システムの2周期軌道を  $w(k)$  の有る  $u(k)$  でカオス制御したときの  $x_1(k)$  の振舞い

最大値が存在する加法的な外乱として,  $w(k) = 0.02 \sin(2\pi/6)k$  を用いた。

## 10. おわりに

提案手法では, 時系列から UPR として UPO の不安定周期点の近傍を見つけ, エルゴード性を用いて DFC の操作量を印加した。ゲインの設定には, 時系列に基づいたファジィモデルを用いた。外乱が存在する場合は不安定になったり実行できない場合もあるので, ファジィモデルに基づく SMC

入力と切替えて用いる設計法を考案した。

予め時系列を用いて算出する UPO の各不安定周期点やファジィモデルに誤差が生じていたり, 制御入力部分に加法的な外乱が存在していても, それらの大きさが有限であればシステムの状態を UPO に漸近安定できることを解析的に示した。

数値実験を行い, 提案したカオス制御系はロバストな傾向があることを示した。

## 参考文献

- 1) 合原一幸: カオス, Information & Computing, 49, サイエンス社 (1990)
- 2) 合原一幸・池口 徹・山田泰司・小室元政: カオス時系列解析の基礎と応用, 産業図書 (2000)
- 3) 合原一幸: ニューラルシステムにおけるカオス, 東京電機大学出版局 (1993)
- 4) 平井一正: 「カオス応用特集-カオスと制御」, 数理科学, 348-6, 29/34 (1992)
- 5) 潮 俊光: カオス制御, カオス全書, 第4巻, 朝倉書店 (1996)
- 6) 笠木伸英: 「乱流制御と DNS」, 日本流体力学会誌, 16, 188/196 (1997)
- 7) 坂本登・藤本建治・石川将人: 「非線形制御-消す非線系から生かす非線系へ-」, 計測自動制御学会論文集, 33-1, 1/6 (1997)
- 8) A. Garfinkel, M.L. Spano, W.L. Ditto, and J.N. Weiss: “Controlling Cardiac Chaos”, Science, 257-5074, 1230/1235 (1992)
- 9) 合原一幸: カオス学入門, 放送大学教育振興会 (2001)
- 10) 林 勲・古橋武: ファジィ・ニューラルネットワーク, 朝倉書店 (1996)
- 11) G. Chen(ed.), Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems, 260/262, CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, USA (2000)
- 12) H.T. Yau, C.K. Chen, and C.L. Chen: “Sliding Mode Control of Chaotic Systems with Uncertainties”, International Journal of Bifurcation & Chaos, 10-5, 1139/1147 (2000)
- 13) 野波健蔵・田 宏奇: スライディングモード制御 - 非線形ロバスト制御の設計理論 -, 190/203, コロナ社 (1994)
- 14) M. Miyazaki, S.G. Lee, S.H. Lee, and K. Akizuki: “A Chaos Control Method by DFC Using State Prediction”, International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems, 3-1, 1/6 (2003)
- 15) Y. Shimizu, M. Miyazaki, H.H. Lee, and K. Akizuki: “Chaos Synchronization Based on Fuzzy Model Using Sliding Mode Control”, Special Issue of the International Journal of Innovative Computing, Information and Control on Recent Advances in Stochastic Systems Theory and Its Applications, 1-3, 563/579 (2005)