計測自動制御学会東北支部 第237回研究集会 (2007.7.20)
資料番号 237-3

LMIを用いた物理パラメータの同定法

LMI based technique for the identification of plant physical parameters

○大橋泰斗*，平元和彦**

○Yasuto Ohashi*, Kazuhiko Hiramoto**

*秋田大学大学院工学資源学研究科, **秋田大学

*Graduate School of Akita University, **Akita University

キーワード： システム同定 (System identification)，線形行列不等式 (Linear Matrix Inequalities)

連絡先： 〒010-8502 秋田市手形学園町1–1 秋田大学工学資源学部機械工学科
平元和彦，Tel.: (018)889-2348，Fax.: (018)837-0405，E-mail: hira@ipc.akita-u.ac.jp

1. はじめに

制御系設計やシミュレーションにおいて，対象の数学モデルは不可欠であり，現在までに，妥当な数学モデルを得るための種々のモデリング手法が提案されている[1)]．モデリング可能なシステムのクラスは，単純な線形時不変システムから，ロボットマニピュレータ等の非線形システム[2, 3)]や時変システムへと拡大し続けており，システムのモデリングに関する研究は現在も活発に続けられている．

本報告では，動的システムの入出力データを用い，システムの振舞いを表す微分方程式の構造が既知の下で，その物理パラメータ値を同定する（グレーボックスモデリング）問題を考える．このような問題設定の典型的な例として，機械系の運動方程式表現下で，その質量，減衰および剛性等を求める問題を考えることができる．この問題は，マニピュレータの基底パラメータを同定する手法と同様[2, 3)]，システムの物理パラメータ（またはその関数）を未知変数とした線形連立代数方程式に帰着され，従来は最小二乗法を用いて解かれてきた．本報告では，この問題の解法として，線形行列不等式 (LMI: Linear Matrix Inequality) を用いることを提案する．LMIを用いることによって，同定される物理パラメータ値に，その上下限値などの拘束が存在する場合や，パラメータの一部が時変となるような場合にも容易に拡張可能であることを示す．いくつかの例を用いて，本手法の可能性について検討を行う．

本報告の構成を以下に示す．第2節では，本報告の問題設定と，主要結果であるLMIを用いた同定法およびその特徴を述べる．第3節では，簡単な例を用いて本手法の妥当性を確認する．結論および今後の課題は，第4節で述べられる．

本報告で用いる記号は，以下の通りである．t: 時刻，$\mathbf{R}^n$: n次元実ベクトルの集合，$\mathbf{R}^{n\times n}$: $n\times n$実行列の集合，$\mathbf{S}^n$: n次実対称行列の集合，M^T: 行列Mの転置，I: 適当な次元を持つ単位行列，$0_{m\times n}$:

$m \times n$零行列.

2. LMIを用いたシステム同定法

2.1 問題設定

同定の対象として，ある動作領域内で，その動的振舞いが以下の微分方程式で表される安定なn自由度機械系を考える.

$$f(\ddot{q}(t), \dot{q}(t), q(t)) = u(t) \tag{1}$$

ここで，$q(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}^{n_u}$は，それぞれ変位および入力ベクトルである．$f(\ddot{q}(t), \dot{q}(t), q(t)) \in \mathbf{R}^{n_u}$は，未知パラメータを含む機械系の動特性を表すモデルの微分方程式である．モデル化のためのデータとして，$q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$, $u(t)$が初期時刻0から，終端時刻t_fまで，サンプリング間隔T_sで$N+1$個取得されているとする．このとき，$T_s = \frac{t_f}{N}$である.

いま，$f(\ddot{q}(t), \dot{q}(t), q(t))$が，次式のような未知パラメータベクトルの線形関数で与えられると仮定する.

$$f(\ddot{q}(t), \dot{q}(t), q(t)) = g(\ddot{q}(t), \dot{q}(t), q(t))\Theta \tag{2}$$

ここで，$\Theta := [\theta_1,\ \ldots,\ \theta_{n_\theta}]^T \in \mathbf{R}^{n_\theta}$および$g(\ddot{q}(t), \dot{q}(t), q(t)) \in \mathbf{R}^{n_u \times n_\theta}$は，それぞれ物理パラメータ（の関数）をその要素に持つ未知パラメータベクトルおよび取得された運動データからなる行列である．このとき，式(1)は，以下のように表すことができる.

$$g(\ddot{q}(t), \dot{q}(t), q(t))\Theta - u(t) = 0, \tag{3}$$

この結果を利用したシステム同定の手法として，最小二乗法を用いたロボットマニピュレータの基底パラメータの同定[2, 3]をあげることができる.

本報告では，式(3)の$g(\ddot{q}(t), \dot{q}(t), q(t)) \in \mathbf{R}^{n_u \times n_\theta}$および$u(t)$が既知の下で，未知パラメータ$\Theta$に上下限等の拘束条件が存在する場合や，その一部の要素が時変の場合，Θを推定する問題を考える.

2.2 LMIに基づく物理パラメータの同定

未知パラメータベクトルΘの推定値を$\hat{\Theta}$と定義する．本報告では，パラメータ同定問題を，以下の評価関数Jの最小化問題と定義する.

$$J := \int_0^{t_f} e^T(t)W(t)e(t)dt \tag{4}$$
$$e(t) := g(\ddot{q}(t), \dot{q}(t), q(t))\hat{\Theta} - u(t)$$

ここで，$W(t) \in \mathbf{S}^n$, $W(t) > 0, \forall\ 0 \le t \le t_f$は，同定誤差に関する重み関数であり，データ取得区間$[0, t_f]$のうち，モデル化において重視する時間帯を規定するものである．式(4)Jは，次式のように近似表現できる.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{t_f} e^T(t)W(t)e(t)dt \simeq \sum_{i=0}^{N} e^T(iT_s)W(iT_s)e(iT_s) \\ &= \sum_{i=0}^{N} \left(g(iT_s)\hat{\Theta} - u(iT_s)\right)^T W(iT_s) \left(g(iT_s)\hat{\Theta} - u(iT_s)\right) \\ &= e(0)^T W(0)e(0) + \cdots + e^T(NT_s)W(NT_s)e(NT_s) := J_d \end{aligned} \tag{5}$$

J_dの各項$e(iT_s)^T W(iT_s)e(iT_s)$ $(i = 0, \ldots, N)$に関する以下の不等式拘束条件を考える.

$$e(iT_s)^T W(iT_s)e(iT_s) < h_i I,\ h_i > 0,\ \forall i \tag{6}$$

Schur complementの補題[4]より，条件(6)は，$h_i > 0$および未知パラメータベクトル$\Theta \in \mathbf{R}^{n_\theta}$に関する以下のような$N+1$個の連立LMIとなる.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} h_i I & e(iT_s)^T \\ e(iT_s) & W^{-1}(iT_s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_i I & \left(g(iT_s)\hat{\Theta} - u(iT_s)\right)^T \\ g(iT_s)\hat{\Theta} - u(iT_s) & W^{-1}(iT_s) \end{bmatrix} > 0, \end{aligned} \tag{7}$$
$$\forall i = 0, \ldots, N$$

本報告では，同定問題を式(7)の連立LMIを満たしながら，次式で与えられる式(5)J_dの上界$\overline{J_d}$を最小化する最適化問題と定式化する.

$$\overline{J_d} := \sum_{i=0}^{N} h_i \tag{8}$$

本問題は，未知変数に関するLMI問題となるから，$\overline{J_d}$を大域的に最適化するような$\hat{\Theta} \in \mathbf{R}^{n_\theta}$を，効率的に求めることが可能である．さらに，未知パラメータベクトルΘの一部の要素が時変の場合も，$\Theta \in \mathbf{R}^{n_\theta}$に関する線形連立方程式(3)が，時変パラメータに関して不定でない限り，同様に取り扱うことが可能である．

以上示したようなパラメータ同定問題のLMI定式化は，従来から提案されている最小二乗法によるパラメータ同定とほぼ同義である．本報告の定式化のメリットは，同定問題を式(7)のようなLMI最小化問題に帰着することにより，$\hat{\Theta}$に関する他のLMI拘束も，式(7)と連立させることによって，簡単に扱うことが可能な点にある．$\hat{\Theta}$に関するLMI拘束の例として，以下を挙げることができる．

1) **Θの上下限値の拘束:** 同定される未知パラメータベクトルに，以下のような上下限が与えられている場合

$$\Theta_l \le \hat{\Theta} \le \Theta_u,\ \Theta_l, \Theta_u \in \mathbf{R}^{n_\theta} \tag{9}$$

ここで，Θ_uおよびΘ_lは，それぞれ未知パラメータベクトルΘの上下限である．例として，一般的な機械系において，その質量，減衰，剛性値は常に正となるが，取得された入出力データを用いて単純に最小二乗法を適用した場合，得られる（質量，減衰，剛性値の関数をその要素に持つ）未知パラメータベクトルΘが正の値になる保証はない．さらに，何らかの方法でノイズの影響を抑制できたとしても，同定される数学モデルは，実際の対象を単純化しているから，モデル化の際無視した動特性の影響で，上記のような拘束が満たされない場合も容易に考えられる．そのような場合，誤差の二乗積分の意味で最適なΘが得られたとしても，得られた数学モデルは，その後の解析や制御系設計には使うことができない．よって，このような未知パラメータに対して上下限値の拘束が存在する下でのシステム同定が簡単に行える本手法は有用であると思われる．なお，Θ_uおよびΘ_lは時変でもよい．

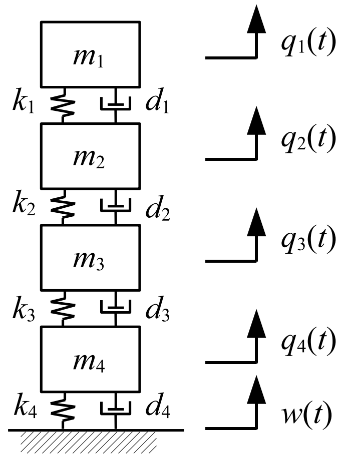

Fig. 1　4DOF system

2) **Θに関する二次形式の拘束：** 以下のような$\hat{\Theta}$に関する二次形式の拘束を考える．

$$\mathcal{A} - \left(\mathcal{B}\hat{\Theta} - \mathcal{C}\right)\mathcal{D}^{-1}\left(\mathcal{B}\hat{\Theta} - \mathcal{C}\right)^T > 0 \tag{10}$$

ここで，$\mathcal{A} \in \mathbf{S}^{n_A}$, $\mathcal{A} > 0$, $\mathcal{B} \in \mathbf{R}^{n_A \times n_\theta}$, $\mathcal{C} \in \mathcal{R}^{n_A \times n_\theta}$および$\mathcal{D} \in \mathbf{S}^{n_\theta}$, $\mathcal{D} > 0$である．同定問題の定式化時と同様に，式(10)は，次式のように$\hat{\Theta}$に関するLMIで記述される．

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}\hat{\Theta} - \mathcal{C} \\ \left(\mathcal{B}\hat{\Theta} - \mathcal{C}\right)^T & \mathcal{D} \end{bmatrix} > 0 \tag{11}$$

式(11)の拘束の例として，$\hat{\Theta}$中の時変要素の分散に関する拘束などを挙げることができる．この場合も，行列$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$は時変でもよい．

3.　シミュレーション

図1に，本報告で同定シミュレーションに用いる4自由度系を示す[5)]．本システムの運動方程式を次

Table 1　Physical parameters of the 4DOF system

Parameters [Unit]	Value
m_1 [kg]	6.000
m_2 [kg]	2.800×10^1
m_3 [kg]	1.000×10^1
m_4 [kg]	1.5000×10^1
d_1 [Ns/m]	4.000×10^2
d_2 [Ns/m]	4.750×10^3
d_3 [Ns/m]	4.585×10^3
d_4 [Ns/m]	2.064×10^3
k_1 [N/m]	3.100×10^5
k_2 [N/m]	1.830×10^5
k_3 [N/m]	1.628×10^5
k_4 [N/m]	9.000×10^4

式に示す．

$$M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + Kq(t) = F_d w(t) + F_v \dot{w}(t) \quad (12)$$

$$q(t) := \begin{bmatrix} q_1(t) & q_2(t) & q_3(t) & q_4(t) \end{bmatrix}^T,$$

$$M := \mathrm{diag}(m_1, m_2, m_3, m_4),$$

$$D := \begin{bmatrix} d_1 & -d_1 & 0 & 0 \\ -d_1 & d_1 + d_2 & -d_2 & 0 \\ 0 & -d_2 & d_2 + d_3 & -d_3 \\ 0 & 0 & -d_3 & d_3 + d_4 \end{bmatrix},$$

$$K := \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix},$$

$$F_d := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}^T, F_v := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}^T$$

それぞれの物理パラメータ値を表1に示す．本同定問題においては，質量m_i $(i = 1, \ldots, 4)$の値は既知とし，減衰係数d_iおよびばね定数k_i $(i = 1, \ldots, 4)$を未知物理パラメータとおく．外乱$w(t)$を平均0, 分散0.01，カットオフ周波数100 [rad/s]の帯域性白色ノイズとしてシステムを駆動する．1 [msec]の間隔で得られる1000個（終端時刻$t_f = 1$ [s]）の外乱$w(t)$，変位ベクトル$q(t)$およびそれらの微分値のデータから，未知パラメータベクトルを同定する．未知パラメータベクトルを次式で定義する．

$$\Theta := \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

式(12)を式(3)の形に書き換えると次式となる．

$$g(t)\Theta = u(t),\ g(t) := [g_{ij}(t)],\ u(t) := \{u_i(t)\}, \quad (14)$$

$$i = 1, \ldots, 4,\ j = 1, \ldots, 8,$$

$$g_{11}(t) = \dot{q}_1(t) - \dot{q}_2(t),\ g_{14}(t) = q_1(t) - q_2(t),$$

$$g_{21}(t) = \dot{q}_2(t) - \dot{q}_1(t),\ g_{22}(t) = \dot{q}_2(t) - \dot{q}_3(t),$$

$$g_{24}(t) = q_2(t) - q_1(t),\ g_{25}(t) = q_2(t) - q_3(t),$$

$$g_{32}(t) = \dot{q}_3(t) - \dot{q}_2(t),\ g_{33}(t) = \dot{q}_3(t) - \dot{q}_4(t),$$

$$g_{36}(t) = q_3(t) - q_2(t),\ g_{37}(t) = q_3(t) - q_4(t),$$

$$g_{43}(t) = \dot{q}_4(t) - \dot{q}_3(t),\ g_{44}(t) = \dot{q}_4(t) - \dot{w}(t),$$

$$g_{47}(t) = q_4(t) - q_3(t),\ g_{48}(t) = q_4(t) - w(t),$$

$$u_i(t) = -m_i \ddot{q}_i(t),\ i = 1, \ldots, 4 \quad (15)$$

$g(t)$の他の成分は0である．

3.1　時不変物理パラメータの同定

式(4)の重み関数を$W(t) = I$ $(\forall t,\ 0 \le t \le t_f,\ t_f = 0.2)$とし，未知パラメータベクトルの推定値$\hat{\Theta}$に関するLMI拘束$\hat{\Theta} > 0_{8\times 1}$の下で式(7)のLMIを満足し，$h_i > 0$ $(i = 0, \ldots, 1000)$を最小化するような$\hat{\Theta}$を求めた．得られた$\hat{\Theta}$は，本シミュレーションにおける物理パラメータ（表1）で設定した有効数字4桁まで完全に一致した．この結果は，未知パラメータが時不変の場合，本手法を用いて未知物理パラメータを正しく同定できることを示している．

3.2　時変物理パラメータの同定

時変パラメータベクトルの同定例として，以下の2つを考える．

Case 1: ばね定数k_4を時変物理パラメータとし，その値が次式のように階段状に突然切り替

わる場合．

$$k_4(t)=\begin{cases} k_4^l & (t<t_c^1) \\ k_4^h & (t_c^1\le t<t_c^2) \\ k_4^l & (t_c^2\le t<t_c^3) \\ k_4^h & (t_c^3\le t<t_f) \end{cases},\ 0<t_c^1<t_c^2<t_c^3<t_f \tag{16}$$

Case 2: 減衰係数d_4が，相対速度$v_{4w}(t):=\dot{q}_4(t)-\dot{w}(t)$の絶対値$|v_{4w}(t)(t)|$に依存して次式のように切り替わる場合．

$$d_4(t)=\begin{cases} d_4^h & (|v_{4w}(t)|>v_{4w}^b) \\ d_4^l & (|v_{4w}(t)|\le v_{4w}^b) \end{cases},\ v_{4w}^b>0 \tag{17}$$

Case 1において，$t_c^1=0.25$ [s], $t_c^2=0.5$ [s], $t_c^3=0.75$ [s], $k_4^l=0.9\times10^5$ [N/s]および$k_4^h=1.8\times10^5$ [N/m]としたとき，提案する手法を用いて同定を行った．なお，Case 1-3のすべての場合において，前節と同様に，$W(t)=I$とし，同定される物理パラメータ値にはそれらの値が正となるような拘束を与えている．得られた時変のばね定数$k_4(t)$および他の時不変パラメータの同定結果を図2および表2に示す．同定された時変パラメータ$k_4(t)$の時刻暦には若干のスパイク状の誤差が見られるが，シミュレーションで設定したk_4(t)の変動をよくとらえていることが分かる．また，時不変パラメータも本シミュレーションで設定したパラメータ値と有効数字の範囲で完全に一致している．

Table 2　Identified time invariant parameters in Case 1

Parameters [Unit]	Value
d_1 [Ns/m]	4.000×10^2
d_2 [Ns/m]	4.750×10^3
d_3 [Ns/m]	4.585×10^3
d_4 [Ns/m]	2.064×10^3
k_1 [N/m]	3.100×10^5
k_2 [N/m]	1.830×10^5
k_3 [N/m]	1.628×10^5

Case 2において，$v_{4w}^b=10$ [m/s], $d_4^l=2064$ [Ns/m]および$d_4^l=2d_4^l=2064$ [Ns/m]とした場合

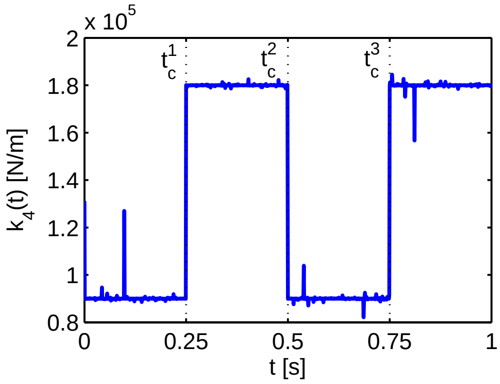

Fig.　2　Result of the identification (Case 1, $t_c^1=0.25$ [s], $t_c^2=0.5$ [s], $t_c^3=0.75$ [s], $k_4^l=0.9\times10^5$ [N/m], $k_4^h=2k_4^l=1.8\times10^5$ [N/m])

の時変パラメータ$d_4(t)$および時不変パラメータの同定結果をそれぞれ図3（最初の0.2 [s]間のみ）および表3に示す．図3において，シミュレーションで作成した$d_4(t)$と同定されたそれはほぼ完全に一致している．時不変パラメータの同定値は，k_4に0.2116%の誤差が見られる以外，シミュレーションで設定した値と一致している．

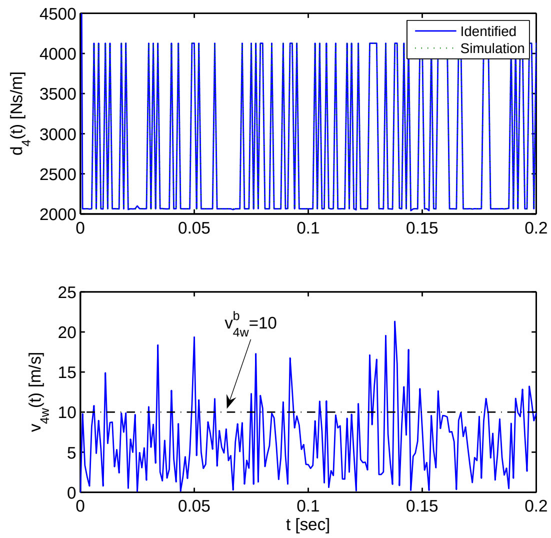

Fig.　3　Result of the identification (Case 2, $v_{4w}^b=10$ [m/s], $d_4^l=2064$ [Ns/m], $d_4^h=4128$ [Ns/m])

Table 3 Identified time invariant parameters in Case 2

Parameters [Unit]	Value
d_1 [Ns/m]	4.000×10^2
d_2 [Ns/m]	4.750×10^3
d_3 [Ns/m]	4.585×10^3
k_1 [N/m]	3.100×10^5
k_2 [N/m]	1.830×10^5
k_3 [N/m]	1.628×10^5
k_4 [N/m]	$\underline{9.0190 \times 10^4}$

3.3 ノイズの影響

提案する同定手法に観測ノイズが及ぼす影響を調べるため，シミュレーションで得られた変位$q(t)$，速度$\dot{q}(t)$および加速度$\ddot{q}(t)$に，大きさの最大値が$q(t)$，$\dot{q}(t)$，$\ddot{q}(t)$それぞれの成分のv%の正規乱数（$q(t)$，$\dot{q}(t)$，$\ddot{q}(t)$とは無相関）をカットオフ周波数100 [rad/s]のローパスフィルタを通過させたノイズが混入したと仮定する．Case 1（システムが時不変）において，vを約$1, 5, 10, 50$%[1]とした場合に対して，10回の同定を行った場合の物理パラメータ値の平均値と真値との相対誤差を表4-7にそれぞれ示す．SN比の悪化に伴い，同定誤差が大きくなる傾向があるものの，概ね良好な結果が得られていることがわかる．

Table 4 Identified time invariant parameters in Case 1 (noise level $v = 1\%$)

Parameters [Unit]	Values	Error %
d_1 [Ns/m]	3.999×10^2	0.0250
d_2 [Ns/m]	4.750×10^3	0.0000
d_3 [Ns/m]	4.585×10^3	0.0000
d_4 [Ns/m]	2.064×10^3	0.0000
k_1 [N/m]	3.100×10^5	0.0000
k_2 [N/m]	1.830×10^5	0.0000
k_3 [N/m]	1.628×10^5	0.0000
k_4 [N/m]	8.994×10^4	0.0667

[1]正規乱数の標準偏差σに対して，3σの値をvとしている．

Table 5 Identified time invariant parameters in Case 1 (noise level $v = 5\%$)

Parameters [Unit]	Values	Error %
d_1 [Ns/m]	4.016×10^2	0.4000
d_2 [Ns/m]	4.747×10^3	0.0632
d_3 [Ns/m]	4.584×10^3	0.0218
d_4 [Ns/m]	2.064×10^3	0.0000
k_1 [N/m]	3.095×10^5	0.1613
k_2 [N/m]	1.826×10^5	0.2186
k_3 [N/m]	1.621×10^5	0.4300
k_4 [N/m]	8.986×10^4	0.1556

Table 6 Identified time invariant parameters in Case 1 (noise level $v = 10\%$)

Parameters [Unit]	Values	Error %
d_1 [Ns/m]	3.980×10^2	0.5000
d_2 [Ns/m]	4.743×10^3	0.1474
d_3 [Ns/m]	4.582×10^3	0.0654
d_4 [Ns/m]	2.064×10^3	0.0000
k_1 [N/m]	3.086×10^5	0.4516
k_2 [N/m]	1.815×10^5	0.8197
k_3 [N/m]	1.612×10^5	0.9828
k_4 [N/m]	8.943×10^4	0.6333

4. まとめと今後の課題

本報告では，機械系のグレーボックスモデリング問題に対するLMIを用いた解法を提案した．LMIを用いることにより，同定されるパラメータ値に上下限などの拘束条件が存在する場合や，パラメータの一部が時変の場合でも同定が行えることを示した．振動系に対するシミュレーションにより，提案手法の有効性を示した．

今後の課題を以下に挙げる．

- ノイズの影響のさらなる検討
- 本手法のLPVシステムの同定問題への適用
- 種々の実験データを用いた同定実験

Table 7 Identified time invariant parameters in Case 1 (noise level $v = 50\%$)

Parameters [Unit]	Values	Error %
d_1 [Ns/m]	3.826×10^2	4.3500
d_2 [Ns/m]	4.644×10^3	2.2316
d_3 [Ns/m]	4.511×10^3	0.1614
d_4 [Ns/m]	2.072×10^3	0.3876
k_1 [N/m]	2.710×10^5	12.5806
k_2 [N/m]	1.514×10^5	17.2678
k_3 [N/m]	1.312×10^5	19.4103
k_4 [N/m]	8.235×10^4	8.5000

参考文献

1) 足立修一：MATLABによる制御のためのシステム同定，東京電機大学出版局 (1996)

2) 大須賀公一：非線形メカニカルシステムの適応制御，計測自動制御学会論文集，**22-**7, 756/762 (1986)

3) Kozlowski: K. Modelling and Identification in Robotics, Springer-Verlag, New York (1998)

4) Skelton, R. E., Iwasaki, T. and Grigoriadis, K.: A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design, Taylor & Francis, London (1998)

5) Boileau, P.-É. and Rakheja, S.: Whole-body vertical biodynamic response characteristics of the seated vehicle driver: Measurement and model development, International Journal of Industrial Ergonomics, **22,** 449/472 (1998)