計測自動制御学会東北支部 第238回研究集会 (2007.10.18)
資料番号 238-1

離散時間非線形系のモデル追従形制御系の一設計法

A Design of Discrete-Time Nonlinear Model Following Control System

○呉 淑晶*，大久保 重範*，及川 一美*, 高橋 達也*

○Shujing Wu*, Shigenori Okubo*, kazumi oyikawa*, tatsuya takahasi*

*山形大学 工学部

*Faculty of Engineering Yamagata University

キーワード： 離散時間(discrete time), 非線形 (nonlinear)，安定性 (stable),
モデル追従 (model following)

連絡先： 〒992-8510 山形県米沢市城南四丁目3-16 山形大学 工学部 機械システム工学科 大久保研究室
大久保 重範,Tel.: (0238)26-3245，Fax.: (0238)26-3245，E-mail: sokubo@yz.yamagata-u.ac.jp
呉 淑晶，Tel.: (0238)26-3245，Fax.: (0238)26-3245，E-mail: wushujing168@hotmail.com

1. はじめに

制御対象の出力をモデルの出力に追従させる制御系として，モデル追従形制御系(MFCS)がある．外乱を考慮した非線形系のモデル追従形制御系の設計[1)]，零点の安定配置を使った場合[2)]に対するMFCSの設計法は種々提案されている．これに対し，離散時間系より連続時間系の方が圧倒に多い．

しかしながら，ディジタル計算機の普及，連続時間系より離散時間系を取り扱う場合[3)]の方が多くなりつつあり[4)]，性能の改善，質の向上を図っているそのため，離散時間系に対する研究は実用かつ重要になってきた．

そこで，本稿では大久保[1)]が提案した方法に基づいて，実際安定の考え方を用いたモデル追従制御系の設計法を説明し,有界性を示す.最後に，本方法の有効性を確かめるために行なった数値例を示す.

2. 問題の設定

制御対象は (1),(2),(3) 式, 参照モデルは (4),(5) とする．

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + B_f f(v(k)) + d(k) \tag{1}$$

$$v(k) = C_f x(k) \tag{2}$$

$$y(k) = Cx(k) + d_0(k) \tag{3}$$

$$x_m(k+1) = A_m x_m(k) + B_m r_m(k) \tag{4}$$

$$y_m(k) = C_m x_m(k) \tag{5}$$

各ベクトルの次数は $x(k), d(k) \in R^n$,$u(k), y(k)$, $y_m(k), d_0(k) \in R^l$, $f(v(k)) \in R^{l_f}, v(k) \in R^{l_f}, r_m(k) \in R^{l_m}, x_m(k) \in R^{n_m}$ とする．ここで$y(k)$は制御対象の出力, $v(k)$は補助出力, $u(k)$は制御入力, $d(k)$,$d_0(k)$は有界な外乱である．A, B, CおよびA_m, B_m, C_mは適当な次元の定数行列である．非線形関数$f(v(k))$は既知であるものとし，そして，次の条

件を満たすものとする．

$$||f(v(k))|| \leqq \alpha + \beta||v(k)||^{\gamma} \tag{6}$$

ここでは$\alpha \geq 0$，$\beta \geq 0$，$0 \leqq \gamma < 1$の定数とし，$||\bullet||$はユークリッドノルムである．(C, A, B)は可制御，可観測である．よって，

$$D_d(z)d(k) = 0 \tag{7}$$

$$D_d(z)d_0(k) = 0 \tag{8}$$

成立する．ここで, 特性多項式$D_d(z)$はモニック多項式であり，$\partial D_d(z) = n_d$とする．制御対象と参照モデルの出力誤差$e(k)$は次式で与えられる．

$$e(k) = y(k) - y_m(k) \tag{9}$$

この設計においては，内部状態がすべて有界に保持され，$k \to \infty$で$e(k) \to 0$にするようなディスクリプタに基づく離散時間非線形系のモデル追従形制御系 (discrete time model following control system DMFCS)の設計法を考えていく．

3. 制御系の設計

zをシフト演算子として，$x(k+1) = zx(k)$とする．制御対象とモデルの入出力関係を求めば，$y(k), y_m(k), v(k)$は(10)(11)(12)式で与えられる．

$$y(k) = C(zE - A)^{-1}Bu(k) + C(zE - A)^{-1}$$

$$\cdot B_f f(v(k)) + C(zE - A)^{-1}d(k) + d_0(k) \tag{10}$$

$$y_m(k) = C_m(zE - A_m)^{-1}B_m r_m(k) \tag{11}$$

$$v(k) = C_f(zI - A)^{-1}Bu(k) + C_f(zE - A)^{-1}$$

$$\cdot B_f f(v(k)) + C(zE - A)^{-1}d(k) \tag{12}$$

ここで，

$$C(zE - A)^{-1}B = N(z)/D(z) \tag{13}$$

$$C(zE - A)^{-1}B_f = N_f(z)/D(z) \tag{14}$$

$$C_m(zI - A_m)^{-1}B_m = N_m(z)/D_m(z) \tag{15}$$

とする．ただし，

$$D(z) = |zE - A| \tag{16}$$

$$D_m(z) = |zI - A_m| \tag{17}$$

である．これを用いて，(10)と(11)式は(18)と(19)式が得られる．外乱はまとめて(20)式になる．

$$D(z)y(k) = N(z)u(k) + N_f(z)f(v(k)) + w(k) \tag{18}$$

$$D_m(z)y_m(k) = N_m(z)r_m(k) \tag{19}$$

$$w(k) = Cadj(zE - A)d(k) + D(z)d_0(k) \tag{20}$$

ここで, $\partial_{ri}(N(z)) = \sigma_i$, $\partial_{ri}(N_f(z)) = \sigma_{fi}$, $\partial_{ri}(N_m(z)) = \sigma_{mi}$である．$(C_m, A_m, B_m)$ は可制御と可観測である．そして，

$$C_m(zI - A_m)^{-1}B_m = N_m(z)/D_m(z) \tag{21}$$

になる．(7)と(8)式より，$w(k)$は次式を満たす．

$$D_d(z)w(k) = 0 \tag{22}$$

つぎに, ρ次($\rho \geq n_d + 2n - n_m - 1 - \sigma_i$)のモニックで安定な多項式$T(z)$を選び，次の方程式より$R(z)$と$S(z)$を求める．

$$T(z)D_m(z) = D_d(z)D(z)R(z) + S(z) \tag{23}$$

ここで，各多項式の次数は下の式ようになる．

$$\partial T(z) = \rho \tag{24}$$

$$\partial D_d(z) = n_d \tag{25}$$

$$\partial D_m(z) = n_m \tag{26}$$

$$\partial D(z) = n \tag{27}$$

$$\partial R(z) = \rho + n_m - n_d - n \tag{28}$$

$$\partial S(z) \leqq n_d + n - 1 \tag{29}$$

つぎに，(23)式を用いて誤差$e(k)$にかけると次式が得られる．

$$T(z)D_m(z)e(k) = D_d(z)R(z)N(z)u(k)$$

$$+ D_d(z)R(z)N_f(z)f(v(k))$$

$$+ S(z)y(k) - T(z)N_m(z)r_m(k) \tag{30}$$

すなわち，

$$e(k)=\frac{1}{T(z)D_m(z)}\{[D_d(z)R(z)N(z)$$
$$-Q(z)N_r]u(k)+Q(z)N_r u(k)$$
$$+D_d(z)R(z)N_f(z)f(v(k))$$
$$+S(z)y(k)-T(z)N_m(z)r_m(k)\} \quad (31)$$

$N_r\neq 0$として, 上式右辺をゼロにし，$u(k)$を求め，その結果は下式のようになる.

$$\begin{aligned} u(k) &= -N_r^{-1}Q^{-1}(z)\{D_d(z)R(z)N(z)\\ &- Q(z)N_r\}u(k)\\ &- N_r^{-1}Q^{-1}(z)D_d(z)R(z)N_f(z)f(v(k))\\ &- N_r^{-1}Q^{-1}(z)S(z)y(k)+u_m(k) \quad (32)\\ u_m(k) &= N_r^{-1}Q^{-1}(z)T(z)N_m(z)r_m(k) \quad (33)\end{aligned}$$

ここで, $Q(z)=diag[z^{\delta_i}], \delta_i=\rho+n_m-n+\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$である.

$u(k)$は$e(k)\to 0(k\to\infty)$にするより，制御系を構成する内部状態が有界であれば,モデル追従形制御系が実現できる.

4. 内部状態の有界性の証明

状態空間手法を用いて，$u(k)$を表すために，以下のような状態変数を導入すれば,

$$\begin{aligned} u(k) &= -H_1\xi_1(k)-E_2y(k)-H_2\xi_2(k)\\ &- E_3f(v(k))-H_3\xi_3(k)+u_m(k) \quad (34)\\ u_m(k) &= E_4r_m(k)+H_4\xi_4(k) \quad (35)\end{aligned}$$

と書き直すことが出来る. $\xi_1(k)$,$\xi_2(k)$,$\xi_3(k)$,$\xi_4(k)$は次式の状態変数フィルタの状態が満たす.

$$\xi_1(k+1)=F_1\xi_1(k)+G_1u(k) \quad (36)$$

$$\xi_2(k+1)=F_2\xi_2(k)+G_2y(k) \quad (37)$$

$$\xi_3(k+1)=F_3\xi_3(k)+G_3f(v(k)) \quad (38)$$

$$\xi_4(k+1)=F_4\xi_4(k)+G_4r_m(k) \quad (39)$$

ここで,

$$|zI-F_i|=|Q(z)|,(i=1,2,3,4) \quad (40)$$

とする．かつ多項式行列の間には以下の関係がある.

$$\begin{aligned} &N_r^{-1}Q^{-1}(z)\{D_d(z)R(z)N(z)-Q(z)N_r\}\\ &\qquad =H_1(zI-F_1)^{-1}G_1 \quad (41)\\ &N_r^{-1}Q^{-1}(z)S(z)\\ &\qquad =H_2(zI-F_2)^{-1}G_2+E_2 \quad (42)\\ &N_r^{-1}Q^{-1}(z)D_d(z)R(z)N_f(z)\\ &\qquad =H_3(zI-F_3)^{-1}G_3+E_3 \quad (43)\\ &N_r^{-1}Q^{-1}(z)T(z)N_m(z)\\ &\qquad =H_4(zI-F_4)^{-1}G_4+E_4 \quad (44)\end{aligned}$$

制御系全体の挙動はつぎのように記述される.

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k+1)\\ \xi_1(k+1)\\ \xi_2(k+1)\\ \xi_3(k+1)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} A-BE_2C & -BH_1 & -BH_2 & -BH_3\\ -G_1E_2C & F_1-G_1H_1 & -G_1H_2 & -G_1H_3\\ G_2C & 0 & F_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & F_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k)\\ \xi_1(k)\\ \xi_2(k)\\ \xi_3(k)\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} BH_4\\ G_1H_4\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\xi_4(k)+\begin{bmatrix} B_f-BE_3\\ -G_1E_3\\ 0\\ G_3\end{bmatrix}f(v(k))$$
$$+\begin{bmatrix} BE_4\\ G_1E_4\\ 0\\ 0\end{bmatrix}r_m(k)$$
$$+\begin{bmatrix} d(k)-BE_2d_0(k)\\ -G_1E_2d_0(k)\\ G_2d_0(k)\\ 0\end{bmatrix} \quad (45)$$

$$v(k)=C_fx(k) \quad (46)$$

$$y(k)=Cx(k)+d_0(k) \quad (47)$$

$z^T(k), \tilde{E}, A_s, B_s, d_s, C_s$ は以下のように示される，

$$z^T(k) = [x^T(k), \xi_1^T(k), \xi_2^T(k), \xi_3^T(k)] \quad (48)$$

$$A_s = \begin{bmatrix} A - BE_2C & -BH_1 & -BH_2 & -BH_3 \\ -G_1E_2C & F_1 - G_1H_1 & -G_1H_2 & -G_1H_3 \\ G_2C & 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_3 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$d_s(k) = \begin{bmatrix} BH_4 \\ G_1H_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xi_4(k) + \begin{bmatrix} BE_4 \\ G_1E_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r_m(k) + \begin{bmatrix} d(k) - BE_2d_0(k) \\ -G_1E_2d_0(k) \\ G_2d_0(k) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Bu_m(k) + d(k) - BE_2d_0(k) \\ -G_1u_m(k) - G_1E_2d_0(k) \\ G_2d_0(k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$B_s = \begin{bmatrix} B_f - BE_3 \\ -G_1E_3 \\ 0 \\ G_3 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$C_s = [C_f, 0, 0, 0] \quad (53)$$

$$C_R = [C, 0, 0, 0] \quad (54)$$

(45) $\sim$ (47)式の系は以下のようになる．

$$\tilde{E}z(k+1) = A_sz(k) + B_sf(v(k)) + d_s(k) \quad (55)$$

$$v(k) = C_sz(k) \quad (56)$$

$$y(k) = C_Rz(k) + d_0(k) \quad (57)$$

この系で$d_s(k)$が有界であるので，内部状態の有界性は$z(k)$の有界性を示すことである．A_sは(49)式で与えられて，その特性多項式は下式になる．

$$|z\tilde{E} - A_s| = T^l(z)D_m^l(z)|Q(z)|^2\frac{|N(z)||N_r^{-1}|}{D^{l-1}(z)} = \frac{1}{\alpha_e}|N_r^{-1}|T^l(z)D_m^l(z)|Q(z)|^2|N_L(z)| \quad (58)$$

上式で$|Q(z)|, |N_L(z)|, T(z), D_m(z)$はすべて安定な多項式であるから，$A_s$は安定なシステム行列である．$z(k)$は

$$z(k) = Q\bar{z}(k) = Q\begin{bmatrix} \bar{z}_1(k) \\ \bar{z}_2(k) \end{bmatrix} \quad (59)$$

とする．(55)式より，つぎの式が得られる．

$$P\tilde{E}Q\bar{z}(k+1) = PA_sQ\bar{z}(k) + PB_sf(v(k)) + Pd_s(k) \quad (60)$$

すなわち，

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{z}_1(k+1) \\ \bar{z}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{s1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{z}_1(k) \\ \bar{z}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{s1} \\ B_{s2} \end{bmatrix} f(v(k)) + \begin{bmatrix} d_{s1}(k) \\ d_{s2}(k) \end{bmatrix} \quad (61)$$

上式は(62)と(63)式のように書き分けることができる．

$$\bar{z}_1(k+1) = A_{s1}\bar{z}_1(k) + B_{s1}f(v(k)) + d_{s1}(k) \quad (62)$$

$$0 = \bar{z}_2(k) + B_{s2}f(v(k)) + d_{s2}(k) \quad (63)$$

ここで，

$$\bar{z}(k) = \begin{bmatrix} \bar{z}_1(k) \\ \bar{z}_2(k) \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$P\tilde{E}Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$PA_sQ = \begin{bmatrix} A_s1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$PB_s = \begin{bmatrix} B_{s1} \\ B_{s2} \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$Pd_s(k) = \begin{bmatrix} d_{s1}(k) \\ d_{s2}(k) \end{bmatrix} \quad (68)$$

である．$C_sQ = (C_{s1}, C_{s2})$とする，(56)式は下式になる．

$$v(k) = C_sQ\bar{z}(k)$$

$$= \left[\begin{array}{cc} C_{s1} & C_{s2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \bar{z}_1(k) \\ \bar{z}_2(k) \end{array}\right]$$
$$= C_{s1}\bar{z}_1(k) + C_{s2}\bar{z}_2(k) \tag{69}$$

そのとき，

$$v = \psi(C_{s1}\bar{z}_1(k) - C_{s2}d_{s2}(k)) \tag{70}$$

である．(62)式は以下のようになる．

$$\bar{z}_1(k+1) = A_{s1}\bar{z}_1(k)$$
$$+B_{s1}f(\psi(C_{s1}\bar{z}_1(k)$$
$$-C_{s2}d_{s2}(k))) + d_{s1}(k) \tag{71}$$

(58)と(61)式より，

$$|P||z\tilde{E} - A_s||Q| = \alpha_{PQ}|z\tilde{E} - A_s|$$
$$= \alpha_{PQ}\left|\begin{array}{cc} zI - A_{s1} & 0 \\ 0 & -I \end{array}\right|$$
$$= \alpha_I|zI - A_{s1}| \tag{72}$$

が得られる．ここで，α_{PQ}, α_Iは定数である．(58)式の$|z\tilde{E}-A_s|$は安定なシステム行列であるから,A_{s1}も安定なシステム行列であることが分かる．(62)式の$\bar{z}_1(k)$の二次形式は下式にする．

$$V(k) = \bar{z}_1^T(k)P_s\bar{z}_1(k) \tag{73}$$

上式を使って,$\Delta V(k)$を求めれば，つぎのようになる．

$$\Delta V(k) = \bar{z}_1^T(k+1)P_s\bar{z}_1(k+1) - V(k)$$
$$= [A_{s1}\bar{z}_1(k) + B_{s1}f(v(k)) + d_{s1}(k)]^T P_s$$
$$.[A_{s1}\bar{z}_1(k) + B_{s1}f(v(k)) + d_{s1}(k)]$$
$$-V(k) \tag{74}$$

A_sに対して，正定対称の行列Q_sとP_sが存在し，下式のLyapunov方程式がある．

$$A_{s1}^T P_s A_{s1} - P_s = -Q_s \tag{75}$$

$d_{s1}(k)$は有界であることに注意するから．$\Delta V(k)$は，

$$\Delta V(k) \leqq -\bar{z}_1^T(k)Q_s\bar{z}_1(k) + M_1||\bar{z}_1(k)||$$
$$.||f(v(k))|| + M_2||\bar{z}_1(k)|| + \mu_2||f(v(k))||^2$$
$$+M_3||f(v(k))|| + M_4 \tag{76}$$
$$\Delta V(k) \leqq -\mu_1||\bar{z}_1(k)||^2 + M_5||\bar{z}_1(k)||^{1+\gamma} + M_6$$
$$\leqq -\mu_c||\bar{z}_1(k)||^2 + M$$
$$\leqq -\mu_m V(k) + M \tag{77}$$

である．ここで，$0 \leqq \gamma < 1, 0 < \mu_1 < \lambda_{min}(Q_s), \mu_2 > 0, 0 < \mu_m < \mu_c < min(\mu_1, 1)$．$\mu_1, \mu_2, M_i(i = 1 \sim 6), M$は正定数である.したがって，

$$V(k) \leqq V_0 + M/\mu_m \tag{78}$$

である．上式と(70)式より，$\bar{z}_1(k)$は有界であり，(63)式より，$\bar{z}_2(k)$は有界であり，(64)式より，$\bar{z}_(k)$は有界であり，(59)式より，$z(k)$は有界である．以上の議論をまとめて，次の定理が得られる．

定理 1 制御対象は *(76)*と*(77)*式,

$$Ez(k+1) = Az(k) + Bf(v(k))$$
$$+d(k) \tag{79}$$
$$v(k) = Cz(k) + d_0(k) \tag{80}$$

とする系で，$z(k) \in R^n, v(k), d(k) \in R^n$, $d_0(k) \in R^l$, $f(v(k)) \in R^{l_f}$であり，$d(k), d_0(k)$は有界な外乱とし，Aは安定なシステム行列である．次の条件を満足すれば，$z(k)$，$v(k)$は有界である．

$$||f(v(k))|| \leqq \alpha + \beta||v(k)||^\gamma \tag{81}$$

ここで, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $0 \leqq \gamma < 1$である．

5. 数値例

つぎの非線形離散時間系に対して，

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & 0.8 \\ 0 & 0 \end{array}\right] x(k+1) = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -0.2 & 1.2 \end{array}\right] x(k)$$
$$+ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right] u(k) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right] f(v(k))$$
$$+ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right] d(k) \tag{82}$$

$$v(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \tag{83}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix} x(k) + d_0(k) \tag{84}$$

$$f(v(k)) = sin(v(k)) + 1 \tag{85}$$

である．また，追従モデルは以下のものを使用する．

$$x_m(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & 0.6 \end{bmatrix} x_m(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_m(k) \tag{86}$$

$$rm = sin(ik/16) + 2.5 \tag{87}$$

$$y_m(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_m(k) \tag{88}$$

外乱$d(k), d_0(k)$はつぎのようにする．

$$d_0(k) = 0.6(10 \sim 30) \tag{89}$$

$$d(k) = 0.8(50 \sim 80) \tag{90}$$

シミュレーションの応答をFig.1に示す．応答より，$y(k)$は漸近的に$y_m(k)$に収束していることがわかった．

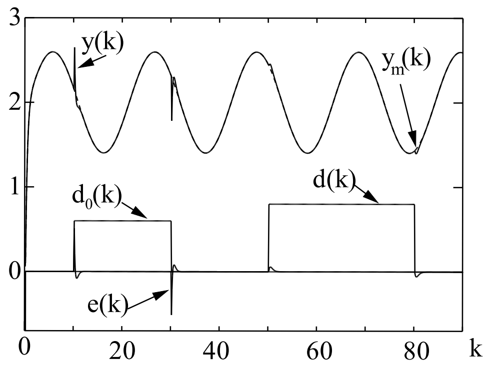

Fig. 1　Responses of nonlinear Discrete Time Descriptor system

6.　おわりに

本稿では離散時間非線形系のモデル追従形制御系の一設計法を示した．数値例を用いて，その有効性を確認した．シフト演算子zを導入し，zに関する多項式行列の簡単な代数演算で制御系が設計できる．制御入力$u(k)$を構成する場合,システムの特性多項式$D(z)$は一般にモニックな多項式ではないため，$T(z)$の最高次数項の係数は$D(z)$のそれと同じでなければならない．また設計するとき，座標変換などを施さないため，システム内の物理変数や定数,物理的な構造を変えることなく自然に$u(k)$を構成することができる．

参考文献

1) 大久保重範：外乱を考慮した非線形系のモデル追従形制御系の設計,計測自動制御学会論文集, Vo1.21,No.8,792/799(1985)

2) 大久保重範：零点の安定配置を使った非線形モデル追従形制御系,計測自動制御学会論文集, Vo1.28,No.8,939/946(1992)

3) 美多勉：ディジタル制御理論，昭晃堂(1984)

4) 安居院，中嶋：ディジタルシステム制御理論，産報(1976)