

多項式形非線形系の厳密線形化による安定化制御

Stabilization Control by the Strict Linearization of Polynomial Form Nonlinear System

○劉 曉剛*, 大久保 重範*, 及川 一美*, 高橋 達也*

○Xiaogang Liu*, Shigenori Okubo*, kazumi oyikawa*, tatsuya takahasi*

*山形大学 工学部

*Faculty of Engineering Yamagata University

キーワード : 多項式形(Polynomial form), 非線形 (Nonlinear), 安定化 (stable),
厳密線形化 (Strict Linearization)

連絡先 : 〒992-8510 山形県米沢市城南四丁目3-16 山形大学 工学部 機械システム工学科 大久保研究室
大久保 重範, Tel.: (0238)26-3245, Fax.: (0238)26-3245, E-mail: sokubo@yz.yamagata-u.ac.jp
劉 曉剛, Tel.: (0238)26-3245, Fax.: (0238)26-3245, E-mail: dkw21429@yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

システム制御を行う時, 制御対象として扱っている状態方程式はほとんどが非線形特性を持っているため, 非線形特性を無視できる場合はよいが, 非線形特性を無視できない場合や非線形特性を考慮して制御したい場合は, まずその非線形系に対して線形化を行う必要がある. 多様体論による厳密線形化は線形化されたシステムを用いて設計されたコントローラで原点近くのみでなく, 状態空間全体での設計を目的とする. 一般的には, 線形独立であるかおよびインボリユティブであるか要素を調べて, 条件を満たす場合のみ, フロベニウス定理により厳密線形化するための座標変換とフィードバックに必要な関数を見つけることができる. しかし, この条件が厳しくて, 必ずしも, その関数を見つけられるとは限らない. 従来の考察ではシステム一般的に扱っていたため, 関数の具体的な形を計算できなかった. 本研究では, 多項式形に限定することにより, 関数を多項式の関数で具体的に計算することが

できる. この点が本研究の創意である. 本研究では制御対象を多項式で記述されたとした場合の厳密線形化による安定化制御について考察する.

2. 多項式形非線形系への適用

従来の一入力非線形系の状態方程式

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, $f(x) \in R^n$, $g(x) \in R^n$ とする.

原点の近傍 V が存在して V 上で可制御線形状態方程式とフィードバック等価であるための必要十分条件

(1)は $\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \dots, ad_f^{n-1} g\}(x)$ がすべての

$x \in V$ において線形独立であり,

(2)は $\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \dots, ad_f^{n-2} g\}(x)$ が V 上でインボリユティブ (Involution) である.

多項式形非線形系の状態方程式

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^N A_{[1,k]} x^{[k]} + bu \quad (2)$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, u は系の入力, $A_{[1,k]} \in R^{n \times n^k}$, $b \in R^n$ とする.

条件(1) $\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \dots, ad_f^{n-1} g\}(x)$ がすべて $x \in V$ において線形独立である条件により

$$\rho(x) = |ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \dots, ad_f^{n-1} g| \neq 0 \quad (3)$$

これを多項式系に使える

$$\rho(x) = |b, \sum_{k=0}^{N-1} A_{[1,k]}^{(1)} x^{[k]}, \dots, \sum_{k=0}^{(n-1)(N-1)} A_{[1,k]}^{(n-1)} x^{[k]}|$$

ただし, $ad_f^0 g = b, ad_f^1 g = \sum_{k=0}^{N-1} A_{[1,k]}^{(1)} x^{[k]}, \dots, ad_f^{n-1} g = \sum_{k=0}^{(n-1)(N-1)} A_{[1,k]}^{(n-1)} x^{[k]}$ である.

$\rho(x)$ の次数は $N_\rho = \frac{1}{2}n(n-1)(N-1)$ となる.

$$\rho(x) = \sum_{k=0}^{N_\rho} \zeta_{[0,k]}^T x^{[k]} \quad (4)$$

$\rho(x) \neq 0$ により, $\rho(x) > 0$, or, $\rho(x) < 0$ となる.

$\bar{\rho}(x) = \zeta_{[0,0]} \rho(x) = \sum_{k=0}^{2M} \bar{\zeta}_{[0,k]}^T x^{[k]}$ と定義すると, $x \in \Omega$ で, $\bar{\rho}(x) > 0$ となる.ただし, $N_\rho = 2M$ とする.即ち, N_ρ が偶数になる場合を考える. N_ρ が偶数になる場合はつぎの三つの場合がある.

(1) $N = 2N_1 + 1$ のとき, $M_1 = n(n-1)N_1$

(2) $N = 2N_1, n = 4n_1$ のとき,

$$M_1 = n_1(4n_1 - 1)(2N_1 - 1)$$

(3) $N = 2N_1, n = 4n_1 + 1$ のとき,

$$M_1 = n_1(4n_1 + 1)(2N_1 - 1)$$

$\bar{\rho}(x) > 0$ は次式のようになる.

$$\bar{\rho}(x) = G^{T[0,M]}(x) P_{G[M,M]} G^{[0,M]}(x) \quad (5)$$

ここで

$$G^{T[0,M]}(x) = [1, x^T, x^{T[2]}, \dots, x^{T[M]}]$$

$$P_{G[M,M]} = \begin{bmatrix} P_{[0,0]} & P_{[0,1]} & & & 0 \\ P_{[0,1]} & P_{[1,1]} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & P_{[M-1,M]} & \\ & & P_{[M-1,M]} & P_{[M,M]} & \end{bmatrix}$$

$$G^{[0,M]}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{[M]} \end{bmatrix}$$

線形独立である条件 $\bar{\rho}(x) > 0, x \in \Omega$ の十分条件

$$P_{G \langle M, M \rangle} > 0 \quad (6)$$

条件(2) $\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \dots, ad_f^{n-2} g\}(x)$ が V 上でインボリュートイブ(Involutive)になる条件により

$$\sigma_{ij}(x) = |ad_f^0 g, ad_f^1 g, \dots, ad_f^{n-2} g, [ad_f^i g, ad_f^j g]| \quad (7)$$

と定義のとき, $0 \leq i < j \leq (n-2), \sigma_{ij}(x) = 0$.

これを多項式系に使える

$$\begin{aligned} [ad_f^i g, ad_f^j g] &= \left(\frac{\partial ad_f^j g}{\partial x^T} \right) ad_f^i g - \left(\frac{\partial ad_f^i g}{\partial x^T} \right) ad_f^j g \\ &= \sum_{k=0}^{(N-1)(i+j)-1} A_{[1,k]}^{(i,j)} x^{[k]} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sigma_{ij}(x) = |b, \sum_{k=0}^{N-1} A_{[1,k]}^{(1)} x^{[k]}, \dots, \sum_{k=0}^{(N-1)(i+j)-1} A_{[1,k]}^{(i,j)} x^{[k]}|$$

$\sigma_{ij}(x)$ の次数

$N_{\rho_{ij}} = (N-1)\{i+j + \frac{(n-2)(n-1)}{2}\} - 1$ となるから,

$$\sigma_{ij}(x) = \sum_{k=0}^{N_{\rho_{ij}}} \zeta_{ij[0,k]}^T x^{[k]} \quad (9)$$

$\sigma_{ij}(x) = 0$ により, 多項式系のインボリュートイブ(Involutive)の十分条件は(9)式の係数がすべて0になることである.よって

$$\zeta_{ij[0,k]}^T = 0 \quad (10)$$

$0 \leq i < j \leq (n-2), 0 \leq k \leq N_{\rho_{ij}}$ となる.

条件(1)線形独立と条件(2)インボリュートイブが成立するとき,フロベニウスの定理により,原点近傍 V と \bar{V} 上で $L_{ad_f^i g} \phi(x) = 0, [i = 0, 1, \dots, (n-2)]$ と $L_{ad_f^{n-1} g} \phi(x) \neq 0$ を満たす c^∞ 関数 $\phi(x)$ が存在する.多項式系は前述の二つの条件を満たし,フロベニウスの定理から,多項式形非線形系の $\phi(x)$ を求める.

$$\left[b, \sum_{k=0}^{N-1} A_{[1,k]}^{(1)} x^{[k]}, \dots, \sum_{k=0}^{(N-1)(n-1)} A_{[1,k]}^{(n-1)} x^{[k]} \right]^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= [b_0(x), b_1(x), \dots, b_{n-1}(x)]^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_0^T(x) \\ \alpha_1^T(x) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T(x) \end{bmatrix} \quad (11)
\end{aligned}$$

とする,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \alpha_0^T(x) \\ \alpha_1^T(x) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T(x) \end{pmatrix} (b_0(x), b_1(x), \dots, b_{n-1}(x)) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_0^T(x)b_0(x), \dots, \alpha_0^T(x)b_{n-1}(x) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T(x)b_0(x), \dots, \alpha_{n-1}^T(x)b_{n-1}(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\alpha_{n-1}^T(x)b_i(x) &= 0, \quad i = 0, \dots, (n-2) \\
\alpha_{n-1}^T(x)b_{n-1}(x) &= 1 \quad (13)
\end{aligned}$$

である. ここで

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^T} = \rho(x) \alpha_{n-1}^T(x) \quad (14)$$

とする,

$$\begin{aligned}
L_{ad_f^i} g \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x^T} ad_f^i g = \rho(x) \alpha_{n-1}^T(x) b_i(x) = 0 \\
L_{ad_f^{n-1}} g \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x^T} ad_f^{n-1} g = \rho(x) \alpha_{n-1}^T(x) b_{n-1}(x) \\
&= \rho(x) \neq 0 \quad (15)
\end{aligned}$$

行列の演算により, 関数 $\phi(x)$ の微分は

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(N-1)} B_{[1,k]}^{(n-1)} x^{[k]} \quad (16)$$

で与えられる. これより, $\phi(x)$ は x の $\{M_0 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)(N-1) + 1\}$ 次の多項式で与えられる.

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{M_0} C_{[0,k]}^{(0)T} x^{[k]} \quad (17)$$

$B_{[1,k]}^{(n-1)}$ と $C_{[0,k]}^{(0)T}$ とにはつぎの関係がある.

$$\begin{aligned}
&x^T \{B^{(n-1)} + \sum_{j=1}^k \{B^{(n-1)}\}^{\sigma_{ij}(i,j)}\} x^{[k]} \\
&= C_{[0,k+1]}^{(0)T} x^{[k+1]} \quad (18)
\end{aligned}$$

$\sigma_{ij}(i,j)$ は共変添子と反変添子の転置である.

多様体論による厳密線形化は, 可制御条件を満たす関数 $\phi(x)$ が存在し, この関数を用いてシステムを線形化する座標変換とフィードバックの一つは

$$\xi = P(x) = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ L_f \phi(x) \\ L_f^2 \phi(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} \phi(x) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = \frac{v - L_f^n \phi(x)}{L_g L_f^{n-1} \phi(x)} \quad (20)$$

で与えられる. これらを用いて非線形化システムは線形化され, 可制御になる.

座標変換の要素

$$L_f \phi(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^T} f = \sum_{k=1}^{M_1} C_{[0,k]}^{(1)T} x^{[k]} \quad (21)$$

である. 一般的な要素

$$L_f^i \phi(x) = \sum_{k=1}^{M_i} C_{[0,k]}^{(i)T} x^{[k]} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
L_f^{i+1} \phi(x) &= \sum_{k=1}^{M_i} C_{[0,k]}^{(i)T} \sum_{r=1}^k (x \otimes \dots \otimes f \otimes \dots \otimes x) \\
&= \sum_{k_1=1}^{M_i+1} C_{[0,k]}^{(i+1)T} x^{[k]} \quad (23)
\end{aligned}$$

$$L_f^{n-1} \phi(x) = \sum_{k=1}^{M_{n-1}} C_{[0,k]}^{(n-1)T} x^{[k]} \quad (24)$$

より, 多項式形非線形系の座標変換は

$$\xi = P(x) = \begin{bmatrix} \phi \\ L_f \phi \\ L_f^2 \phi \\ \vdots \\ L_f^{n-1} \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{M_0} C_{[0,k]}^{(0)T} x^{[k]} \\ \sum_{k=1}^{M_1} C_{[0,k]}^{(1)T} x^{[k]} \\ \sum_{k=1}^{M_2} C_{[0,k]}^{(2)T} x^{[k]} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{M_{n-1}} C_{[0,k]}^{(n-1)T} x^{[k]} \end{bmatrix}$$

なる. 安定化フィードバックの各要素

$$L_f^n \phi(x) = \sum_{k=1}^{M_n} C_{[0,k]}^{(n)T} x^{[k]}$$

$$L_g L_f^{n-1} \phi = \sum_{k=0}^{M_{n-1}-1} b^T C_{f[1,k]} x^{[k]}$$

$$v = - \sum_{k=1}^n \lambda_{k-1} \xi_k = - \sum_{k=1}^n \lambda_{k-1} L_f^{k-1} \phi \quad (25)$$

よって

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 & \cdots & -\lambda_{n-1} \end{bmatrix} \xi \quad (26)$$

に変換され座標 ξ は漸近安定になる.

このとき,安定化フィードバック

$$u = - \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_{k-1} L_f^{k-1} f + L_f^n \phi(x)}{L_g L_f^{n-1} \phi(x)} \quad (27)$$

となる.多項式形への適用すれば,次式になる.

$$u = - \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^{M_{k-1}} \lambda_{k-1} C_{[0,r]}^{(k-1)T} x^{[r]} + \sum_{r=1}^{M_n} C_{[1,r]}^{(n)T} x^{[r]}}{\sum_{k=0}^{M_{n-1}-1} b^T C_{f[1,k]} x^{[k]}} \quad (28)$$

3. マスバネダンパー系

数値例として,複雑なバネに非線形性があるマスバネダンパー系について考える.

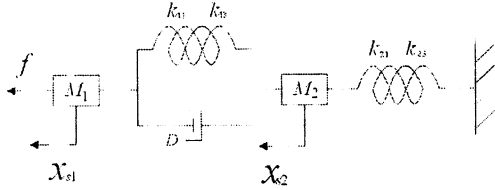


Fig. 1 Mass spring damper system

f :系の入力, M_1, M_2 :質量, D :ダンパー係数,
 K_{11}, K_{21} :バネ係数, K_{13}, K_{23} :非線形要素,
 x_{s1}, x_{s2} :変位.

マスバネダンパー系の運動方程式

$$\ddot{x}_{s1} = \frac{f}{M_1} - \frac{K_{11}}{M_1} (x_{s1} - x_{s2}) - \frac{K_{13}}{M_1} (x_{s1} - x_{s2})^3$$

$$- \frac{D}{M_1} (\ddot{x}_{s1} - \ddot{x}_{s2}) = u$$

$$\ddot{x}_{s2} = \frac{K_{11}}{M_2} (x_{s1} - x_{s2}) + \frac{K_{13}}{M_2} (x_{s1} - x_{s2})^3$$

$$+ \frac{D}{M_2} (\ddot{x}_{s1} - \ddot{x}_{s2}) - \frac{K_{21}}{M_2} x_{s2} - \frac{K_{23}}{M_2} x_{s2}^3$$

整理すると(4変数4次系になる. $n=4, N=3$.)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_3 & -a_4 & -a_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_2 \end{bmatrix} u$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -3a_2 & 3a_2 & -a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_1^2 x_3 \\ x_1 x_3^2 \\ x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (29)$$

定数 $a_1 = K_{11}/M_2, a_2 = K_{13}/M_2, a_3 = D/M_2,$
 $a_4 = (K_{11} + K_{21})/M_2, a_5 = (K_{13} + K_{23})/M_2.$

方程式(1)により,運動方程式(29)の $f(x)$ と b は

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ f_4(x) \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

(30)式の $f_4(x)$ は以下である.

$$f_4(x) = [a_1 + 3a_2 x_3^2] x_1 + a_3 x_2 - [a_4 + a_5 x_3^2] x_3$$

$$- a_3 x_4 + [a_2 - 3a_2 x_3] x_1^3$$

状態方程式(29)の $ad^i f(x)$ を計算すれば

$$ad_f^0 g = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$ad_f^1 g = [f, ad_f^0 g] = [f, b] = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$ad_f^2 g = [f, ad_f^1 g] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \\ \alpha(x) - a_3^2 \end{bmatrix}$$

$$ad_f^3 g = [f, ad_f^2 g] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3^2 - \alpha(x) \\ \beta(x) \end{bmatrix}$$

$$\alpha(x) = a_1 + 3a_2 x_1^2 - 6a_2 x_1 x_3 + 3a_2 x_3^2$$

$$\beta(x) = 6a_2 (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + a_3 [a_1 + a_4 - a_3^2$$

$$+ 6a_2 x_1^2 - 12a_2 x_1 x_3 + 3x_3^2 (a_2 + a_5)]$$

3.1 マスバネダンパー系の線形独立条件を調べる

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \det\{ad_f^0g, ad_f^1g, ad_f^2g, ad_f^3g\} \\ &= \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_3^2 - \alpha(x) \\ 0 & -a_3 & \alpha(x) - a_3^2 & \beta(x) \end{bmatrix} \\ &= [\alpha(x) - 3a_3^2]^2 + a_3\beta(x) \quad (32)\end{aligned}$$

(32)式で, $[\alpha(x) - 3a_3^2]^2 > 0, a_3 > 0$, ですから, $\rho(x) > 0$ の場合は, $\rho(x) > 0$ となる. そのために, $a_2 = K_{13}/M_2 = 0$ (すなわち $K_{13} = 0$) と設定する, $\alpha(x) = a_1, \beta(x) = a_3[a_1 + a_4 - a_3^2 + 3x_3^2(a_2 + a_5)]$, $\rho(x) = (a_1 - a_3^2)^2 + 3a_3^2a_5x_3^2 + a_3^2(a_1 + a_4 - a_3^2)$. ここで, $(a_1 + a_4 - a_3^2) > 0$ (すなわち $2k_{11} + k_{21} > D^2/M_2$) と設定する, $\rho(x) > 0$ となる. 従って, $K_{13} = 0, 2k_{11} + k_{21} > D^2/M_2$ の場合は, $\rho(x) > 0$ となり, マスバネダンパー系は $\{ad_f^0g, ad_f^1g, ad_f^2g, \dots, ad_f^{n-1}g\}(x)$ が線形独立である.

3.2 マスバネダンパー系のインボリュートタイプの条件を調べる

(7)式により $n = 4$ のとき, $0 \leq i < j \leq (n-2) = 2$. 即ち i, j は $(0,1), (0,2), (1,2)$ と組み合わせ.

(7)式の $[ad_f^i, ad_f^j]$ を計算すれば

$$\begin{aligned}[ad_f^0g, ad_f^1g] &= \left(\frac{\partial ad_f^1g}{\partial x^T}\right)ad_f^0g - \left(\frac{\partial ad_f^0g}{\partial x^T}\right)ad_f^1g = 0 \\ [ad_f^0g, ad_f^2g] &= \left(\frac{\partial ad_f^2g}{\partial x^T}\right)ad_f^0g - \left(\frac{\partial ad_f^0g}{\partial x^T}\right)ad_f^2g = 0 \\ [ad_f^1g, ad_f^2g] &= \left(\frac{\partial ad_f^2g}{\partial x^T}\right)ad_f^1g - \left(\frac{\partial ad_f^1g}{\partial x^T}\right)ad_f^2g \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6a_2(x_1 - x_3) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

従って, $\sigma_{ij}(x) (0 \leq i < j \leq 2)$

$$\sigma_{0,1}(x) = |ad_f^0g, ad_f^1g, ad_f^2g, [ad_f^0g, ad_f^1g]|$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & -a_3 & \alpha(x) - a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{0,2}(x) &= |ad_f^0g, ad_f^1g, ad_f^2g, [ad_f^0g, ad_f^2g]| \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & -a_3 & \alpha(x) - a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (34)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2}(x) &= |ad_f^1g, ad_f^2g, ad_f^3g, [ad_f^1g, ad_f^2g]| \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & -a_3 & \alpha(x) - a_3 & -6a_2(x_1 - x_3) \end{vmatrix} \\ &= -6a_2a_3(x_1 - x_3) \\ &= 0 \quad (a_2 = 0 \text{ により}) \quad (35)\end{aligned}$$

(33), (34), (35)式により, マスバネダンパー系はインボリュートタイプ (Involutive) である.

3.3 状態方程式を線形化する座標変換とフィードバックを求める

状態方程式を線形化する座標変換とフィードバックを求めるために, フロベニウス定理を満たす関数 $\phi(x)$ を求める.

$$\begin{aligned}\{ad_f^0g, ad_f^1g, ad_f^2g, ad_f^3g\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_3^2 - \alpha(x) \\ 0 & -a_3 & \alpha(x) - a_3^2 & \beta(x) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_0^T(x) \\ \alpha_1^T(x) \\ \alpha_2^T(x) \\ \alpha_3^T(x) \end{bmatrix} \quad (36)\end{aligned}$$

すると, (12), (14), (15)式の演算により, 関数 $\phi(x)$ の微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x_1} &= -a_3^2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3} &= -a_1 + a_3^2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_4} = a_3, \quad (37)\end{aligned}$$

(37)式を積分すると, 関数 $\phi(x)$ は

$$\phi(x) = -a_3^2x_1 + (a_3^2 - a_1)x_3 + a_3x_4 \quad (38)$$

関数 $\phi(x)$ を用いて状態方程式を線形化する座標変換とフィードバックを求める。座標変換の各要素

$$\begin{aligned} L_f\phi(x) &= \frac{\partial\phi}{\partial x^T}f \\ &= [-a_3^2, 0, a_3^2 - a_1, a_3] \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &= a_1a_3x_1 - a_3a_4x_3 - a_1x_4 - a_3a_5x_3^3 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} L_f^2\phi(x) &= L_f(L_f\phi(x)) = \frac{\partial L_f\phi}{\partial x^T}f \\ &= [a_1a_3, 0, -a_3a_4 - 3a_3a_5x_3^2, -a_1] \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &= -a_1^2x_1 + a_1a_4x_3 + a_1a_5x_3^3 - 3a_3a_5x_3^3x_4 \\ &\quad + a_3(a_1 - a_4)x_4 \\ &= \gamma(x) \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} L_f^3\phi(x) &= L_f(L_f^2\phi(x)) = \frac{\partial L_f^2\phi}{\partial x^T}f \\ &= a_1a_3(a_1 - a_4)x_1 + (a_3^2a_1 - a_3^2a_4 - a_1^2)x_2 \\ &\quad - a_3a_4(a_1 - a_4)x_3 + (4a_3a_4a_5 - a_1a_3a_5)x_3^3 \\ &\quad + 3a_3a_5^2x_3^5 - 3a_1a_3a_5x_1x_3^2 - 3a_3^2a_5x_3^2x_2 \\ &\quad + (3a_1a_5 + 3a_3^2a_5)x_3^2x_4 - 6a_3a_5x_3x_4^2 \\ &\quad + (a_1a_4 - a_1a_3^2 + a_3^2a_4)x_4 \\ &= \delta(x) \end{aligned} \quad (41)$$

式(18), (39), (40), (41)によりシステムの座標変換

$$\xi = P(x) = \begin{bmatrix} -a_3^2x_1 + (a_3^2 - a_1)x_3 + a_3x_4 \\ a_1a_3x_1 - a_3a_4x_3 - a_1x_4 - a_3a_5x_3^3 \\ \gamma(x) \\ \delta(x) \end{bmatrix} \quad (42)$$

$\xi_1 = -a_3^2x_1 + (a_3^2 - a_1)x_3 + a_3x_4$ のとき,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\xi_1}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \\ &= a_1a_3x_1 - a_3a_4x_3 - a_1x_4 - a_3a_5x_3^3 \\ &= \xi_2 \end{aligned} \quad (43)$$

$\xi_2 = a_1a_3x_1 - a_3a_4x_3 - a_1x_4 - a_3a_5x_3^3$ のとき,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \\ &= -a_1^2x_1 + a_1a_4x_3 + a_1a_5x_3^3 - 3a_3a_5x_3^3x_4 \\ &\quad + a_3(a_1 - a_4)x_4 \end{aligned}$$

$$= \gamma(x) = \xi_3 \quad (44)$$

$\xi_3 = \gamma(x)$ のとき,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_3 &= \frac{d\xi_3}{dt} = \frac{\partial\xi_3}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\xi_3}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\xi_3}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \\ &= \delta(x) = \xi_4 \end{aligned} \quad (45)$$

$\xi_4 = \delta(x)$ のとき,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_4 &= \frac{d\xi_4}{dt} = \frac{\partial\xi_4}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\xi_4}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\xi_4}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \\ &= v \end{aligned} \quad (46)$$

演算によって

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (47)$$

に変形された ξ 座標系は状態方程式が線形であることを確認した。

システムの安定化フィードバックの各要素

$$\begin{aligned} L_f^4\phi(x) &= L_f(L_f^3\phi(x)) = \frac{\partial L_f^3\phi}{\partial x^T}f \\ &= [a_1a_3(a_1 - a_4) - 3a_1a_3a_5x_3^2]x_2 - [3a_3a_4 \\ &\quad (a_1 - a_4) + 3(8a_3a_4a_5 - a_1a_3a_5)x_3^2 + 27 \\ &\quad a_3a_5^2x_3 - 18a_1a_3a_5x_1x_3 - 18a_3^2a_5x_2x_3]x_4 \\ &\quad + [6(a_1a_5 + 3a_3^2a_5)x_3 - 6a_3a_5x_4]x_4^2 \\ &= \epsilon(x) \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} L_g L_f^3\phi(x) &= \frac{\partial L_f^3\phi}{\partial x^T}g \\ &= (a_3^2a_1 - a_3^2a_4 - a_1^2) - 3a_3^2a_5x_3^2 \end{aligned} \quad (49)$$

(48), (49)を(19)式に代入し,安定化フィードバック

$$u = \frac{v - \epsilon(x)}{(a_3^2a_1 - a_3^2a_4 - a_1^2) - 3a_3^2a_5x_3^2} \quad (50)$$

(19)式により, $n = 4$ の場合,状態フィードバック(新しい入力 v)は

$$v = -k_0\xi_1 - k_1\xi_2 - k_2\xi_3 - k_3\xi_4 \quad (51)$$

となる。システムが安定ための必要十分条件:

$$s^4 + k_3s^3 + k_2s^2 + k_1s + k_0 = 0 \text{ 特性方程式の根}$$

がすべて負の実数を持つことである。この安定条件により、極配置を与える。 $s_1 = -1, s_2 = -2, s_3 = -3, s_4 = -4$ とする、 $k_0 = 24, k_1 = 50, k_2 = 35, k_3 = 10$ となる。従って

$$v = -24\xi_1 - 50\xi_2 - 35\xi_3 - 10\xi_4 \quad (52)$$

3.4 シミュレーション

システム入力 $v(36)$ と座標系 $\xi(25)$ をシステムの安定化フィードバック u に代入し、初期値を

$$x_1(0) = 0.1, x_2 = -0.2, x_3(0) = 0.3, x_4(0) = 0.5$$

と設定し、シミュレーションを行ってみる。

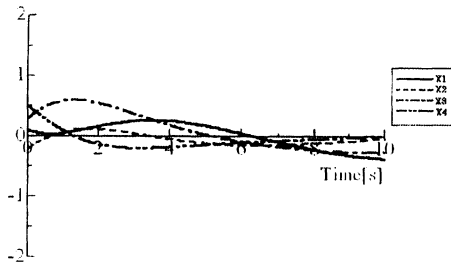


Fig. 2 Dynamics system without control

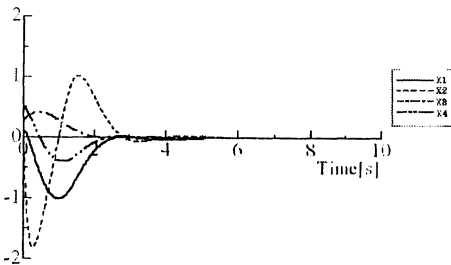


Fig. 3 Dynamics system with control

結果を見ると、システムは漸近的に安定されていく。こうして、本手法により非線形力学系を安定化させることは可能であると考えられる。

4. おわりに

本稿ではテンソルに関する演算を利用し、記述できる非線形システムを制御対象としての多様体論による厳密線形化を通じて、非線形系の安定化を提案した。ポイントは可制御でかつインボリュートタイプである場合のみ、フロベニウスの定理により、座標変換とフィードバックに必要な関数を見付けることである。シミュレーションでは本手法により、非線形系の安定化制御の可能性を示すものである。

参考文献

- 1) 大久保重範: 非線形レギュレータのアルゴリズムによる設計, 計測自動制御学会論文集, Vol.33, No.11, 1072/1080 (1997)
- 2) 荒木光彦(編): 古典制御理論(基礎編), 培風館(2000)
- 3) 大久保重範: 非線形システムのべき状態フィードバックによる直接的な安定化制御, 計測制御学会論文集, Vol.34, No.11, 1596/1602(1998)
- 4) 大久保重範: 非線形レギュレータの構成と遺伝的アルゴリズムによる設計, 第24回制御理論シンポジウム資料, 331/334 (1995)
- 5) 三平満司: 厳密線形化とそのけん引車両の軌道制御への応用, 計測と制御 Vol.31, No.851/858(1992)
- 6) 阪和, 田中: 遺伝的アルゴリズム, 朝倉書店(1995)
- 7) 松下智孝: 遺伝的アルゴリズムによる非線形系の安定化制御, 山形大学卒業論文集(2000)
- 8) 大須賀公一, 足立修一(共編): システム制御へのアプローチ, コロナ社(1998)
- 9) 田中正吾, 山口静馬, 和田憲造, 清水光(編): 制御工学の基礎, 森北出版株式会社(1996)
- 10) 石島辰太郎, 石動善久, 三平満司, 島公脩, 山裕, 渡辺敦(共編): 非線形システム理論, 計測自動制御学会(1993)
- 11) 日本数学会編集: 数学事典第2版, 岩波書店(1968)
- 12) 大久保重範: 高次形式の2次形式変換と正定値判定, 第38回自動制御連合講演会前刷, 169/170(1995)