計測自動制御学会　東北支部　第238回研究集会（2007. 10. 18）
資料番号　238－3

ディスクリプタむだ時間系の状態予測モデル追従形制御

State Predictive Model Following Control for the Descriputor Delay System

○正　秋　山　孝　夫　（山形大）
正　大久保　重　範　（山形大）

Takao Akiyama, Yamagata University, Jonan 4-3-16, Yonezawa
Shigenori Okubo, Yamagata University

In this paper, a design of the state predictive model following control descriptor system with time delays and disturbances is discussed. The design of the control system is constructed using the easy algebraic algorithm of matrices whose elements are polynomials of the three kinds of operators. Boundedness of the inner states for the control system is given and the utility of this control design is guaranteed. It is confirmed on basis of a numerical example that the output signal of the control system asymptotically follows the reference model signal in the case of the existence of disturbances.

キーワード: Time Delay, Model Following Control System, Predictive Control, Descriptor System, Inner State, Boundedness, Disturbance

1. 緒　言

制御対象とする産業システムの中にはむだ時間系がしばしば存在する[1]．制御系にむだ時間が存在すると，目標入力に対する追従性や外乱抑制性の劣化，安定性を損なう等の問題を招くことにもなり，これまでにむだ時間を補償する様々な制御手法が提案されている．スミス法，状態予測制御，部分極配置法，有限極配置法，H^{∞}制御，離散時間化制御，適応制御等は代表的な方法であり，文献(2)にはこれらの制御系設計法が体系化されて記述されている．これらの研究の多くは，レギュレータ問題やサーボ系設計問題，最適制御問題等を扱っているが，著者らが知る限り，むだ時間系のモデル追従形制御系の設計に関する研究は，まだ少なく不十分である．著者らは制御対象の入出力および状態に複数の任意の大きさのむだ時間が存在する場合のモデル追従形制御系の設計方法[3][4]を提案したが，この設計法では状態方程式に現在時刻の入力が存在することが設計の必要条件の一つであり，現在時刻の入力が存在しない場合に対する設計法の構築が課題となっていた．

そこで，本論文では状態方程式に現在時刻の入力が存在しないディスクリプタ形式線形むだ時間系に対する状態予測モデル追従形制御系の設計を考察した．まず，制御対象となるむだ時間系および参照モデルの設定を行い，制御則の詳細な構成手順を示した．さらに，制御系の内部安定性を示し，本設計法の実用性を保証した．最後に，具体的な数値例に基づき，外乱が存在する場合でも制御対象の出力は参照モデルに漸近的に追従することを確認した．

2. 問題の設定

入出力と状態にむだ時間を含む制御対象および参照モデルをそれぞれ次式(1)と(2)で表す．

$$\sum_{i=1}^{k} E^i \dot{x}(t-h_i) = \sum_{i=0}^{k} A^i x(t-h_i) + \sum_{i=1}^{k} B^i u(t-h_i) + d(t) \tag{1a}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{k} C^i x(t-h_i) + d_o(t) \tag{1b}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m r_m(t), \\ y_m(t) &= C_m x_m(t) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ここで，$x(t)\in \mathbf{R}^n$ はディスクリプタ変数，$u(t)\in \mathbf{R}^l$ は制御入力，$y(t)\in \mathbf{R}^l$ は制御対象の出力，$d(t)\in \mathbf{R}^n$，$d_o(t)\in \mathbf{R}^l$ は有界な既知外乱，$h_i\ (0=h_0<h_1<\cdots<h_k)$ はむだ時間，k は正の整数，$x_m(t)\in \mathbf{R}^{n_m}$，$r_m(t)\in \mathbf{R}^{l_m}$，$y_m(t)\in \mathbf{R}^l$ はそれぞれ参照モデルに関する状態変数，参照入力，出力である．E^i，A^i，B^i，C^i，A_m，B_m，C_m はそれぞれ適合する次元の実定数行列であり，$E^i\in \mathbf{R}^{n\times n}\ (i=1,2,\cdots,k)$ は一般に正則行列であるとは限らない．(A_m, B_m) 可制御，(C_m, A_m) 可観測，A_m は安定行列とする．制御対象で利用可能な状態は $y(t)$ のみであり，内部状態は直接入手できないものとする．また，制御対象と参照モデルとの出力誤差 $e(t)$ は次式で与えられる．

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \tag{3}$$

本研究では，初期値関数 $x(t)=x_0(t)\ (t\le 0)$，$u(t)=u_0(t)\ (t<0)$ に対し，$t\to\infty$ で $e(t)\to \mathbf{0}$ にするようなモデル追従形制御系の設計を考える．

3．制御系の設計

式(1)の記述を簡単にするために，次式で定義される形式的な時間遅れ作用素ベクトル σ と $\bar{\sigma}$ を導入する．

$$
\left.\begin{array}{l}
\sigma=[\sigma_0 \quad \sigma_1 \quad \cdots \quad \sigma_k]^T, \\
\left.\begin{array}{l} \sigma_i z(t)=z(t-h_i), \\ \sigma_i=e^{-ph_i} \end{array}\right\} (i=0,1,\cdots,k)
\end{array}\right\} \qquad (4)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\bar{\sigma}=[\bar{\sigma}_1 \quad \bar{\sigma}_2 \quad \cdots \quad \bar{\sigma}_k]^T, \\
\left.\begin{array}{l} \bar{\sigma}_i z(t)=z(t+h_1-h_i)=\bar{z}(t-h_i), \\ \bar{\sigma}_i=e^{p(h_1-h_i)} \end{array}\right\} (i=1,2,\cdots,k)
\end{array}\right\} \qquad (5)
$$

ただし，$\sigma_0=\bar{\sigma}_1=1$ であり，実際のむだ時間作用素は $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k; \bar{\sigma}_2,\bar{\sigma}_3,\cdots,\bar{\sigma}_k$ である．また，信号 $z(t)$ の時間 h_1 経過後の予測・予見信号を $\bar{z}(t)(=z(t+h_1))$ と表すことにする．式（4）と（5）を利用して制御対象のディスクリプタ方程式および出力方程式（1）を書換えれば，次のようになる．

$$
E(\sigma)\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=A(\sigma)\bar{\boldsymbol{x}}(t)+B(\bar{\sigma})\boldsymbol{u}(t)+\bar{\boldsymbol{d}}(t) \qquad (6\ \mathrm{a})
$$

$$
\bar{\boldsymbol{y}}(t)=C(\sigma)\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{d}}_o(t) \qquad (6\ \mathrm{b})
$$

ここで，

$$
\left.\begin{array}{l}
E(\sigma)=\sum_{i=0}^{k}E^i\sigma_i,\ A(\sigma)=\sum_{i=0}^{k}A^i\sigma_i, \\
B(\bar{\sigma})=\sum_{i=1}^{k}B^i\bar{\sigma}_i,\ C(\sigma)=\sum_{i=0}^{k}C^i\sigma_i
\end{array}\right\} \qquad (7)
$$

であり，$\{E(\sigma),A(\sigma),B(\bar{\sigma})\}$ はスペクトル可制御，$\{E(\sigma),C(\sigma),A(\sigma)\}$ スペクトル可観測とし，制御対象（6）の伝達行列 $C(\sigma)\{pE(\sigma)-A(\sigma)\}^{-1}B(\bar{\sigma})$ の不変零点は安定であるものとする．さらに，時間に関する微分作用素を $p(=\mathrm{d}/\mathrm{d}t)$ とし，ディスクリプタ方程式（6 a）に対して，次のような解の一意性を保証するレギュラー条件およびインパルスモードをもたないインパルスフリー条件を仮定する．

$$
\{pE(\sigma)-A(\sigma)\}\neq 0,\ \forall p\in C_z \qquad (8\ \mathrm{a})
$$

$$
\mathrm{rank}E(\sigma)=\deg|pE(\sigma)-A(\sigma)|=r \qquad (8\ \mathrm{b})
$$

ここで，C_z は複素数全体の集合を表し，deg は p についての次数を表す．付録に示すように，ディスクリプタ方程式（1 a）を特異値分解形式に変換することにより得られる内部状態 $\boldsymbol{x}_1(t)\in\mathbf{R}^r$，$\boldsymbol{x}_2(t)\in\mathbf{R}^{n-r}$ と外乱 $\boldsymbol{d}_1(t)\in\mathbf{R}^r$，$\boldsymbol{d}_2(t)\in\mathbf{R}^{n-r}$ を用いて，ディスクリプタ方程式（6 a）の予測信号 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ は，過去から現在までの信号 $\boldsymbol{x}_1(t)$，$\boldsymbol{x}_2(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$，および現在から時間 h_1 経過後までの予見信号 $\boldsymbol{d}_1(t)$，$\boldsymbol{d}_2(t)$ を用いて次のように求められる．

$$
\bar{\boldsymbol{x}}(t)=V\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix},\ V^TV=I \qquad (9\ \mathrm{a})
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)=&\exp(\hat{A}^0h_1)\boldsymbol{x}_1(t)\\
&+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{k}\int_{t-h_1}^{t}\exp\{\hat{A}^0(t-\tau)\}\hat{A}^i_j\bar{\boldsymbol{x}}_j(\tau-h_i)d\tau\\
&-\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{k}\int_{t-h_1}^{t}\exp\{\hat{A}^0(t-\tau)\}\hat{E}^i_j\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_j(\tau-h_i)d\tau \qquad (9\ \mathrm{b})\\
&+\sum_{i=1}^{k}\int_{t-h_1}^{t}\exp\{\hat{A}^0(t-\tau)\}\hat{B}^i\boldsymbol{u}(\tau+h_1-h_i)d\tau\\
&+\int_{t-h_1}^{t}\exp\{\hat{A}^0(t-\tau)\}\{\hat{\bar{\boldsymbol{d}}}_1(\tau)-\hat{\bar{\boldsymbol{d}}}_2(\tau)\}d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)=&-\tilde{A}^0\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)-\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{k}\tilde{A}^i_j\bar{\boldsymbol{x}}_j(t-h_i)\\
&+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{k}\tilde{E}^i_j\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t-h_i)-\sum_{i=1}^{k}\tilde{B}^i\boldsymbol{u}(t+h_1-h_i) \qquad (9\ \mathrm{c})\\
&-\tilde{\bar{\boldsymbol{d}}}_2(t)
\end{aligned}
$$

ここで，V，$\hat{A}^0$，$\hat{A}^i_j$，$\hat{E}^i_j$，$\hat{B}^i$，$\hat{\boldsymbol{d}}_1(t)$，$\hat{\boldsymbol{d}}_2(t)$，$\tilde{A}^0$，$\tilde{A}^i_j$，$\tilde{E}^i_j$，$\tilde{B}^i$，$\tilde{\boldsymbol{d}}_2(t)$ については，付録にその定義を示めす．

また，参照モデルの状態方程式および出力方程式（2）を予測信号を用いて書き換えれば，次式のようになる．

$$
\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_m(t)=A_m\bar{\boldsymbol{x}}_m(t)+B_m\bar{\boldsymbol{r}}_m(t) \qquad (10\ \mathrm{a})
$$

$$
\bar{\boldsymbol{y}}_m(t)=C_m\bar{\boldsymbol{x}}_m(t) \qquad (10\ \mathrm{b})
$$

式（10 a）の $\bar{\boldsymbol{x}}_m(t)$ は現在の信号 $\boldsymbol{x}_m(t)$ と過去から現在までの信号 $\boldsymbol{r}_m(t)$ を用いて次のように求められる．

$$
\bar{\boldsymbol{x}}_m(t)=\exp(A_mh_1)\boldsymbol{x}_m(t)+\int_{t-h_1}^{t}\exp\{A_m(t-\tau)\}B_m\boldsymbol{r}_m(\tau)d\tau \qquad (11)
$$

式（6）と（10）から $\bar{\boldsymbol{y}}(t)$ と $\bar{\boldsymbol{y}}_m(t)$ はそれぞれ次式のように表される．

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{y}}(t)=&C(\sigma)\{pE(\sigma)-A(\sigma)\}^{-1}B(\bar{\sigma})\boldsymbol{u}(t)\\
&+C(\sigma)\{pE(\sigma)-A(\sigma)\}^{-1}\bar{\boldsymbol{d}}(t)+\bar{\boldsymbol{d}}_o(t)
\end{aligned} \qquad (12)
$$

$$
\bar{\boldsymbol{y}}_m(t)=C_m(pI-A_m)^{-1}B_m\bar{\boldsymbol{r}}_m(t) \qquad (13)
$$

式（11）と（12）において

$$
\left.\begin{array}{l}
C(\sigma)\{pE(\sigma)-A(\sigma)\}^{-1}B(\bar{\sigma})=N(\sigma,\bar{\sigma},p)/D(\sigma,p),\\
N(\sigma,\bar{\sigma},p)=C(\sigma)\mathrm{adj}\{pE(\sigma)-A(\sigma)\}B(\bar{\sigma}),\\
D(\sigma,p)=|pE(\sigma)-A(\sigma)|
\end{array}\right\} \qquad (14)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
C_m(pI-A_m)^{-1}B_m=N_m(p)/D_m(p),\\
N_m(p)=C_m\mathrm{adj}(pI-A_m)B_m\in R^{l\times l},\\
D_m(p)=|pI-A_m|
\end{array}\right\} \qquad (15)
$$

とおけば，式（12）と（13）は式（16）と（17）のようになる．ただし，式（14）の $N(\sigma,\bar{\sigma},p)$ の各要素は，明らかに σ，$\bar{\sigma}$（$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k;\bar{\sigma}_2,\bar{\sigma}_3,\cdots,\bar{\sigma}_k$）の多項式を係数とする p に関する多項式となり，これを $N(\sigma,\bar{\sigma},p)\in\mathbf{R}^{l\times l}[\sigma,\bar{\sigma}]$ と表すことにする．また，$D(\sigma,p)$ は σ（$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k$）の多項式を係数とする p に関する多項式となり，$D(\sigma,p)\in\mathbf{R}[\sigma]$ と表す．外乱はまとめて式（18）のようになる．

$$
D(\sigma,p)\bar{\boldsymbol{y}}(t)=N(\sigma,\bar{\sigma},p)\boldsymbol{u}(t)+\bar{\boldsymbol{w}}(t) \qquad (16)
$$

$$
D_m(p)\bar{\boldsymbol{y}}_m(t)=N_m(p)\bar{\boldsymbol{r}}_m(t) \qquad (17)
$$

$$
\bar{\boldsymbol{w}}(t)=C(\sigma)\mathrm{adj}\{pI-A(\sigma)\}\bar{\boldsymbol{d}}(t)+D(\sigma,p)\bar{\boldsymbol{d}}_0(t) \qquad (18)
$$

設計の都合上，$N(\sigma,p)$ と $N_m(p)$ をそれぞれ次式（19）と（20）の形式で表す．

$$
\left.\begin{array}{l}
N(\sigma,\bar{\sigma},p)=\mathrm{diag}(p^{\eta_i})N_r(\sigma,\bar{\sigma})+\tilde{N}(\sigma,\bar{\sigma},p),(i=1,2,\cdots,l)\\
N_r(\sigma,\bar{\sigma})=\bar{N}_r(\sigma,\bar{\sigma})+\hat{N}_r\in\mathbf{R}^{l\times l}[\sigma,\bar{\sigma}],
\end{array}\right\} \qquad (19)
$$

$$
N_m(p)=\mathrm{diag}(p^{\eta_{m_i}})N_{m_r}+\tilde{N}_m(p),\ (i=1,2,\cdots,l) \qquad (20)
$$

ここで，η_i は $N(\sigma,\bar{\sigma},p)$ の各行の p に関する次数（最高次数）を表し，η_{m_i} は $N_m(p)$ の各行の次数（最高次数）

である．また，$\partial_{r_i}\tilde{N}(\sigma,\bar{\sigma},p)<\eta_i$，$\partial_{r_i}\tilde{N}_m(p)<\eta_{m_i}$（$\partial_{r_i}(\bullet)$ は $(\bullet)$ の各行の p に関する多項式の次数を表す）である．$N_r(\sigma,\bar{\sigma})$ は σ，$\bar{\sigma}$ に関する多項式を要素とする行列となり，$\underline{\partial}_{\sigma,\bar{\sigma}}\bar{N}_r(\sigma,\bar{\sigma})\geq 1$（$\underline{\partial}_{\sigma,\bar{\sigma}}(\bullet)$ は $(\bullet)$ の $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k;\bar{\sigma}_2,\bar{\sigma}_3,\cdots,\bar{\sigma}_k$ に関する多項式の最低次数を表す）である．$\hat{N}_r$ は $l\times l$ の定数行列であり，$|\hat{N}_r|\neq 0$ であるとする．$|\hat{N}_r|\neq 0$ であるためには，$B^1\neq O$ であることが必要である．また，外乱 $\boldsymbol{d}(t)$，$\boldsymbol{d}_o(t)$ は

$$\left.\begin{aligned}&D_d(p)\boldsymbol{d}(t)=\boldsymbol{0}, D_d(p)\boldsymbol{d}_o(t)=\boldsymbol{0},\\&\partial D_d(p)=n_d\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

を満たすものとする．$D_d(p)$ は既知のモニックな多項式であり，外乱のモードを与える．従って，$\bar{\boldsymbol{w}}(t)$ は次式を満足する．

$$D_d(p)\bar{\boldsymbol{w}}(t)=\boldsymbol{0}\tag{22}$$

次に，以下の条件

①p についての次数は次式

$$\rho\geq n_d+2r-n_{m_i}-1-\eta_i,\ \forall i=1,2,\cdots,l$$

を満たす ρ 次

②最高次数項の係数は $D(\sigma,p)$ における p についての最高次数項の係数と同じ

③最高次数項以外の各項の係数は σ を含まない実定数

を満足する安定な多項式 $T(\sigma,p)\in\mathbf{R}[\sigma]$ を選び，次式より多項式 $R(\sigma,p)\in\mathbf{R}[\sigma]$ と $S(\sigma,p)\in\mathbf{R}[\sigma]$ を求める．

$$T(\sigma,p)D_m(p)=D_d(p)D(\sigma,p)R(\sigma,p)+S(\sigma,p)\tag{23}$$

ここで，各多項式の p に関する次数は $\partial T(\sigma,p)=\rho$，$\partial D_m(p)=n_m$，$\partial D_d(p)=n_d$，$\partial D(\sigma,p)=r$，$\partial R(\sigma,p)=\rho+n_m-n_d-r$，$\partial S(\sigma,p)\leq n_d+r-1$ である

式(3)と(23)および(17)を考慮すれば，$\bar{e}(t)$ は次のように求められる．

$$\begin{aligned}T(\sigma,p)D_m(p)\bar{e}(t)=&D_d(p)D(\sigma,p)R(\sigma,p)\bar{\boldsymbol{y}}(t)\\&+S(\sigma,p)\bar{\boldsymbol{y}}(t)-T(\sigma,p)N_m(p)\bar{\boldsymbol{r}}_m(t)\end{aligned}\tag{24}$$

さらに，式(15)と(22)および(19)を利用すれば，$\bar{\boldsymbol{e}}(t)$ は次のように記述される．

$$\begin{aligned}T(\sigma,p)D_m(p)\bar{e}(t)=&\{D_d(p)R(\sigma,p)N(\sigma,\bar{\sigma},p)\\&-Q(p)N_r(\sigma,\bar{\sigma})\}\boldsymbol{u}(t)+Q(p)\{\bar{N}_r(\sigma,\bar{\sigma})+\hat{N}_r\}\boldsymbol{u}(t)\\&+S(\sigma,p)\bar{\boldsymbol{y}}(t)-T(\sigma,p)N_m(p)\bar{\boldsymbol{r}}_m(t)\end{aligned}\tag{25}$$

ここで，$Q(p)$ は $|Q(p)|$ が安定多項式であるような多項式行列であり，次式のように表す．

$$Q(p)=\mathrm{diag}(p^{\rho+n_m-r+\eta_i})+\tilde{Q}(p),\ (i=1,2,\cdots,l)\tag{26}$$

ただし，$\partial_{r_i}\tilde{Q}(p)<\rho+n_m-r+\eta_i$ である．式(25)において $T(p)D_m(p)\bar{e}(t)=\boldsymbol{0}$ となるように式(25)の右辺を $\boldsymbol{0}$ と置けば，$|\hat{N}_r|\neq 0$ に注意して $\boldsymbol{u}(t)$ は次式のように求められる．

$$\begin{aligned}u(t)=&-\hat{N}_r^{-1}\bar{N}_r(\sigma,\bar{\sigma})u(t)-\hat{N}_r^{-1}Q(p)^{-1}\\&\cdot\{D_d(p)R(\sigma,p)N(\sigma,\bar{\sigma},p)-Q(p)N_r(\sigma,\bar{\sigma})\}\boldsymbol{u}(t)\\&-\hat{N}_r^{-1}Q(p)^{-1}S(\sigma,p)\bar{\boldsymbol{y}}(t)\\&+\hat{N}_r^{-1}Q(p)^{-1}T(\sigma,p)N_m(p)\bar{\boldsymbol{r}}_m(t)\end{aligned}\tag{27}$$

式(27)の各行列要素の分数式がプロパーであるためには，次の条件 ①$\rho\geq n_d+2r-n_m-1-\eta_i(i=1,2,\cdots,l)$，②$n_m-\eta_{m_i}\geq r-\eta_i(i=1,2,\cdots,l)$ を満足しなければならない．

さらに，次の関係式

$$\left.\begin{aligned}&\hat{N}_r^{-1}\bar{N}_r(\sigma,\bar{\sigma})=J_0(\sigma,\bar{\sigma}),\\&\hat{N}_r^{-1}Q(p)^{-1}\{D_d(p)R(\sigma,p)N(\sigma,\bar{\sigma},p)-Q(p)N_r(\sigma,\bar{\sigma})\}\\&\quad=H_1(\sigma,\bar{\sigma})(pI-F_1)^{-1}G_1,\\&\hat{N}_r^{-1}Q(p)^{-1}S(\sigma,p)\\&\quad=J_2(\sigma)+H_2(\sigma)(pI-F_2)^{-1}G_2,\\&\hat{N}_r^{-1}Q(p)^{-1}T(\sigma,p)N_m(p)\\&\quad=J_3(\sigma)+H_3(\sigma)(pI-F_3)^{-1}G_3,\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\xi}_1(t)=F_1\xi_1(t)+G_1\boldsymbol{u}(t),\\&\dot{\xi}_2(t)=F_2\xi_2(t)+G_2\bar{\boldsymbol{y}}(t),\\&\dot{\xi}_3(t)=F_3\xi_3(t)+G_3\bar{\boldsymbol{r}}_m(t)\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

$$|pI-F_i|=|Q(p)|,\ (i=1,2,3)\tag{30}$$

を利用すれば，式(27)は状態変数フィルタの出力 $\xi_1(t)$ $(i=1,2,3)$ を用いて次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(t)=&-J_0(\sigma,\bar{\sigma})\boldsymbol{u}(t)-H_1(\sigma,\bar{\sigma})\xi_1(t)-J_2(\sigma)\bar{\boldsymbol{y}}(t)\\&-H_2(\sigma)\xi_2(t)+\bar{\boldsymbol{u}}_m(t)\end{aligned}\tag{31}$$

ここで，外生信号 $\bar{\boldsymbol{u}}_m(t)$ は

$$\bar{\boldsymbol{u}}_m(t)=J_3(\sigma)\bar{\boldsymbol{r}}_m(t)+H_3(\sigma)\xi_3(t)\tag{32}$$

であり，(F_i,G_i) $(i=1,2,3)$ は可制御実現であるとする．式(28)において，$N_r(\sigma,\bar{\sigma})\in\mathbf{R}^{l\times l}[\sigma,\bar{\sigma}]$，$\bar{N}_r(\sigma,\bar{\sigma})\in\mathbf{R}^{l\times l}[\sigma,\bar{\sigma}]$，$R(\sigma,p)\in\mathbf{R}[\sigma]$，$S(\sigma,p)\in\mathbf{R}[\sigma]$ を考慮すれば，$J_0(\sigma,\bar{\sigma})$ と $H_1(\sigma,\bar{\sigma})$ は σ，$\bar{\sigma}$ の多項式を要素とする定数行列であり，$J_2(\sigma)$ と $H_2(\sigma)$ は σ の多項式を要素とする定数行列となることは明らかである．また，$\underline{\partial}_{\sigma,\bar{\sigma}}J_0(\sigma,\bar{\sigma})\geq 1$ であり，式(31)の右辺は過去の入力信号 $\boldsymbol{u}(t)$，過去から現在までの状態変数フィルタの出力 $\xi_i(t)$ $(i=1,2)$ および予測出力信号 $\bar{\boldsymbol{y}}(t)$，予測外生信号 $\bar{\boldsymbol{u}}_m(t)$ で構成されている．式(31)の $\boldsymbol{u}(t)$ は $\bar{e}(t)\to\boldsymbol{0}$ $(t\to\infty)$ すなわち $e(t)\to\boldsymbol{0}$ $(t\to\infty)$ を満足するから，制御系を構成する内部状態が有界であれば，モデル追従形制御系が実現できる．

4．内部状態の安定性の解析

制御系に対して外部から入る信号は参照入力 $\boldsymbol{r}_m(t)$ と外乱 $\boldsymbol{d}(t)$，$\boldsymbol{d}_o(t)$ であるが，これらはすべて有界であるものとする．外乱の特性多項式 $D_d(p)$ は一般に複素閉右半平面に根を有するが，式(21)は時間の有限区間で成立するものであり，$\boldsymbol{d}(t)$ と $\boldsymbol{d}_o(t)$ は有界とする．すなわち，$\bar{d}(t)$ と $\bar{d}_o(t)$ も有界とする．制御系全体の挙動をまとめると次のようになる．

$$\left.\begin{array}{l}E(\sigma)\dot{\bar{x}}(t)=A(\sigma)\bar{x}(t)+B(\bar{\sigma})\boldsymbol{u}(t)+\bar{\boldsymbol{d}}(t),\\ \dot{\xi}_1(t)=F_1\xi_1(t)+G_1\boldsymbol{u}(t),\\ \dot{\xi}_2(t)=F_2\xi_2(t)+G_2\bar{\boldsymbol{y}}(t),\\ \dot{\xi}_3(t)=F_3\xi_3(t)+G_3\bar{\boldsymbol{r}}_m(t),\\ \boldsymbol{u}(t)=-J_0(\sigma,\bar{\sigma})\boldsymbol{u}(t)-H_1(\sigma,\bar{\sigma})\xi_1(t)-J_2(\sigma)\bar{\boldsymbol{y}}(t)\\ \quad -H_2(\sigma)\xi_2(t)+\bar{\boldsymbol{u}}_m(t),\\ \bar{\boldsymbol{u}}_m(t)=J_3(\sigma)\bar{\boldsymbol{r}}_m(t)+H_3(\sigma)\xi_3(t),\\ \bar{\boldsymbol{y}}(t)=C(\sigma)\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{d}}_o(t),\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_m(t)=A_m\bar{\boldsymbol{x}}_m(t)+B_m\bar{\boldsymbol{r}}_m(t),\\ \bar{\boldsymbol{y}}_m(t)=C_m\bar{\boldsymbol{x}}_m(t)\end{array}\right\}\quad(33)$$

式(33)において，$|Ip-F_3|=|Q(p)|$が安定な多項式であり，かつ$\bar{\boldsymbol{r}}_m(t)$が有界であるため，$\xi_3(t)$は有界となる．また，初期値関数 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0(t)\ (t\le 0)$， $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}_0(t)\ (t<0)$，$\xi_i(t)=\xi_i^{\,0}(t)\ (t\le 0)\ (i=1,2)$は有界とする．参照モデルの状態変数$\boldsymbol{x}_m(t)$は有界であるから$\bar{\boldsymbol{x}}_m(t)$も有界となる．式(33)から$\bar{\boldsymbol{y}}(t)$を消去するとともに$z_s(t)^T=\left[\bar{x}(t)^T\quad \xi_1(t)^T\quad \xi_2(t)^T\quad u(t)^T\right]$とおいて有界性の解析に必要な部分をまとめれば，次式を得る．

$$E_s(\sigma)\dot{z}_s(t)=A_s(\sigma,\bar{\sigma})z_s(t)+\bar{\boldsymbol{d}}_s(t)\quad(34)$$

ここで，

$$\left.\begin{array}{l}E_s(\sigma)=\begin{bmatrix}E(\sigma)&O&O&O\\O&I&O&O\\O&O&I&O\\O&O&O&O\end{bmatrix},\\ A_s(\sigma,\bar{\sigma})=\\ \begin{bmatrix}\{A(\sigma)-B(\bar{\sigma})J_2(\sigma)C(\sigma)\}&-B(\bar{\sigma})H_1(\sigma,\bar{\sigma})\\ -G_1J_2(\sigma)C(\sigma)&\{F_1-G_1H_1(\sigma,\bar{\sigma})\}\\ G_2C(\sigma)&O\\ -J_2(\sigma)C(\sigma)&-H_1(\sigma,\bar{\sigma})\end{bmatrix.\\ \quad\begin{matrix}-B(\bar{\sigma})H_2(\sigma)&-B(\bar{\sigma})J_0(\sigma,\bar{\sigma})\\ -G_1H_2(\sigma)&-G_1J_0(\sigma,\bar{\sigma})\\ F_2&O\\ -H_2(\sigma)&-\{I+J_0(\sigma,\bar{\sigma})\}\end{matrix}\Bigg],\\ \bar{\boldsymbol{d}}_s(t)=\\ \begin{bmatrix}B(\bar{\sigma})\\G_1\\O\\I\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{u}}_m(t)+\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}(t)-B(\bar{\sigma})J_2(\sigma)\bar{\boldsymbol{d}}_o(t)\\-G_1J_2(\sigma)\bar{\boldsymbol{d}}_o(t)\\G_2\bar{\boldsymbol{d}}_o(t)\\-J_2(\sigma)\bar{\boldsymbol{d}}_o(t)\end{bmatrix}\end{array}\right\}\quad(35)$$

式(34)の安定性を論ずるために，特性多項式$|pE_s(\sigma)-A_s(\sigma,\bar{\sigma})|$を計算すれば，次のようになる．

$$|pE_s(\sigma)-A_s(\sigma,\bar{\sigma})|$$
$$=T(\sigma,p)^l D_m(p)^l|Q(p)|\frac{|\hat{N}_r|^{-1}|N(\sigma,\bar{\sigma},p)|}{D(\sigma,p)^{l-1}}\quad(36)$$

さらに，伝達行列$C(\sigma)\{pE(\sigma)-A(\sigma)\}^{-1}B(\bar{\sigma})$の不変零点多項式を$V(\sigma,\bar{\sigma},p)\ (\in\mathbf{R}[\sigma,\bar{\sigma}])$とおけば，

$$|N(\sigma,\bar{\sigma},p)|=D(\sigma,p)^{l-1}V(\sigma,\bar{\sigma},p)\quad(37)$$

となることから，式(36)は次式のようになる．

$$|pE_s(\sigma)-A_s(\sigma,\bar{\sigma})|$$
$$=|\hat{N}_r|^{-1}T(\sigma,p)^l D_m(p)^l|Q(p)|V(\sigma,\bar{\sigma},p)\quad(38)$$

式(38)右辺の各pに関する多項式は恒等的にゼロとはならないため

$$|pE_s(\sigma)-A_s(\sigma,\bar{\sigma})|\neq 0,\ \forall p\in C_z\quad(39)$$

となって解の一意性を保証するレギュラー条件は満足されている．さらに，式(35)の$E_s(\sigma)$の階数および式(38)のpに関する多項式としての次数を求めれば，

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}E_s(\sigma)&=\deg|pE_s(\sigma)-A_s(\sigma,\bar{\sigma})|\\&=r+2(\rho+n_m-r)l+2\sum_{i=1}^{l}\eta_i\end{aligned}\quad(40)$$

を満足することから$z_s(t)$は指数モードのみで表されることがわかる．そこで，式(38)において$T(\sigma,p)$，$D_m(p)$，$|Q(p)|$は安定多項式であり，$V(\sigma,\bar{\sigma},p)$が安定ならば，$A_s(\sigma,\bar{\sigma})$は安定なシステム行列となる．よって，$z_s(t)$の有界性が証明された．一般に，$V(\sigma,\bar{\sigma},p)$の安定判別はナイキストの安定判別法，ルーシェの定理，極配置等を利用する．

5．数 値 例

数値例として，次のようなむだ時間$h_1=1$，$h_2=1.5$，$h_3=2.3$を含むシステムに対してモデル追従形制御系を設計する．

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\dot{x}(t)+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\dot{x}(t-h_2)$$
$$=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-30&-11&-1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t-h_1)+\begin{bmatrix}0\\d(t)\\d(t)\end{bmatrix}\quad(41\text{a})$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}2&1&0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}x(t-h_3)+d_o(t)\quad(41\text{b})$$

あるいは，

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2+\sigma_2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\dot{\bar{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-30&-11&-1\end{bmatrix}\bar{x}(t)$$
$$+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0\\\bar{d}(t)\\\bar{d}(t)\end{bmatrix}\quad(42\text{a})$$

$$\bar{y}(t)=\begin{bmatrix}2+\sigma_3&1&0\end{bmatrix}\bar{x}(t)+\bar{d}_0(t)\quad(42\text{b})$$

を制御対象とする．初期値関数は

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{x}_0(t)=\begin{bmatrix}0.1&0.5&0.5\end{bmatrix}^T\ (t\le 0),\\ u_0(t)=0\ (t<0),\\ \xi_i^{\,0}(t)=\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}^T(i=1,2)\ (t\le 0)\end{array}\right\}\quad(43)$$

である．外乱はステップ外乱で，

$$d(t)=0.9\ (6\le t\le 11),\ d_o(t)=0.7\ (17\le t\le 23)\quad(44)$$

とする．また，参照モデルは

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}_m(t)=\begin{bmatrix}0&1\\-6&-5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_m(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}r_m(t),\\ y_m(t)=\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_m(t)\end{array}\right\}\quad(45)$$

あるいは，

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\bar{x}}_m(t)=\begin{bmatrix}0&1\\-6&-5\end{bmatrix}\bar{x}_m(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\bar{r}_m(t),\\ \bar{y}_m(t)=\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}\bar{x}_m(t)\end{array}\right\}\quad(46)$$

であり，参照入力は

$$r_m(t)=\begin{cases}0 & (-h_1\le t<0)\\ 4sin0.5t+8 & (t\ge 0)\end{cases} \qquad (47)$$

である．初期値は

$$\boldsymbol{x}_m(0)=\xi_3(0)=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T \qquad (48)$$

とする．この例では，$T(\sigma,p)=(2+\sigma_2)p+5$，$Q(p)=(p+6)^2$ と選ぶとともに，$V(\sigma,\bar{\sigma},p)=p+2+\sigma_3$ となり，いずれの多項式も安定である．制御入力は次式のように求められる．

$$\left.\begin{aligned}u(t)&=\begin{bmatrix}36 & 10-\sigma_3\end{bmatrix}\xi_1(t)-(4+5\sigma_2)\bar{y}(t)\\&\quad+\begin{bmatrix}114+180\sigma_2 & 41+54\sigma_2\end{bmatrix}\xi_2(t)+\bar{u}_m(t),\\ \bar{u}_m(t)&=(2+\sigma_2)\bar{r}_m(t)-\begin{bmatrix}62+36\sigma_2 & 15+10\sigma_2\end{bmatrix}\xi_3(t)\end{aligned}\right\}(48)$$

あるいは，

$$\left.\begin{aligned}u(t)&=\begin{bmatrix}36 & 10\end{bmatrix}\xi_1(t)-\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\xi_1(t-h_3)-4\bar{y}(t)\\&\quad-5\bar{y}(t-h_2)+\begin{bmatrix}114 & 41\end{bmatrix}\xi_2(t)\\&\quad+\begin{bmatrix}180 & 54\end{bmatrix}\xi_2(t-h_2)+\bar{u}_m(t),\\ \bar{u}_m(t)&=2\bar{r}_m(t)+\bar{r}_m(t-h_2)-\begin{bmatrix}62 & 15\end{bmatrix}\xi_3(t)\\&\quad-\begin{bmatrix}36 & 10\end{bmatrix}\xi_3(t-h_2)\end{aligned}\right\}\qquad(49)$$

6．結　言

本稿では，状態方程式に現在時刻の入力が存在せず，入出力および状態に複数の任意の大きさのむだ時間が含まれるディスクリプタ形式線形系に対してモデル追従形制御系の設計法を提案した．さらに，具体的な数値例に本設計法を適用し，制御入力を求めるとともに外乱が入った場合でも制御対象の出力が参照モデルの出力に漸近的に追従することを数値シミュレーションでも確認した．本方法では，むだ時間に対応する時間遅れ作用素ベクトルσ，$\bar{\sigma}$および時間に関する微分作用素pを導入し，σ，$\bar{\sigma}$およびpに関する多項式行列の簡単な代数演算で制御系が設計できる．本稿の設計方法は，制御対象に含まれるむだ時間の数と大きさを任意としていること，外乱の影響を除去できる機能を有すること，内部状態の有界性が保証されること，設計計算が簡単であること等の優れた特徴を持っている．

付　録

ディスクリプタ方程式（１ａ）を特異値分解形式に変換する．E^0を直交行列$U,V\in R^n$ （$U^TU=V^TV=I$）を用いて特異値分解すれば，

$$E^0=U\begin{bmatrix}E_{11}^0 & O\\ O & O\end{bmatrix}V^T,\ E_{11}^0=\mathrm{diag}(s_1,s_2,\cdots,s_r),\quad(\text{Ａ１})$$

となる．ここで，$s_i\ (s_1\ge s_2\ge\cdots\ge s_r>0)$ はE^0の特異値である．U，Vを用いてE^i，A^i，B^i，$x(t)$，$d(t)$を次のように区分けする．

$$\left.\begin{aligned}U^TE^iV&=\begin{bmatrix}E_{11}^i & E_{12}^i\\ E_{21}^i & E_{22}^i\end{bmatrix}\ (i=1,2,\cdots,k),\\ U^TA^iV&=\begin{bmatrix}A_{11}^i & A_{12}^i\\ A_{21}^i & A_{22}^i\end{bmatrix}\ (i=0,1,\cdots,k),\\ U^TB^i&=\begin{bmatrix}B_1^i\\ B_2^i\end{bmatrix}\ (i=1,2,\cdots,k)\end{aligned}\right\}\qquad(\text{Ａ２ａ})$$

$$V^T\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix},\ U^T\boldsymbol{d}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_1(t)\\ \boldsymbol{d}_2(t)\end{bmatrix}\qquad(\text{Ａ２ｂ})$$

ここで，$x_1(t),d_1(t)\in\mathbf{R}^r$，$x_2(t),d_2(t)\in\mathbf{R}^{n-r}$ であり，式(Ａ２ａ)の各ブロック行列はそれぞれ適合する次元を有する．式(Ａ１)，(Ａ２)を用いて式(１ａ)を特異値分解形式に変換すれば，

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)&=\hat{A}^0\boldsymbol{x}_1(t)+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{k}\hat{A}_j^i\boldsymbol{x}_j(t-h_i)\\&\quad-\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{k}\hat{E}_j^i\dot{\boldsymbol{x}}_j(t-h_i)+\sum_{i=1}^{k}\hat{B}^i\boldsymbol{u}(t-h_i)\\&\quad+\hat{\boldsymbol{d}}_1(t)-\hat{\boldsymbol{d}}_2(t),\\ \boldsymbol{x}_2(t)&=-\tilde{A}^0\boldsymbol{x}_1(t)-\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{k}\tilde{A}_j^i\boldsymbol{x}_j(t-h_i)\\&\quad+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{k}\tilde{E}_j^i\dot{\boldsymbol{x}}_j(t-h_i)-\sum_{i=1}^{k}\tilde{B}^i\boldsymbol{u}(t-h_i)\\&\quad-\tilde{\boldsymbol{d}}_2(t)\end{aligned}\right\}\qquad(\text{Ａ３})$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned}\hat{A}^0&=(E_{11}^0)^{-1}\{A_{11}^0-A_{12}^0(A_{22}^0)^{-1}A_{21}^0\},\\ \hat{A}_j^i&=(E_{11}^0)^{-1}\{A_{1j}^i-A_{12}^0(A_{22}^0)^{-1}A_{2j}^i\},\\ \hat{E}_j^i&=(E_{11}^0)^{-1}\{E_{1j}^i-A_{12}^0(A_{22}^0)^{-1}E_{2j}^i\},\\ \hat{B}^i&=(E_{11}^0)^{-1}\{B_1^i-A_{12}^0(A_{22}^0)^{-1}B_2^i\},\\&\qquad(i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2),\\ \hat{\boldsymbol{d}}_1(t)&=(E_{11}^0)^{-1}\boldsymbol{d}_1(t),\\ \hat{\boldsymbol{d}}_2(t)&=(E_{11}^0)^{-1}A_{12}^0(A_{22}^0)^{-1}\boldsymbol{d}_2(t)\end{aligned}\right\}\qquad(\text{Ａ４ａ})$$

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{A}^0=(A_{22}^0)^{-1}A_{21}^0,\quad \tilde{A}_j^i=(A_{22}^0)^{-1}A_{2j}^i,\\ &\tilde{E}_j^i=(A_{22}^0)^{-1}E_{2j}^i,\quad \tilde{B}^i=(A_{22}^0)^{-1}B_2^i,\\ &\qquad(i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2),\\ &\tilde{\boldsymbol{d}}_2(t)=(A_{22}^0)^{-1}\boldsymbol{d}_2(t)\end{aligned}\right\}\qquad(\text{Ａ４ｂ})$$

文　献

（１）　野坂 康雄：「産業システム制御」，計測自動制御学会（1994）

（２）　渡部 慶二：「むだ時間システムの制御」，計測自動制御学会（1993）

（３）　秋山・服部・大久保：「むだ時間を含む系に関するモデル追従形制御系の設計」，電気学会論文誌，Vol.118-C，No.4，pp.497-502（1998）

（４）　服部・秋山・大久保：「線形むだ時間系に関するモデル追従形制御系の設計」，計測自動制御学会東北支部第170回研究集会，資料番号 170－20 (1997)