計測自動制御学会東北支部　第242回研究会（2008.5.13）
資料番号242-4

LMIアプローチによる離散時間CNF制御則の設計

Discrete-Time Composite Nonlinear Feedback Control Design via LMI Approrch

○齋藤正志，佐藤淳

○ Masashi Saito, Atushi Satoh

岩手大学

Iwate University

キーワード: 離散時間システム (Discrete-time system), 入力飽和 (Input saturation) LMI (Linear Matrix Inequality), CNF (Composite Nonlinear Feedback)

連絡先 〒020-8551　岩手県盛岡市上田4-3-5 岩手大学大学院 工学研究科 機械工学専攻　佐藤研究室
Tel.: 019-621-6404，E-mail: t3408017@iwate-u.ac.jp

1　はじめに

通常フィードバック制御系の設計において求められることはロバスト安定性と制御性能の向上である．例えばハードディスクドライブのサーボ機構では磁気ヘッドのあるアームの先端を目標トラックまで移動させると同時に，アームの不確かな高次モードに対するスピルオーバ現象を引き起こさないような設計が求められる．しかし，これら2つの性能にはトレードオフが存在し，単一の制御器を用いるかぎり両者を同時に向上することは一般的に困難である．

そのため参考文献[1]では2自由度制御の一種であるCNF（Composite Nonlinear Feedback）制御が提案されている．これは時不変な線形フィードバックと時変な非線形フィードバックを組み合わせた制御である点に特徴がある．前者は主に安定性を含む定常性能を，後者は条件付フィードバック構造により主に速応性を含む過渡性能を向上させるよう設計される．CNF制御は入力飽和のある拘束システムにも適用可能である．

CNF制御は上に挙げた優れた特徴を持つものの，既存の設計手法ではゲインの設計に試行錯誤が必要であった．そこで本研究ではLMI（線形行列不等式）に基づく数値最適化アプローチを用いることで，試行錯誤なく所望のフィードバックゲインを設計する手法を提案する．

2　問題設定

本研究では制御対象として次の離散時間システムを考える．

$$\begin{cases} x[i+1] = Ax[i] + Bsat(u[i]) \\ y[i] = Cx[i] \end{cases} \tag{1}$$

ただし $x \in \mathcal{R}^n, u \in \mathcal{R}, y \in \mathcal{R}$ であり，それぞれ状態，制御入力，制御出力である．また A，B，C は適切な次元の実定数行列とする．関数 $sat(\cdot)$

はアクチュエータの飽和を表す非線形関数で，与えられた入力飽和レベル $u_{max} > 0$ について次式で定義される．

$$sat(u[i]) = sgn(u[i])min(u_{max}, |u[i]|) \quad (2)$$

本研究では定数参照入力に対するサーボ系の設計問題について考える．

また次のような仮定をおく．1) (A, B) は可安定．2) $C(zI - A)^{-1}B$ が $z = 1$ にゼロ点を持たない．

3 離散時間 CNF 制御則

3.1 制御則の構造

Chen et al.[1] は状態フィードバックのほかオブザーバを用いた出力フィードバックへの拡張を示しているが，本研究では簡単のため状態フィードバックの場合のみについて考える．

まず，線形フィードバック制御則 $u_L[i]$ について述べる．$u_L[i]$ は次式で与えられる．

$$u_L[i] = Fx[i] + Gr \quad (3)$$

状態フィードバックゲイン F は $A + BF$ が漸近安定となるように決定するものとする．G は定常状態 $(i \to \infty)$ において出力 y がステップ参照入力 r に追従することを保証するためのフィードフォワードゲインであり，次式のように決定される．

$$G = [C\{I - (A + BF)\}^{-1}B]^{-1} \quad (4)$$

次に非線形フィードバック制御則 $u_N[i]$ について述べる．まずステップ参照入力 r に対する閉ループ系の状態量の定常値 x_e を次式のように定義する．

$$x_e := G_e r = \{I - (A + BF)\}^{-1}BGr \quad (5)$$

$u_N[i]$ は次式で与えられる．

$$u_N[i] = \rho(r, y)B^T P(A + BF)(x[i] - x_e) \quad (6)$$

ここで $\rho(r, y)$ は負値のスカラー関数であるとする．また $P > 0$ は閉ループ系のリヤプノフ行列である．

以上のことから状態フィードバック CNF 制御則は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} u[i] &= u_L[i] + u_N[i] \\ &= Fx[i] + Gr \\ &\quad + \rho(r, y)B^T P(A + BF)(x[i] - x_e) \end{aligned} \quad (7)$$

$K := B^T P(A + BF)$ とおき，閉ループ系の構造を図 1 に示す．

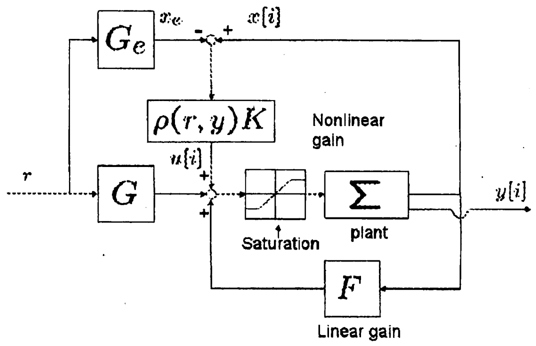

図 1: CNF 制御系の構造

3.2 CNF 制御系の安定条件 [2]

(1) のシステムと (7) 式の CNF 制御則による閉ループ系は $\tilde{x}[i] = x[i] - x_e$ とすれば

$$\begin{aligned} \tilde{x}[i + 1] &= (A + BF)\tilde{x}[i] \\ &\quad + \rho(r, y)B^T P(A + BF)\tilde{x}[i] \end{aligned} \quad (8)$$

となる．また H を次式のように定義する．

$$H := [I + F\{I - (A + BF)\}^{-1}B]G \qquad (9)$$

定理 1[2)]　(1) 式のシステムと (7) 式の制御則について考える。状態量 $x[i]$ の集合 X_δ を

$$X_\delta := \{x[i] : |Fx[i]| \le u_{max}(1 - \delta)\} \qquad (10)$$

と定義する．ただし $\delta \in (0, 1)$ である．

このとき初期状態と参照入力が

$$\tilde{x}[0] := (x[0] - x_e) \in X_\delta,\ |Hr| \le \delta u_{max} \qquad (11)$$

を満たし，かつ $\rho(r, y)$ が

$$\frac{-2}{B^TPB} \le \rho(r, y) < 0 \qquad (12)$$

を満たすならば CNF 制御則は制御出力 $y[i]$ をステップ参照入力 r に漸近的に追従できる．□

3.3　非線形関数 ρ と極の関係

補助システム G_{aux} を

$$\begin{aligned} G_{aux} &:= B^TP(A + BF)(zI - (A + BF))^{-1}B \\ &:= C_{aux}(zI - A_{aux})^{-1}B_{aux} \qquad (13) \end{aligned}$$

とすれば (8) 式は図 2 のブロック線図で表せる．

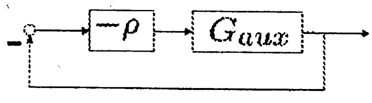

図 2: 根軌跡法による ρ の解釈

根軌跡法より $\rho \to 0$ とすれば (7) 式の閉ループ系の極は補助システム G_{aux} の極に近づくことが示せる．

次に ρ の一例を示す．$\rho(r, y)$ は閉ループ系の極を追従誤差 $(r - y)$ により移動させ，よりよい制御性能を実現するための非線形関数であり，比較的自由なパラメータである．

まず離散時間系では閉ループ系の極が原点に近いほど高減衰比であり，単位円付近では低減衰比であることが知られている．よって追従誤差が大きい場合に閉ループ系の極が単位円付近にあり，追従誤差が小さくなるにつれ原点付近に極が移動するように ρ および G_{aux} の極やゼロ点を配置しなければならない．

$$\rho(r, y) = -\frac{\beta}{1 - e^{-1}}(e^{-|y/r|} - e^{-1}) \qquad (14)$$

ただし β の範囲は $-2/B^TPB \le \beta < 0$ である．ρ を (14) 式のように決定し，閉ループ系の極を原点付近，ゼロ点を実軸上に配置することで速応性が向上すると考えられる．

4　LMI アプローチによる CNF 制御系の設計

LMI (Linear Matrix Inqualities) とは線形行列不等式の意味であり，LMI 問題は，数値最適化手法を用いて効率良く計算する事ができ，多目的制御問題を解くために有効な手法である．本研究では従来手法とは異なり，LMI を用いて非線形フィードバック部分のゲイン P を求めることを提案する．

4.1　ゼロ点配置のための線形拘束

非線形関数 ρ により (7) 式の閉ループ系の極が移動することは 3.3 節より明らかである．したがって，制御性能を向上させるためには極とゼロ点を望ましい位置に配置しなければならない．

F については極配置法および H_2 や H_∞ 制御等の手法により決定する．

ゼロ点配置を達成するような P の決定については参考文献[3] の手法により決定する．(13) 式より次式のような線形拘束を考える．

$$B^T P(A+BF) = C_{aux} \tag{15}$$

ここで適当な C_{aux} を決定するために有用な参考文献[3] の手法を説明する．

Brunovsky 標準形　以下に示すような形を Brunovsky 標準形と呼ぶ。

対 $(A,B), A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}$ を考える。ただしは列フルランクであるとする．このとき正則な状態変換 $T_s \in R^{n\times n}$ および入力変換 $T_i \in R^{m\times m}$ が存在して以下が成立する．

$$T_s^{-1}AT_s = \begin{bmatrix} A_o & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{k_{i-1}} & \cdots & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{k_{m-1}} \\ \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \end{bmatrix}$$

$$T_s^{-1}BT_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$k_i > 0, i = 1,\ldots,m$ であり、A_o の次元は $n_o := n - \sum_{i=1}^{m} k_i$ であり、その固有値は対 (A,B) の不可制御モードとよび、$\zeta := \{n_o, k_1, \ldots, k_m\}$ を対 (A,B) の可制御性指数とよぶ。

定理 3.1[3]　(A,b) ただし $A \in R^{n\times n}, b \in R^{n\times 1}$ であるシステムを考える。

このとき $\zeta := \{n_o, k_1\}$ を (A,b) の可制御性指数，$\{u_1,\ldots,u_{n_p}\}$ を (A,b) の不可制御性指数とすると、どんな整数 $q_1, 0 < q_1 \le k_1$ と自己共役なスカラーの集合 $\{z_1,\ldots,z_{k_1-q_1}\}$ において非空の出力行列の集合 $\mathbf{C} \subset R^{1\times n}$ が存在する。

つまり、システム (A,b,c) が $\{u_1,\ldots,u_{n_0}, z_1,\ldots,z_{k_1-q_1}\}$ に $n_o+k_1-q_1$ 個の不変ゼロ点が存在し、無限ゼロ構造 $Q = \{q_1\}$ が存在するような $c \in \mathbf{C}$ が存在する。すなわち (A,b,c) の相対次数が q_1 に等しいような c である。□

この c は

$$c = \alpha \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} \end{bmatrix} T_s^{-1} \tag{16}$$

の形で与えられる．ただし $\alpha \in \mathcal{R}, \alpha \neq 0$ は任意のパラメータであり，$\mathbf{a}$ は配置したいゼロ点を根に持つ多項式の係数を並べた行ベクトルで，$\mathbf{0}$ は残りの要素を 0 にした行ベクトルである．

定理 3.1[3] より (A_{aux}, B_{aux}) が Brunovsky 標準形であれば G_{aux} が不変ゼロ点を持つような行列 C_{aux} を求めることができる．なお MATLAB tool box の Linsyskit[4] を用いれば Brunovsky 標準形への変換は容易である．

となる．

4.2　既存手法とのアプローチの違い

(7) 式の閉ループ系が安定であるためには，次式のようなリヤプノフ方程式を満たすような正定で対称な行列 P が存在しなければならない．

$$P = (A+BF)^T P(A+BF) + W \tag{17}$$

ただし W は任意の正定行列である．

参考文献[1] の設計手法では (17) 式のリヤプノフ方程式に基づいて設計を行っている．具体的には

ステップ1) 与えられた線形フィードバックによる閉ループ系の極，ゼロ点配置から F と C_{aux} を決定する．ただし F は通常の極配置法，C_{aux} は参考文献[3)]の手法により求める．

ステップ2)(15) 式より P を計算する．

ステップ3)(17) 式に P を代入し W が正定かどうかを確かめる．正定であれば P を決定．

ステップ4)W が正定でなければ P を計算し直すか C_{aux} を変えて再び P を計算する。

となり，試行錯誤が必要であることがわかる．

そこで本研究では次のようなリヤプノフ不等式に基づく LMI を考える．

$$P > 0,\ (A+BF)^T P(A+BF) - P < 0 \quad (18)$$

したがって (15) 式と (18) 式より解くべき最適化問題は

$$\begin{aligned} &Find \qquad P = P^T \\ &subject\ to \begin{cases} P > 0, \\ (A+BF)^T P(A+BF) - P < 0 \\ B^T P(A+BF) = C_{aux} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

となる．

4.3 LMI アプローチに基づく設計手法

LMI アプローチに基づく離散時間 CNF 制御則の設計手順を以下に示す．

ステップ1) 与えられた線形フィードバックによる閉ループ系の極，ゼロ点配置から F と C_{aux} を決定する．ただし F は通常の極配置法，C_{aux} は参考文献[3)]の手法により求める．

ステップ2) (19) 式の LMI 問題を解き，P を決定する．

ステップ3) 非線形関数 ρ を決定し，G, x_e を計算し (7) 式の制御入力を構成する．

よって試行錯誤が不要になったことがわかる．

4.4 数値例

次の離散時間システムを考える．

$$\begin{cases} x[i+1] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x[i] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} sat(u[i]) \\ y[i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[i] \end{cases} \quad (20)$$

ただし $u_{max} = 3$，$r = 1$ である．また閉ループ極配置を $-0.1 \pm 0.1i$，不変ゼロ点配置を -0.6 とすると MATLAB の place() より F，参考文献[3)]の手法より C_{aux} は次のように決まる．

$$F = \begin{bmatrix} -2.22 & -0.98 \end{bmatrix} \qquad C_{aux} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

次にMATLAB2007bおよびSeDuMiにより (19) 式の最適化問題を解き，P を求め，各パラメータも計算する．

$$P = \begin{bmatrix} 57.4 & -20.4 \\ -20.4 & 13.4 \end{bmatrix}$$

$$G = 1.22 \quad x_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり，(7) 式に代入すれば制御入力は

$$\begin{aligned} u[i] = &\begin{bmatrix} -2.22 & -0.98 \end{bmatrix} x[i] + 1.22r \\ &+ \rho \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} (x[i] - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) \end{aligned} \quad (21)$$

のように決まる．ここで ρ は (14) 式より次式のように決定した．

$$\rho(r, y) = -\frac{-0.067}{1 - e^{-1}}(e^{-|y/r|} - e^{-1}) \quad (22)$$

この制御則を用いた場合のステップ応答を図 3 に示す．

また過渡特性の比較のため(23), (24)式のような時不変線形フィードバック制御の応答も示す.

$$u[i] = \begin{bmatrix} -2.25 & -1.00 \end{bmatrix} x[i] + 1.25r \qquad (23)$$

$$u[i] = \begin{bmatrix} -2.22 & -0.98 \end{bmatrix} x[i] + 1.22r \qquad (24)$$

(23), (24)式は(21)式において $\rho = -0.067, 0$ としたものである. 両者を比較することで時変な非線形フィードバックの有効性を検証する.

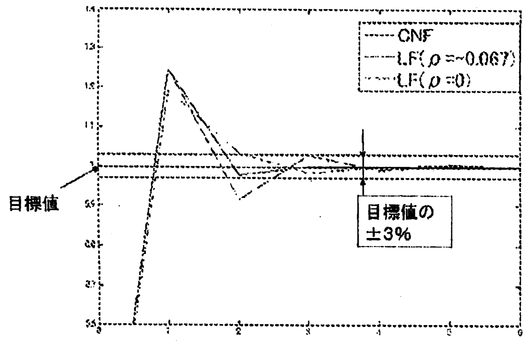

図 3: ステップ応答

(21)式のCNF制御では2ステップで目標値の±3%以内に整定しているのに対し, (23), (24)式の線形フィードバックの場合は3ステップ必要となる. したがってCNF制御則によりステップ応答の速応性が改善されていることがわかる.

5 結言

本研究では離散時間CNF制御に対し, 新たにLMIアプローチによる設計法を提案した. これにより試行錯誤することなくCNF制御系を設計することが可能になった.

参考文献

[1] Ben M. Chen, Tong H. Lee, Kemao Peng: Composite Nonlinear Feedback Control for Linear Systems With Input Saturation: Theory and an Application
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 48, No. 3, pp. 427-439 (2003)

[2] V.Venkataramanan, Kemao Peng, Ben M. Chen, Tong H. Lee:
Discrete-Time Composite Nonlinear Feedback Control With an Applicstion in Design of a Hard Disk Drive Servo System
IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 11, No. 1, January 2003, pp. 16-23

[3] Ben M. Chen, Da-Zhong Zheng:
Simultaneous Finite- and Infinite-zero Assignments of Linear Systems
Automatica, Vol. 31, No. 4, pp. 643-648,1995

[4] http://vlab.ee.nus.edu.sg/"bmchen