計測自動制御学会東北支部 第242回研究集会 (2008.5.13)
資料番号 242-5

速応性を考慮したSVD-RHCの重み決定について

Inverse design of weighting matrices in SVD-RHC for transient performance improvement

○熊谷崇，佐藤淳
○ Takashi Kumagai, Atsushi Satoh
岩手大学
Iwate University

キーワード：過渡応答 (Transient response), 重み行列 (Weighting matrix), LQ 最適フィードバック (LQ optimal feedback)

連絡先：〒020-8550 岩手県盛岡市上田 4-3-5 岩手大学大学院
工学研究科 機械工学専攻 航空宇宙システム制御部門 佐藤研究室
熊谷崇，Tel/Fax.: (019)621-6404，E-mail: t3407010@iwate-u.ac.jp

1 緒言

現実のシステムにはアクチュエータへの入力電圧や機器の動作範囲の限界といった拘束が存在し，拘束システムの一種と考えられる．システムの持つ拘束を考慮せずに制御系を設計すると，実装時の不安定化や機器の破損等の好ましくない現象を生じるため，拘束システムの制御は重要な問題である．

拘束システムに対する実用的制御手法の一つとして，近年 SVD-RHC（Singular Value Decomposition- Receding Horizon Control）法が提案されている [1]．拘束付き LQ（Linear Quadratic）最適制御の近似解法に基づき，少ない計算量で RHC 入力の構成が可能である．低速な組み込みコントローラ等では，サンプル周期内に拘束を考慮した最適制御入力を求めることは困難な場合があるが，SVD-RHC 法はヘッシアンの特異ベクトルを利用し，最適制御に十分近い準最適制御入力を比較的少ない計算量で生成する．

また設計パラメータは LQ 最適制御と同様な状態及び入力重みとなるが，重みの選択と速応性の関係に注目した研究は筆者らの知る限り無い．

一方，LQ 最適制御系における速応性と関係の深い研究として ILQ（Inverse Linear Quadratic）法 [2, 3] があげられる．これは何らかの重み行列について，指定した極配置を達成するような最適フィードバックゲインを構成する手法であり，速応性を含む過渡応答整形に有効な手法である．

そこで本研究では多項式 ILQ 法 [4] の発想に基づき，SVD-RHC 法における，速応性を考慮した重み行列の決定手法の一つを提案する．前述の通り，SVD-RHC 法は拘束付き離散時間 LQ 最適制御の近似解法に基づいており，LQ 制御と同様な二次形式評価関数を用いていることを考えれば，このような発想は自然だと思われる．

また，状態量が平衡点を含むある不変集合 $\boldsymbol{O}_\infty$（与えられた拘束に対応した，LQ 最適フィードバック系における最大出力許容集合）内に遷移した後は通常の（拘束無し）LQ 制御と等しい時不変な制御則を用いる．

そこで本研究では重み行列の決定は LQ 制御における極配置と同様の方針で行うことを考える．これによりシステムの拘束を破らない範囲で，速応性を考慮した制御が可能になると期待される．

2 問題設定

2.1 離散時間システム

次のような離散時間線形システムを考える．

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{1}$$

$x_k \in \boldsymbol{R}^n$ は状態ベクトルで $u_k \in \boldsymbol{R}^m$ は入力ベクトルである．対 (A, B) は可安定であり，一般性を失わず以下の構造を持つと仮定する．

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tag{2}$$

2.2 拘束条件

(1) 式のシステムに対し，次のような拘束条件の存在を考える．
入力拘束は

$$u_{k+t} \in \boldsymbol{U}, \quad t = 0, 1, \cdots \tag{3}$$

終端状態拘束は

$$x_{k+N|k} \in \boldsymbol{O}_\infty \tag{4}$$

と表される．ただし，入力拘束集合 $\boldsymbol{U}$ は m 次元実ベクトル空間の部分集合で，凸かつコンパクトな集合であるとする．また $\boldsymbol{O}_\infty$ はシステム (1) 式についての LQ 最適フィードバック系に対し，拘束条件 (3) 式を与えた場合に対応する最大出力許容集合であり，RHC スキームの安定性保証に用いられる．N は予測ホライズンであり正の整数とする．また，$x_{k+N|k}$ は時刻 k において予測された，時刻 $k+N$ におけるシステムの状態ベクトルを表す．

2.3 二次形式評価関数

SVD-RHC 法では与えられた拘束を満たしつつ，次の評価関数を最小化する入力列の生成を考える．

$$J_N(x_k, \boldsymbol{u}) = \sum_{t=0}^{N-1} [x_{k+t|k}^T Q x_{k+t|k} + u_{k+t}^T R u_{k+t}] + x_{k+N|k}^T P x_{k+N|k} \tag{5}$$

ここで $x_{k+t|k}$ は時刻 k において予測された，時刻 $k+t$ におけるシステムの状態ベクトルを表す．重み行列の Q（状態重み）と R（入力重み）は対称かつ正定であるとする．また，終端重み行列 P は次式で表される離散時間代数リカッチ方程式の正定対称解であるとする．また，K は LQ 制御における最適フィードバックゲインに対応する．

$$P = Q + A^TPA - K^T(R + B^TPB)K, \tag{6}$$

$$K = (R + B^TPB)^{-1}B^TPA \tag{7}$$

2.4 有限ホライズン最適化問題

次の有限ホライズン最適化問題を考える．

$$f_N(x) : \begin{cases} \boldsymbol{u}^o(x) = arg\ min\ J_N(x, \boldsymbol{u}) \\ subject\ to \\ u_{k+t} \in \boldsymbol{U}\ \ ,\ \ t = 0, 1, \cdots N-1 \\ x_{k+N|k} \in \boldsymbol{O}_\infty \end{cases} \tag{8}$$

なお $x \in \boldsymbol{O}_\infty$ が満たされた場合，$f_N(x)$ 最適制御入力は $u = -Kx$ で与えられる．

3 SVD-RHC 法

SVD-RHC 法は，評価関数 $J_N(x, \boldsymbol{u})$ のヘシアンの特異値分解 [1] により得られる特異ベクトルから (8) 式の問題に対する最適制御入力を近似的に構成する．

(5) 式は次のように表せる．

$$J_N(x, \boldsymbol{u}) = x^TYx + \boldsymbol{u}^TH\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{u}^TFx, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} Y &:= Q + \Lambda^T\boldsymbol{Q}\Lambda \in \boldsymbol{R}^{n\times n}, \\ H &:= \boldsymbol{R} + \Gamma^T\boldsymbol{Q}\Gamma \in \boldsymbol{R}^{Nm\times Nm}, \\ F &:= \Gamma^T\boldsymbol{Q}\Lambda \in \boldsymbol{R}^{Nm\times n}. \end{aligned} \tag{10}$$

ただし，$\boldsymbol{Q} := diag\ \{Q, \cdots, Q, P\}, \boldsymbol{R} := diag\ \{R, \cdots, R\}$，

$$\Lambda := \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}, \Gamma := \begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \cdots & B \end{bmatrix} \tag{11}$$

行列 Λ と Γ はシステムの状態の N ステップ予測時間発展を決める.

$J_N(x,\boldsymbol{u})$ のヘシアン H の特異値分解を次式で与える.

$$H = VSV^T \tag{12}$$

行列 $S \in \boldsymbol{R}^{Nm\times Nm}$ は正定であり H の特異値 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{Nm}$ を対角成分に持つ. $V \in \boldsymbol{R}^{Nm\times Nm}$ の列は H の特異ベクトルからなり, V は直行行列すなわち $V^TV = VV^T = I_{Nm}$ が成立する.

SVD-RHC 法では制御入力 $\boldsymbol{u}$ を H の特異ベクトルの線形結合として構成する.

$$\boldsymbol{u} = V\tilde{\boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{Nm} \boldsymbol{v}_i\tilde{u}_i \tag{13}$$

ここで $\boldsymbol{v_i}, i \in \{1,2,\cdots,Nm\}$ は V の列（特異ベクトル）であり, $\tilde{u}_i$ は拘束無しの LQ 最適制御入力ベクトル $\tilde{\boldsymbol{u}}$ の要素である.

SVD-RHC 法を用いることで, 拘束付き LQ 最適制御問題の最適解を, 拘束無し LQ 最適制御解を利用して近似できる.

4　SVD-RHC アルゴリズム

(step1) 各時刻毎に, 現在の状態 $x = x_k$ が得られ,(14) 式の最適化問題を解く.

$$\tilde{f}_N(x) : \max_r r \tag{14}$$

subject to

$$r \in \{1,2,\cdots,Nm\},$$

$$\boldsymbol{u}_{svd}(x) := \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{v}_i\tilde{u}^o_{i,uc}(x), \tag{15}$$

$$\boldsymbol{u}_{svd}(x) \in \boldsymbol{U}, \tag{16}$$

$$\bar{I}(\Lambda x + \Gamma\boldsymbol{u}_{svd}(x)) \in \boldsymbol{O}_\infty$$

ここで $\bar{I} = [0_{n\times(N-1)n}\ I_n]$ である. なるべく多くの特異ベクトルの線形結合で入力ベクトルを構成.

(step2) 制御入力列 $\boldsymbol{u}_{svd}(x)$ の第一要素を入力に用いる.

$$u_k = D\boldsymbol{u}_{svd}(x), \tag{17}$$

$$D = [I_m\ 0_{m\times(N-1)m}]$$

(step3) アルゴリズムの初期化, 初期状態 $x_0 \in \boldsymbol{X}_N$ を選択する. 初期状態は指定されたホライズン（ステップ数）で, 拘束を満たしつつ $\boldsymbol{O}_\infty$ 内へ遷移する RHC 入力列が存在するという意味で, 許容される状態集合 $\boldsymbol{X}_N$（許容領域）内にあるとする.

3-a)$\boldsymbol{u}^* := \boldsymbol{u}_{svd}(x_0)$

3-b)(9) 式を使い, 関数 $V^*(x)$（リアプノフ関数の候補）を初期値にセット. つまり $V^*(x_0) = J_N(x_0, \boldsymbol{u}_{svd}(x_0))$

3-c)$k=1$ に設定（ホライズンの更新）

(step4) k ステップ目のとき

4-a)$x_k \notin \boldsymbol{X}_N$ のとき step5 にいく.

4-b)$x_k \in \boldsymbol{X}_N$ のとき $\tilde{f}_N(x)$ を解き, $\boldsymbol{u}_{svd}(x_k)$ を求める.

4-c)$J_N(x_k, \boldsymbol{u}_{svd}(x_k)) \geq V^*(x_{k-1})$ なら step5 にいく.

4-d)$J_N(x_k, \boldsymbol{u}_{svd}(x_k)) < V^*(x_{k-1})$ なら $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}_{svd}(x_k)$, $V^*(x_k) = J_N(x_k, \boldsymbol{u}_{svd}(x_k))$ とする.

4-e)$u_k = D\boldsymbol{u}^*$

4-f)$k = k+1$ にし step4 に戻る.（ホライズンの更新）

(step5)$x_k \notin \boldsymbol{X}_N$,$J_N(x_k, \boldsymbol{u}_{svd}(x_k)) \geq V^*(x_{k-1})$ のとき拘束を破るため, $\boldsymbol{u}^*$ を拘束を満たすように構成する.

5-a)$\boldsymbol{u}^*$ の次の要素を利用.

$u_k = [0_{m\times m}\ I_m\ 0_{m\times(N-2)m}]\boldsymbol{u}^*$

5-b)$x_N^* := \bar{I}(\Lambda x_k + \Gamma\boldsymbol{u}^*)$

x_N^* は終端時刻 $k+N$ のときの予測されたシステムの状態.

（$\boldsymbol{u}^*$ は 1 ステップ前の入力ベクトルだが, $\boldsymbol{u}^*$ の 2 番目の要素は 1 ステップ前に予測された現在の入力.）

5-c)1 ステップ前に求めた入力ベクトル $\boldsymbol{u}^*$ の第二要素から第 N 要素をずらし, 空いた第 N 要素に

$-Kx_N^*$ を加え，$\boldsymbol{u}^*$ を更新する．

$$\boldsymbol{u}^* := [u_1^{*T}\ u_2^{*T}\ \cdots u_{N-1}^{*T}\ (-Kx_N^*)^T]^T \quad (18)$$

5-e)$k = k+1$ にし step4 に戻る．(ホライズンの更新)

5 離散時間多項式 ILQ 法に基づく重み決定

(5) 式の重み行列 Q, P, R を離散時間最適フィードバックゲイン K から求めるため，離散時間多項式 ILQ 法の部分極配置ゲインを利用する．なお，多項式 ILQ 法では入力重み $R = I$ に固定するため，決定すべき重みは Q と P だけである．

(step1) (2) 式において，$A_1 - A_2L_1$ の極を指定極（$n-m$ 個）へ配置する L_1 を求める．(n は状態の次元，m は入力の次元)

(step2) $L = \begin{bmatrix} L_1 & I \end{bmatrix}$ とする．ただし $LB = I$.

(step3) $G := (LA^{-1}B)^{-1}$ を求める．

(step4) $\alpha > \Theta(1)$ となるような α を選ぶ．

ここで，$\Theta(z) := I + V^{\sim}(z)V(z) - \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_LA_L^{-1} & 0 \end{array}\right]^{\sim} - \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_LA_L^{-1} & 0 \end{array}\right]$, $V(z) := \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L & D_L \end{array}\right]$,

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = C(zI - A)^{-1}B,$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^{\sim} = (C(z^{-1}I - A)^{-1}B)^T,$$

$$\begin{bmatrix} A_L & B_L \\ C_L & D_L \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_1 & I \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} I & 0 \\ -L_1 & I \end{bmatrix}$$

(step5)

$$M(z) = \begin{bmatrix} A_L - zI & 0 & B_L \\ C_L^TC_L & I - zA_L^T & S_L \\ -S_L^T & zB_L^T & (\alpha-1)I - D_L^TD_L \end{bmatrix},$$

$S_L := -(C_LA_L^{-1})^T + C_L^TD_L$

が全ての $|z| = 1$ において正則となる α を選ぶ．

(step6) $\Sigma = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_m)$ とおき，任意の $\sigma_k > \alpha,\quad k = 1, \cdots, m$ を決めてから，$\Phi = -\Sigma^{-1}G$ を求める．

(step7) 離散時間最適フィードバックゲイン $K := LA + \Phi L$ が求まる．

(step8) (6) 式において $R = I$ とおき，正定解 $P = P^T > 0$ と状態重み $Q = Q^T > 0$ を逆算する．これは LMI 問題として解ける．

6 数値例

6.1 システムと制御目的

離散時間システムは次のように与える．

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.0142 & 0.1673 \\ -0.8363 & -0.3203 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.1972 \\ 0.1673 \end{bmatrix} u_k \quad (19)$$

ホライズン $N = 5$，拘束条件は次式で与えられるとし，(8) 式の問題を満たす制御入力列を求める．

$$u_{k+t} \in \boldsymbol{U} := [-1\ 1], t = 0, 1, \cdots, 4$$

$$x_{k+5|k} \in \boldsymbol{O}_\infty$$

6.2 極配置による速応性の比較

離散時間システムは複素平面上の単位円内に全ての極があるとき安定なシステムとなる．原点に極が近いほどシステムの応答は速くなり，単位円周に最も近い極 (主要極) は応答に最も影響を与える．この例では $n - m = 1$ 個の極が指定できるので，指定極を $p = 0.01$ および $p = 0.89$ に配置するような重みを逆算し，SVD-RHC 法を用いた初期値応答の結果から速応性の比較を行う．

重み決定の手順としては，多項式 ILQ 法から極配置ゲイン K を求め，入力重み $R = I$ を固定する．次に (6) 式から終端状態重み P 及び状態重み Q を決定する．

(1) 指定極が異なると極配置ゲイン K が異なるため，結果的に許容領域 $\boldsymbol{X}_N$ と最大出力許容集合 $\boldsymbol{O}_\infty$ も異なる．そのため，各 $\boldsymbol{X}_N$ の共通範囲から初期値 x_0 を選ぶ．今回は x_0 は次のようにおく．

$$x_0 = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 71 \end{bmatrix}$$

(2) 状態遷移の様子を全体図と $\boldsymbol{O}_\infty$ 付近の拡大図で示す.

(3) 状態ベクトル $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ の, x_1 と x_2 について指定極が異なる場合の速応性を比較する.

	重み (P,Q) の逆算方法
Case 1	主要極 $p = 0.01$ に配置するゲインを使用
	主要極でない極 $\hat{p} = -0.0000135$
Case 2	主要極 $p = 0.89$ に配置するゲインを使用
	主要極でない極 $\hat{p} = -0.000028$

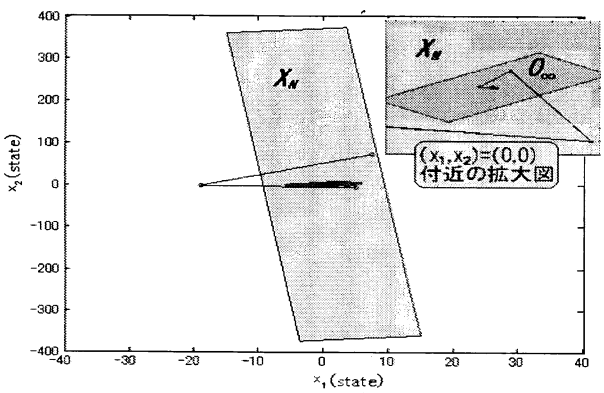

図 1: 主要極 $p = 0.01$ のときの $\boldsymbol{X}_N$ と状態軌道

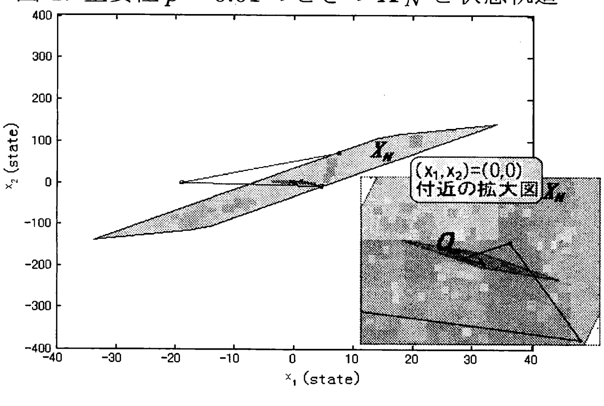

図 2: 主要極 $p = 0.89$ のときの $\boldsymbol{X}_N$ と状態軌道

7 結言

本研究では, 多項式 ILQ 法の発想に基づき, 速応性を考慮した SVD-RHC 法の評価関数の重み決定のための一手法を提案した.

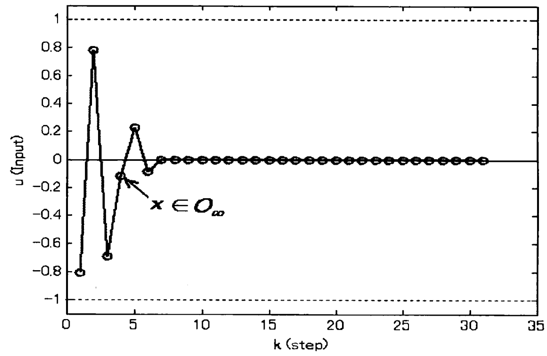

図 3: 主要極 $p = 0.01$ のときの入力 (入力拘束 $-1 \leq u_k \leq 1$)

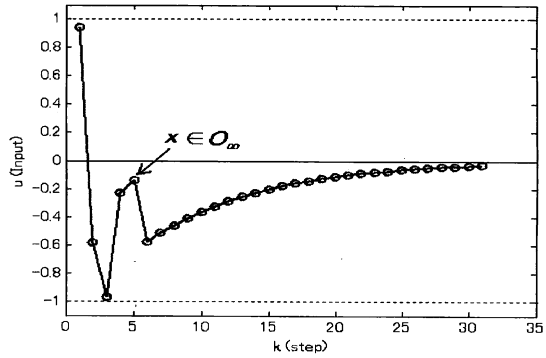

図 4: 主要極 $p = 0.89$ のときの入力 (入力拘束 $-1 \leq u_k \leq 1$)

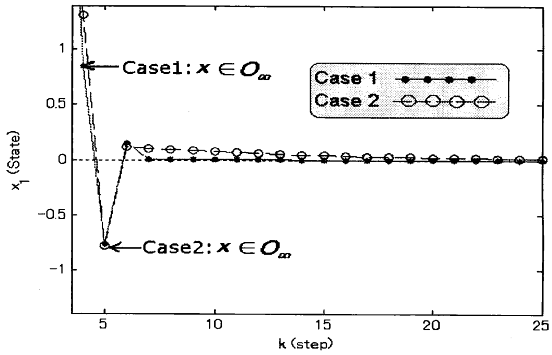

図 5: 状態量 x_1

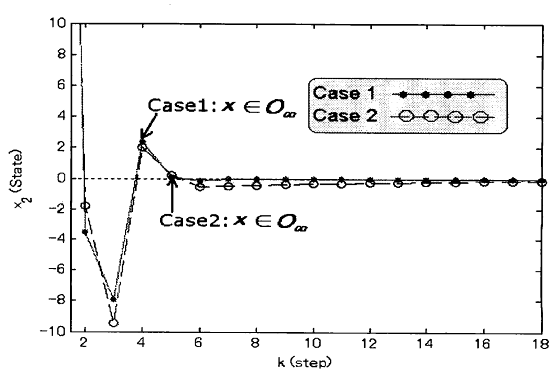

図 6: 状態量 x_2

数値例では二つの異なる閉ループ主要極配置に対応する重み行列を決定し，SVD-RHC 法における初期値応答を比較した（図 6,7）．

図 6,7 の通り，LQ 制御において主要極をより原点近くに指定するような重みを用いる場合，予想されたように速応性が向上している．これは，SVD-RHC 法は拘束付き離散時間 LQ 最適制御の近似解法に基づく手法であることを考えれば自然な結果であると思われる．

参考文献

[1] O.J.Rojas,M.M.Seron and G.C.Goodwin:SVD based receding horizon control for constrained linear systems:stability results, Proceeding of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control,3695/3700(2003)

[2] 藤井, 水島 : LQ 設計への新しい試み-最適サーボ系設計への応用-, 計測自動制御学会論文集,**23**-2,129/135(1987)

[3] 杉本 謙二, 井上 昭 : 多項式行列の規約分解を用いた ILQ 最適サーボ系の設計, システム制御情報学会論文誌,**8**-6,242/248(1995)

[4] 佐藤 淳, 杉本 謙二 : 離散時間レギュレータの多項式 ILQ 設計とサンプル値 LQ 制御の逆問題, 計測自動制御学会論文集,**34**-9,1198/1204(1998)