計測自動制御学会東北支部 第245回研究集会 (2008.10.24)
資料番号 245-20

外乱を考慮した離散時間線形系のモデル追従形制御系の設計

A Design of Discrete-Time linear Model Following Control System with Disturbances

○呉 淑晶*，大久保 重範*

○Shujing Wu*, Shigenori Okubo*

*山形大学 工学部

*Faculty of Engineering Yamagata University

キーワード： 離散時間(discrete time), 線形 (linear)，安定性 (stable)，
モデル追従 (model following)

連絡先： 〒992-8510 山形県米沢市城南四丁目3-16 山形大学 工学部 機械システム工学科 大久保研究室
大久保 重範, Tel.: (0238)26-3245，Fax.: (0238)26-3245，E-mail: sokubo@yz.yamagata-u.ac.jp
呉 淑晶，Tel.: (0238)26-3245，Fax.: (0238)26-3245，E-mail: wushujing168@hotmail.com

1. はじめに

制御対象の出力をモデルの出力に追従させる制御系として，モデル追従形制御系(MFCS)がある．MFCSの制御理論の研究は，今日盛んな研究分野の一つであり，設計法は種々提案されている[1)~4)]．これに対し，離散時間系より連続時間系の方が圧倒に多い．

しかしながら，ディジタル計算機の普及，連続時間系より離散時間系を取り扱う場合[5)]の方が多くなりつつあり[6)]，性能の改善，質の向上を図っているそのため，離散時間系に対する研究は実用かつ重要になってきた．

そこで，本稿では大久保[1)]が提案した方法に基づいて，実際安定の考え方を用いたモデル追従制御系の設計法を説明し，有界性を示す．最後に，本方法の有効性を確かめるために行なった数値例を示す．

2. 問題の設定

本設計で扱う制御対象は (1), (2) 式で表される離散時間線形系である．参照モデルは (3), (4) とする．

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + d(k) \qquad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) + d_0(k) \qquad (2)$$

$$x_m(k+1) = A_m x_m(k) + B_m r_m(k) \qquad (3)$$

$$y_m(k) = C_m x_m(k) \qquad (4)$$

各ベクトルの次数は $x(k), d(k) \in R^n$,$u(k), y(k)$, $y_m(k), d_0(k) \in R^l$，$r_m(k) \in R^{l_m}, x_m(k) \in R^{n_m}$ とする．ここで$y(k)$は制御対象の出力, $u(k)$は制御入力, $d(k)$,$d_0(k)$は有界な外乱である．A, B, CおよびA_m, B_m, C_mは適当な次元の定数行列である．

外乱の特性多項式を$D_d(z)$とすれば，(5),(6)式を満たす．$D_d(z)$は既知確定モニック多項式である．

よって，

$$D_d(z)d(k)=0 \tag{5}$$

$$D_d(z)d_0(k)=0 \tag{6}$$

が成立する．制御対象と参照モデルの出力誤差$e(k)$は次式で与えられる．

$$e(k)=y(k)-y_m(k) \tag{7}$$

この設計においては，内部状態がすべて有界に保持され，$k\to\infty$で$e(k)\to 0$にするような離散時間線形系のモデル追従形制御系 (discrete time model following control system MFCS)の設計法を考えていく．

3. 制御系の設計

zをシフト演算子として，$zx(k)=x(k+1)$とする．制御対象(1)は可制御，可観測であるものとする．すなわち

$$(a) rank[zI-A,B]=n \tag{8}$$

$$(b) rank\begin{bmatrix} zI-A \\ C \end{bmatrix}=n \tag{9}$$

を満たす．ここで，$\forall z\in C$である．(1)式は

$$(zI-A)x(k)=Bu(k)+d(k) \tag{10}$$

になる．すなわち

$$x(k)=(zI-A)^{-1}Bu(k)+(zI-A)^{-1}d(k) \tag{11}$$

である．制御対象の入出力関係を求めば，$y(k)$は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} y(k)=&C(zI-A)^{-1}Bu(k)\\ &+C(zI-A)^{-1}d(k)+d_0(k) \end{aligned} \tag{12}$$

ここで，

$$C(zI-A)^{-1}B=N(z)/D(z) \tag{13}$$

とする．ただし，

$$N(z)=Cadj[zI-A]B \tag{14}$$

$$D(z)=|zI-A| \tag{15}$$

である．(12)式より，$y(k)$を求める．

$$y(k)=\frac{N(z)}{D(z)}u(k)+\frac{Cadj[zI-A]}{D(z)}d(k)+d_0(k) \tag{16}$$

$$D(z)y(k)=N(z)u(k)+w(k) \tag{17}$$

外乱はまとめて, 下式のようになる．

$$w(k)=Cadj(zI-A)d(k)+D(z)d_0(k) \tag{18}$$

ここで，$\partial_{ri}(N(z))=\sigma_i$である．モデルの方は$(C_m,A_m,B_m)$が可制御と可観測である．そして，

$$x_m(k)=[zI-A_m]^{-1}B_m r_m(k) \tag{19}$$

$$y_m(k)=C_m[zI-A_m]^{-1}B_m r_m(k) \tag{20}$$

である．つぎに

$$C_m[zI-A_m]^{-1}B_m=\frac{N_m(z)}{D_m(z)} \tag{21}$$

が得られる．ここで，

$$N_m(z)=C_m adj[zI-A_m]B_m \tag{22}$$

$$D_m(z)=|zI-A_m| \tag{23}$$

である．よって，次式が得られる．

$$D_m(z)y_m(k)=N_m(z)r_m(k) \tag{24}$$

ここで，$\partial_{ri}(N_m(z))=\sigma_{mi}$である. (25)式の$w(k)$は次式を満足する．

$$D_d(z)w(k)=0 \tag{25}$$

つぎに, ρ次($\rho\geq n_d+2n-n_m-1-\sigma_i$)のモニックで安定な多項式$T(z)$を選び，つぎの方程式より$R(z)$と$S(z)$を求める．

$$T(z)D_m(z)=D_d(z)D(z)R(z)+S(z) \tag{26}$$

ここで，各多項式の次数は以下ようになる．

$$\partial T(z) = \rho \tag{27}$$

$$\partial D_d(z) = n_d \tag{28}$$

$$\partial D_m(z) = n_m \tag{29}$$

$$\partial D(z) = n \tag{30}$$

$$\partial R(z) = \rho + n_m - n_d - n \tag{31}$$

$$\partial S(z) \leqq n_d + n - 1 \tag{32}$$

つぎに，以下の条件を満足すれば,

$$N(z) = N_r + \hat{N}(z) \tag{33}$$

$$|N_r| \neq 0 \tag{34}$$

$$\partial_{r_i}(N(z)) = \sigma_i \tag{35}$$

(26)式を用いて誤差$e(k)$にかけると次式が得られる．

$$\begin{aligned}
T(z)D_m(z)e(k) &= D_d(z)D(z)R(z)y(k) \\
&+S(z)y(k) - T(z)D_m(z)y_m(k) \\
&= D_d(z)R(z)\{N(z)u(k) + w(k)\} \\
&+S(z)y(k) - T(z)N_m(z)r_m(k) \\
&= \{D_d(z)R(z)N(z) - Q(z)N_r\}u(k) \\
&+Q(z)N_r u(k) + S(z)y(k) \\
&-T(z)N_m(z)r_m(k) \\
&= Q(z)N_r\{u(k) + N_r^{-1}Q(z)^{-1} \\
&.(D_d(z)R(z)N(z) - Q(z)N_r)u(k) \\
&+N_r^{-1}Q(z)^{-1}S(z)y(k) \\
&-N_r^{-1}Q(z)^{-1}T(z)N_m(z)r_m(k)\} = 0
\end{aligned} \tag{36}$$

(36)式右辺をゼロにし，$u(k)$を求め，その結果は下式のようになる．

$$\begin{aligned}
u(k) &= -N_r^{-1}Q^{-1}(z)\{D_d(z)R(z)N(z) \\
&-Q(z)N_r\}u(k) \\
&-N_r^{-1}Q^{-1}(z)S(z)y(k) + u_m(k)
\end{aligned} \tag{37}$$

$$u_m(k) = N_r^{-1}Q^{-1}(z)T(z)N_m(z)r_m(k) \tag{38}$$

ここで，$\partial_{r_i}Q(z) = \rho + n_m - n + \sigma_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, $\Gamma_r(Q(k)) = I, \partial_{r_i}Q(z) \geq \partial S(z), \rho \geq n_d + 2n - n_m - 1 - \sigma_i$である．(37)式は

$$T(z)D_m(z)e(k) = 0 \tag{39}$$

を設定し，よって，次式のようになる．

$$\lim_{k\to\infty} e(k) = 0 \tag{40}$$

本設計は$u(k)$が$e(k) \to 0 (k \to \infty)$にするより，制御系を構成する内部状態が有界であればモデル追従形制御系が実現できる．

4.　内部状態の有界性の証明

状態空間手法を用いて内部状態の有界性を証明する．状態空間表示を使って，$u(k)$を表すためにつぎのような状態変数を導入する．

$$\begin{aligned}
u(k) &= -H_1\xi_1(k) \\
&-\{E_2 y(k) + H_2\xi_2(k)\} + u_m(k)
\end{aligned} \tag{41}$$

$\xi_1(k), \xi_2(k)$は次の状態変数フィルタの状態がである．

$$\xi_1(k+1) = F_1\xi_1(k) + G_1 u(k) \tag{42}$$

$$\xi_2(k+1) = F_2\xi_2(k) + G_2 y(k) \tag{43}$$

ここで，$|zI - F_i| = |Q(z)|, (i = 1, 2)$である．多項式行列とシステム行列の間にはつぎの関係がある．

$$\begin{aligned}
H_1(zI - F_1)^{-1}G_1 &= N_r^{-1}Q^{-1}(z) \\
&\cdot\{D_d(z)R(z)N(z) - Q(z)N_r\}
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
&E_2 + H_2(zI - F_2)^{-1}G_2 \\
&= N_r^{-1}Q^{-1}(z)S(z)
\end{aligned} \tag{45}$$

(1),(2),(38)と(39)式より，$x(k+1), \xi_1(k+1), \xi_2(k+1)$は以下のようになる．

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= (A - BE_2C)x(k) - BH_1\xi_1(k) \\
&-BH_2\xi_2(k) - BE_2 d_0(k)
\end{aligned}$$

$$+Bu_m(k)+d(k) \tag{46}$$

$$\xi_1(k+1)=-G_1E_2Cx(k)$$
$$+(F_1-G_1H_1)\xi_1(k)-G_1H_2\xi_2(k)$$
$$+G_1u_m(k)-G_1E_2d_0(k) \tag{47}$$

$$\xi_2(k+1)=G_2Cx(k)+F_2\xi_2(k)+G_2d_0(k) \tag{48}$$

制御系全体の状態空間表示はつぎのようになる．

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \xi_1(k+1) \\ \xi_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BE_2C & -BH_1 & -BH_2 \\ -G_1E_2C & F_1-G_1H_1 & -G_1H_2 \\ G_2C & 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bu_m(k)+d(k)-BE_2d_0(k) \\ G_1u_m(k)-G_1E_2d_0(k) \\ G_2d_0(k) \end{bmatrix} \tag{49}$$

さらに，$z(k), A_s, d_s(k)$, は以下の式

$$z(k)=[x^T(k), \xi_1^T(k), \xi_2^T(k)]^T \tag{50}$$

$$A_s=\begin{bmatrix} A-BE_2C & -BH_1 & -BH_2 \\ -G_1E_2C & F_1-G_1H_1 & -G_1H_2 \\ G_2C & 0 & F_2 \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$d_s(k)=\begin{bmatrix} Bu_m(k)+d(k)-BE_2d_0(k) \\ G_1u_m(k)-G_1E_2d_0(k) \\ G_2d_0(k) \end{bmatrix} \tag{52}$$

とすれば，(49)式の系は次式に書き直せる．

$$z(k+1)=A_sz(k)+d_s(k) \tag{53}$$

A_sの特性多項式は[付録A]

$$|zI-A_s|=|Q(z)|V_s(z)T(z)^lD_m(z)^l \tag{54}$$

とする．ただし，V_sは$C(zI-A)^{-1}B$の零点多項式であり，$C(zI-A)^{-1}B$の左既約分解を$C(zI-A)^{-1}B=w(z)^{-1}U(z)$とすれば，$V_s=|U(z)|/|N_r|$である．(54)式で$|Q(z)|$,$V_s(z)$，$T(z)$，$D_m(z)$はすべて安定な多項式であるから，$A_s$は安定なシステム行列である．$z(k)$は有界である．よって，つぎの定理が得られる．

定理 1 $x(k)\in R^n$，$y(k)\in R^l$, $d(k)\in R^n$，$d_0(k)\in R^l$とし，制御対象は

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+d(k) \tag{55}$$

$$y(k)=Cx(k)+d_0(k) \tag{56}$$

である．本方法にモデル追従形制御系を設計する場合，つぎの条件を満足すれば，システムの全状態は有界である．

(1) $d(k), d_0(k)$は有界の外乱である．

(2) $|N_r|\neq 0$.

(3) $C[zI-A]^{-1}B$の不変零点は複数左半面に存在する．

5. 数値例

5.1 数値例1

つぎの線形離散時間系に対して，

$$x(k+1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} d(k) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{57}$$

$$y(k)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(k)+d_0(k) \tag{58}$$

である．また，追従モデルは以下のものを使用する．

$$x_m(k+1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_m(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_m(k) \tag{59}$$

$$r_m(k)=sin(k\pi/16)+1 \tag{60}$$

$$y_m(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_m(k) \tag{61}$$

外乱$d(k), d_0(k)$はつぎのようにする．

$$d(k)=0.02(k-35)(35\leqq k\leqq 50) \tag{62}$$

$$d_0(k)=0.5(95\leqq k\leqq 125) \tag{63}$$

F_iとG_iは

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$G_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{65}$$

とする．制御入力は次式のように求められる．

$$\begin{aligned} u(k) = &-\begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 0.5 & -2 \end{bmatrix} \xi_1(k) \\ &-4y(k) - \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xi_2(k) \\ &+u_m(k) \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} u_m(k) = &\ 0.5 r_m(k) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \xi_m(k) \end{aligned} \tag{67}$$

シミュレーションの応答をFig.1 に示す．応答より，$y(k)$は漸近的に$y_m(k)$に収束していることがわかった．

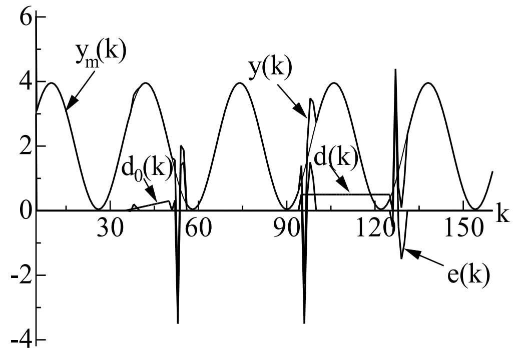

Fig. 1　Responses of linear Discrete Time system

5.2　数値例2

この制御理論はエネルギー損失を考慮した電気炉システムに実用するのを検討していく．電気炉システムに対して，エネルギー損失のため，実際温度を設定温度に何秒で調節すること，従来の伝統的な制御法では対応が困難である．本研究ではエネルギー損失をあらかじめ予測しておき，実際温度の変化に伴い敏感に変化することが制御を実現する上で有効となる．とくに，外界の影響を受けるため，エネルギー損失が大きく変化する場合，また，変化が多い場合の方は本方法の制御を行うことが最も適用である．Fig.2 は生産システム中の電気炉システムの簡略図である[8)]．電気炉システムの温度$x(t)$は微分方程式

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) + d(t) \tag{68}$$

に従う．ただし，$u(t)$は操作量で$d(t)$はエネルギー損失による未知値外乱である．平衡点温度は設定値一定であることが望ましい．

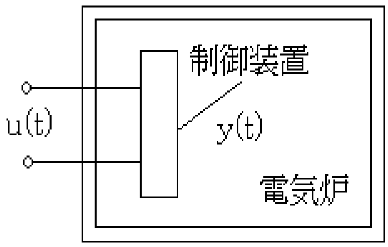

Fig. 2　Figure of the control system

このとき，連続制御対象方程式が(69)，(70)式のように与える．(69)，(70)式では外乱の影響も考慮に入れており, より現実なシステムである．

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = &\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d(t) \end{aligned} \tag{69}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + d_0(t) \tag{70}$$

ここで，$u(t)$は入力電圧，$y(t)$は電気炉システムの実際温度，$x(t)$は中間変量である．$d(t)$, $d_0(t)$は有界な外乱である．0.2secごとに$x(t)$をサンプリングし，状態および動的フィードバック，また，$u(t) = u(kT), kT \leqq t < (k+1)T$を用いて, 離散化した状態方程式は$T = 0.2sec$とすると，制御対象

は以下のようになる．

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0.819\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\0.181\end{bmatrix}u(k)+\begin{bmatrix}0\\0.819\end{bmatrix}d(k) \tag{71}$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}x(k)+d_0(k) \tag{72}$$

モデルは(73)，(74)式のようになる．

$$x_m(k+1)=\begin{bmatrix}1.023&0.247\\0.247&1.518\end{bmatrix}x_m(k)+\begin{bmatrix}0.023\\0.247\end{bmatrix}r_m(k) \tag{73}$$

$$y_m(k)=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}x_m(k) \tag{74}$$

F_iとG_iは以下のようになる．

$$F_i=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} \tag{75}$$

$$G_i=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{76}$$

これらの系についてモデル追従形制御系を設計する．制御対象(71)，(72)式の出力$y(k)$がモデル(73)，(74)式の出力$y_m(k)$に追従することをシミュレーションにより確認する．シミュレーションの応答をFig.3 に示す．応答より，外乱が入っている区間でも$y(k)$は漸近に$y_m(k)$に収束していることができた．したがって，エネルギー損失の影響を受ける場合，電気炉システムの実際温度を設定温度に何秒で調節できることがわかった．

6. あとがき

本稿では離散時間線形系のモデル追従形制御系の設計を示した．数値例を用いて，その有効性を確認した．本手法の特徴をまとめれば，以下のようになる．

1) シフト演算子zを導入し，zに関する多項式行列の簡単な代数演算で制御系が設計できる．
2) 本研究の制御理論をエネルギー損失は考慮した電気炉システムに実用するのを検討していき，電気炉システムに実用できることがわかった．

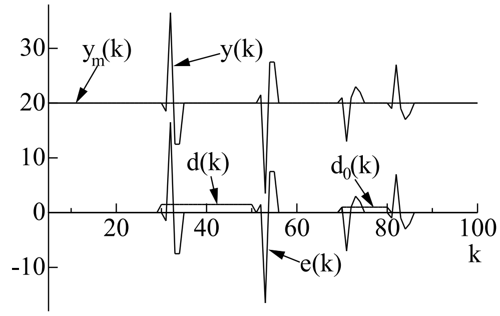

Fig. 3　Responses of the System

今後の課題として，本方法によって非線形系の離散時間モデル追従形制御系の設計へ拡張する方針である．

参考文献

1) 大久保重範：外乱を考慮した非線形系のモデル追従形制御系の設計,計測自動制御学会論文集, Vo1.21,No.8,792/799(1985)
2) 大久保重範：零点の安定配置を使った非線形モデル追従形制御系,計測自動制御学会論文集, Vo1.28,No.8,939/946(1992)
3) 大久保重範：非線形部に入力が含まれる場合の非線形モデル追従形制御系,計測自動制御学会論文集, Vo1.22,No.6,714/716(昭和61年6月)
4) 大屋，西村，米澤：ある非線形系のモデル規範形制御，計測自動制御学会論文集，Vo1.25,No.7,779/785(1989)
5) 美多勉：ディジタル制御理論，昭晃堂(1984)
6) 安居院，中嶋：ディジタルシステム制御理論，産報(1976)
7) 古田勝久:ディジタルコントロール，コロナ社(1991)
8) B. C. Kuo: Digital Control Systems, Holt, Rinehart and Winston, Inc.(1980)(古田,中野(監訳):ディジタル制御システム，ホルト.サウンダース(1984))

A　(54)式$|zI-A_s|$の導出過程

(51)式のA_sから，$|zI-A_s|$は次式になる．

$$|zI-A_s|=\left|\begin{array}{c} zI-A+BE_2C \\ G_1E_2C \\ -G_2 \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} BH_1 & BH_2 \\ zI - F_1 + G_1H_1 & G_1H_2 \\ 0 & zI - F_2 \end{vmatrix} \tag{77}$$

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ W & Z \end{vmatrix} = |Z||X - YZ^{-1}W| \tag{78}$$

よって，$|zI - A_s|$は次のようになる．

$$\begin{aligned} |zI - A_s| &= |zI - F_2| \\ &\cdot \begin{vmatrix} zE - A + BE_2C + BH_2[zI - F_2]^{-1}G_2C & BH_1 \\ G_1E_2C + G_1H_2[zI - F_2]^{-1}G_2C & zI - F_1 + G_1H_1 \end{vmatrix} \\ &= |zI - F_2||zI - F_1 + G_1H_1| \\ &\cdot|zI - A + B\{E_2 + H_2[zI - F_2]^{-1}G_2\}C \\ &-BH_1[zI - F_1 + G_1H_1]^{-1}G_1 \\ &\cdot\{E_2 + H_2[zI - F_2]^{-1}G_2\}C \\ &= |zI - F_2||zI - F_1||I + [zI - F_1]^{-1}G_1H_1| \\ &\cdot|zI - A||I + [zI - A]^{-1}B \\ &\cdot\{I - H_1(zI - F_1 + G_1H_1)^{-1}G_1\} \\ &\cdot\{E_2 + H_2[zI - F_2]^{-1}G_2\}C| \end{aligned} \tag{79}$$

ここで，

$$|I + XY| = |I + YX| \tag{80}$$

$$I - X(I + YX)^{-1}Y = (I + XY)^{-1} \tag{81}$$

の公式を使えば，以下のようになる．

$$\begin{aligned} |zI - A_s| &= |zI - F_1| \\ &\cdot|zI - F_2||I + H_1[zI - F_1]^{-1}G_1| \\ &\cdot|zI - A||I + [I - H_1\{(zI - F_1)[I \\ &+[zI - F_1]^{-1}G_1H_1\}-1G_1] \\ &\cdot\{E_2 + H_2[zI - F_2]^{-1}G_2\}C(zI - A)^{-1}B| \\ &= |zI - F_1||zI - F_2||zI - A||I \\ &+H_1[zI - F_1]^{-1}G_1||I \\ &+[I + H_1[zI - F_1]^{-1}G_1]^{-1} \\ &[E_2 + H_2[zI - F_2]^{-1}G_2]C(zI - A)^{-1}B| \\ &= |zI - F_1||zI - F_2||zI - A||I \\ &+H_1[zI - F_1]^{-1}G_1 + [E_2 \\ &+H_2[zI - F_2]^{-1}G_2]C(zI - A)^{-1}B| \end{aligned} \tag{82}$$

ここで，

$$V_s(z) = |V(z)||N_r|^{-1} \tag{83}$$

である．よって，$|zI - A_s|$はつぎのようになる．

$$\begin{aligned} |zI - A_s| &= |Q(z)|^2D(z)|I \\ &+N_r^{-1}Q^{-1}(z)D_d(z)R(z)N(z) \\ &-I + N_r^{-1}Q^{-1}(z)S(z).N(z)/D(z) \\ &= |Q(z)|^2D(z)|N_r^{-1}Q^{-1}(z)\{D_d(z) \\ &\cdot D(z)R(z) + S(z)\}N(z)/D(z)| \\ &= |Q(z)|^2D^{1-l}(z)|N(z)||N_r|^{-1} \\ &\cdot|Q(z)|^{-1}T(p)/D_m(p)| \\ &= |Q(z)|^2D^{1-l}(z)|N(z)||N_r|^{-1} \\ &\cdot|Q(z)|^{-1}T(p)/D_m(p)| \\ &= |Q(p)|T^l(p)D_m^l(p)V_s(z) \end{aligned} \tag{84}$$

以上より，

$$|zI - A_s| = |Q(p)|T^l(p)D_m^l(p)V_s(z) \tag{85}$$

が安定である．よって, 内部状態は有界である．