

# リカレンスプロットに基づくカオス時系列の統計的解析

## Statistical Analysis of Chaotic Time Series Based on Recurrence Plot

○木戸口 孝人、清水 能理、高橋 潤

Kidoguchi Takato, Shimizu Yoshimasa, Takahashi Jun

八戸工業大学

Hachinohe Institute of Technology

キーワード: カオス(Chaos)、サロゲート(Surrogate)、Chua回路(ChuaCircuit)、リカレンスプロット(Recurrence Plots)、ChaosTimes(ChaosTimes)

連絡先: 〒031-8501 青森県八戸市妙字大開88-1 八戸工業大学工学部システム情報工学科清水研究室  
清水能理 Tel: 0178-25-8135 Fax: 0178-25-1691 E-mail: shimizu@hi-tech.ac.jp

### 1 はじめに

工学において、多様なカオス応用を実現するには、人工的にカオスを発振させる電子回路の実装が不可欠である。人工的にカオスを発振させる場合を考えると、ローレンツ・モデルやエノン写像といった解析的な式で定義された力学系を用いるのが一般的である。<sup>[1]</sup>本研究では、カオス発生回路として、負性抵抗を有する Chua 回路に注目する。現在カオスを発振させるために利用されるカオスモデルは種々あるが、パラメータのとり値によっては系がカオスとなる値の範囲で周期性を示す窓を生じる場合がある。<sup>[3]</sup>そのため、カオスを利用したシステムにおけるパラメータの設定には十分注意しなければならない。一方、統計的解析におけるブーストラップ法に類似の概念を持つ、サロゲートデータ法(the method of surrogate data)と呼ばれるカオス性の検定手法が提案されている。<sup>[2]</sup>そこで、カオス発信回路における有効なパラメータ値を、カオス分岐図を用いて設定し、分岐パラメータ値における Chua 回路からの時系列信号に対して、サロゲートデータ法に基づい

てカオス性の判定を行う。そして、得られた有効なパラメータ値をリカレンスプロットを使用し、定性的にカオス性の判定をすることを目的とする。

### 2 問題提起

分岐パラメータに関して、分岐図を用いて系がカオスとなるパラメータ値を探索する方法を考える。分岐図とは、分岐パラメータを変化させた場合に起こる分岐を図に表わしたものである。<sup>[1,3]</sup>

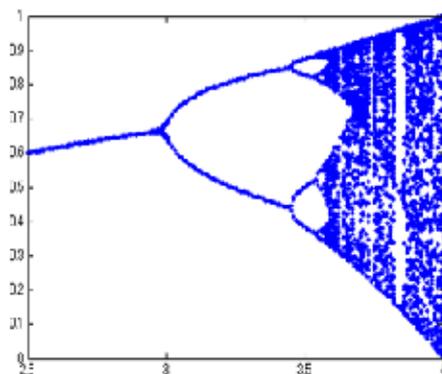


図1 ロジスティック写像の分岐図

図1のロジスティック写像の分岐図は横軸に分岐パラメータ、縦軸に周期点をとつ

たものである。このときのロジスティック写像の方程式は（１）式となる。

$$\left. \begin{aligned} X_{n+1} &= aX_n(1 - X_n) \\ 0 < a < 4, 0 < X_n < 1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $X(n)$ はこの式の変数であり 0 から 1 の間で定義されている。a は 0 から 4 までの値をとる任意の定数である。

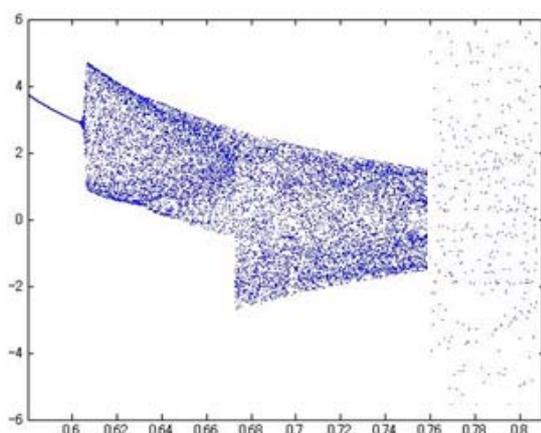


図 2 Chua 回路の分岐図

図 2 は Chua 回路の分岐図は、横軸に分岐パラメータ、縦軸に  $x$  値をとったものである。図 1 のロジスティック写像の分岐図は離散時間で窓が確認できるが、図 2 の Chua 回路の分岐図では連続時間で窓が確認し難い。このように、分岐図を用いた視覚的探索によるパラメータ値の設定をする際に、窓の予測困難性があげられる。したがって、Chua 回路を用いたシステムのパラメータ値を設定する場合、カオス性の検定を行う必要がある。そこで、サロゲートデータ法を用いて、パラメータ値のカオス性の判定を行い、さらに、より視覚的確認を容易にするため、リカレンスプロットを用いた定性的なカオス性の判定を行う。

### 3 サロゲートデータ法<sup>[2,6]</sup>

カオスかランダムノイズかの判断の重要な要因の一つに非線形性がある。時系列信号が非線形を有することを示すのは、時系列信号がカオスであることを示すよりも容易である。そこで、時系列信号に対する線形性を主体とした帰無仮説を採用し、これを棄却できれば、カオス時系列解析を用いて推定された特徴量の信頼性を向上できると考えられる。

具体的には、観測された時系列信号に対する線形確率過程の存在を帰無仮説として提示し、ある非線形統計量の推定を通じて帰無仮説を検定し棄却することで、時系列信号を生み出したダイナミクスにおける非線形の存在を示すのである。

実際に掲示される典型的な仮説は、

- (1) 時間的に全く無相関な(白色な)データであった。
- (2) 時間的には線形相関を持つような(有色された)データであった。
- (3) 時間的には線形相関があるようなデータ,ある種のスタティックで単調な非線形変換により観測することで得られたデータであった。

である。サロゲートデータ法では,上述の帰無仮説に従うようなサロゲートデータを多数作りだし,これらの統計的性質がオリジナルデータのそれと異なることを検定する。

これらの帰無仮説に基づいた時系列信号をサロゲートデータ(surrogate data)と呼ぶ。

これらのサロゲートデータを作り出す基本アルゴリズムは

- (1) RS(Random Shuffle)サロゲートデータ  
「観測された時系列信号は、時間的に全く無相関である」という帰無仮説に従う。

(2) FT (Fourier Transform) サロゲートデータ

「観測された時系列信号は、時間的に線形相関を持つ確率的データである」(頻度分布が保存されない) という帰無仮説に従う。

(3) AAFT (Amplitude Adjusted Fourier Transform) サロゲートデータ (ガウシアン・スケーリング (Gaussian Scaling) アルゴリズムとも呼ばれている)

「観測された時系列信号は、非線形確率過程から作り出されたが、観測する際に性的な単調非線形変換を施されたことにより得られたデータである」という帰無仮説に従う。

である。

3.1 FS (Fourier Shuffle) サロゲートデータ

前述の FT アルゴリズムは、その作成手順からパワースペクトルは完全に保存するものの、頻度分布を全く保存しないという特徴を有する。このことは、FT サロゲートでは、オリジナルの時系列信号には存在し得ない頻度分布を実現してしまうということを意味し、FT サロゲートのアルゴリズムを用いれば負の値も出現する。

そこで、サロゲートデータ作成のアルゴリズムとして、フーリエ・シャッフル (Fourier shuffle、以下 FS) アルゴリズムと呼ばれるサロゲートデータ作成のアルゴリズムが提案されている。FS サロゲートは、オリジナルデータを FS サロゲートは、オリジナルデータに従うように並べ換える。その結果、FS サロゲートは、オリジナルデータと同じ頻度分布を、従って、1 次統計量及び 2 次統計量のうち分散を完全に保存する。また、2 次統計量としての相関関数もほぼ保存される。

3.2 IAAFT (Iterative Amplitude Adjusted Fourier Transform) サロゲートデータ

前述の AAFT サロゲートアルゴリズムで

は、時系列データが有限である場合、相関関数などの 2 次統計量は完全に保存されない。サロゲートデータ法を導入する目的は、従来の時系列解析で用いられてきた自己相関関数を主体とする手法では非線形性を扱えないということを統計的に定量化することである。この観点からすると、1 次統計量を完全に保持することだけでなく、2 次統計量もオリジナルデータのそれに近いこと、もしくは同じことが望ましい。このような考え方に基づいて、自己相関関数の差がより小さいサロゲートデータを作成するために、イタレイティブ・AAFT サロゲートデータ (Iterative AAFT、以下 AAFT) アルゴリズムが提案されている。

## 4 リカレンスプロット

### 4.1 リカレンスプロットとは

カオス性を特徴づける統計量を時系列から解析するにあたり、あらかじめ時系列の定常性を定性的にとらえるために有効な手法である。リカレンスプロット法は、時系列の時間順序に関する情報、時系列の局所的な時間相関を視覚化する手法で、時系列データの周期性・非周期性や定常性・非定常性といった大局的情報構造を定性的に表現するための有効な解析手法である。[2,6,8]

リカレンスプロットを作るためには、まず、一辺の長さがアトラクタ上の点の総数  $N$  となるような 2 次元画像を用意する。次に、アトラクタ上の 2 点間距離

$$D(i, j) = |v(i) - v(j)| \quad (1)$$

を計算する。この  $D(i, j)$  に基づいて作成される  $N \times N$  画素の画像がリカレンスプロットである。リカレンスプロットの基本的な描画法には、

- (1) 適当な閾値  $\theta$  を定め、2 点間距離が  $D(i, j) < \theta$  となるときに、第  $(i, j)$  画素を描画する。
- (2)  $D(i, j)$  に基づいて  $v(i)$  に関する  $M$  個の

近傍点  $v(j)$  (但し、 $j \neq i$ ) のインデックス  $j$  の集合を求め、第  $(i, j)$  画素を描画する。

この 2 種類がある。

さらに、(1) 式で定義される 2 点間距離を

$$D_K(i,j) = \frac{D(i,j) - D_m}{D_M - D_m} \quad (2)$$

により正規化する。但し、 $D_M, D_m$  は各々  $D(i, j)$  の最大値、最小値である。この後、 $b$  ビットにて量子化し、各階調に疑似カラーを割り当てることで、リカレンスプロットのパターンを知覚しやすくすることができる。<sup>[2]</sup>

リカレンスプロットは 2 点間の相関の計算に距離の情報、時間経過に 2 次元平面を用いて表現するため、プロットした結果の空間的なパターンには、周期的な時系列データであれば周期的な空間パターンが現れ、周期的でなければ非周期的な空間パターンが現れる。

また、定常な時系列であればリカレンスプロットの空間パターン全体の質感が一様になり、逆に一様でないならば、対象の時系列データはシステムとして非定常であるか、システムの過渡状態であるか、観測時間がシステムの大局的構造をとらえるには短すぎるということなどが考えられる。<sup>[8]</sup>

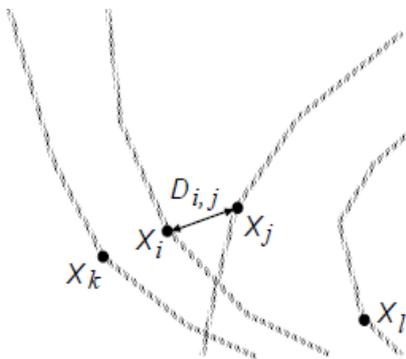


図 3 状態空間内のデータ

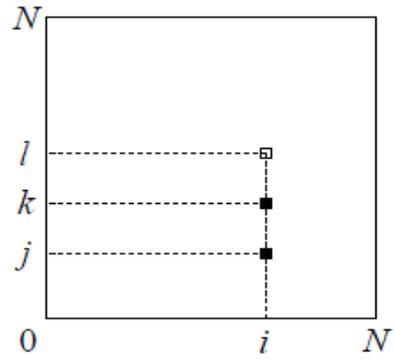


図 4 リカレンスプロットの原理

#### 4.2 周期的か、非周期的か<sup>[8]</sup>

周期的な時系列データであるサインカーブを図3に、非周期的な時系列データであるランダムウォークのリカレンスプロットを図4に示します。プロットした結果の空間的なパターンには、周期的な時系列データであれば周期的な空間パターンが現れ、周期的でなければ非周期的な空間パターンが現れることが期待されます。実際に結果をみると、確かに周期的データでは同じパターンが繰り返し 2 次元平面全体に現われており、非周期的データではそのような周期的な空間パターンが現れていないことがわかる。

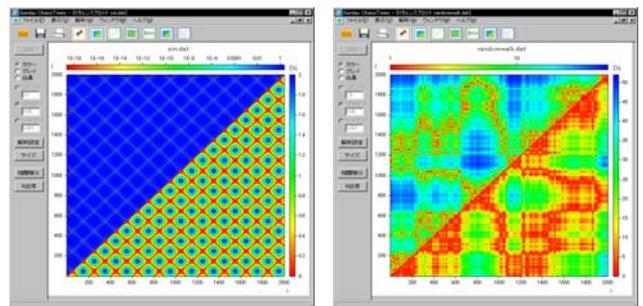


図 5 周期的 (サインカーブ)      図 6 非周期 (ランダムウォーク)

### 4.3 定常的か、非定常的か<sup>[8]</sup>

定常的な時系列データであるロジスティック写像を図5に、非定常的な時系列データであるベルヌーイ写像のリカレンスプロットを図6に示します。定常な時系列データの場合リカレンスプロットの空間パターン全体の質感が一様になることが期待され、実際に結果を見ると、確かに定常的なデータのプロット全体の質感はほぼ一様であると言えます。それに対して、非定常的なデータではプロット全体の質感は一様であるとは言えません。時系列データそのものだけを観測しても変動するパラメータの様子を見ることはできませんが、リカレンスプロット解析により、このような興味深い結果を得ることができます。<sup>8)</sup>

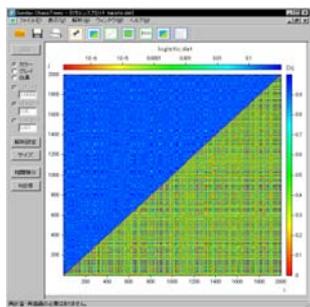


図7 定常的（ロジスティック写像）

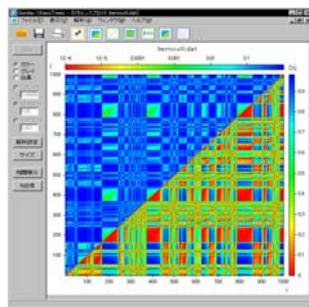


図8 非定常的（ベルヌーイ写像）

## 5 提案手法

Chua回路の分岐図を用いて推定したパラメータ値が有効か、カオス性の検定を行う。カオス判定法のリアプノフ指数、相関次元などの特徴量だけでは、カオス性を示すには不十分なので決定論的であることを示すサロゲートデータ法を用いる。

(1) Chua回路における分岐パラメータ  $G$  の

値を変化させていき、各値のときの Chua 回路から出力される時系列信号を計算する。

(2) 横軸に  $G$  の値、縦軸に出力信号の状態を取る。各  $G$  の値において、(1)で得られた信号の値を重ねてプロットし、カオス分岐図を作成する。

(3) (2)で作成した分岐図の形態をもとに、時系列がカオスの振舞いをする領域の分岐パラメータ値の範囲を推定する。

(4) 推定した領域において特定した分岐パラメータ値を用いたときの時系列データに対して、サロゲート法を適用し、得られたサロゲートデータを、リカレンスプロットを用いて視覚的に検定を行うことで、定性的にカオス性の検定を行う。

## 6 シュミレーション

カオス時系列解析システムである ChaosTimes を利用して求めた Chua 回路分岐パラメータ値 0.70 と 0.6981 をとる場合の状態  $x$  の時系列信号と、各サロゲートデータ変換信号のリカレンスプロットを示す。使用ソフトは、カオス時系列解析システム Sunday ChaosTimes を使用した。

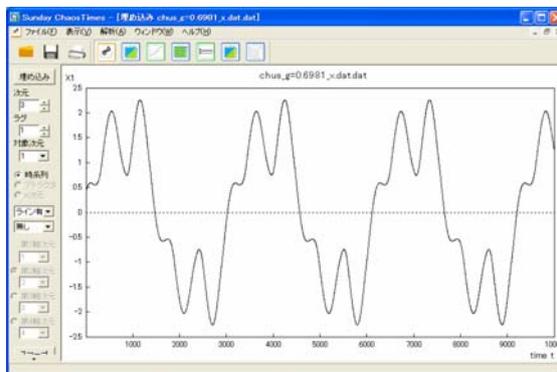


図9 Chaos Times 実行画面

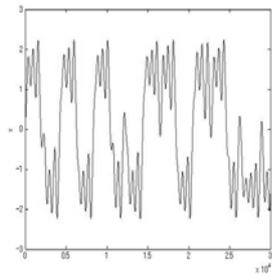


図 10 Chua 回路  $x$  の  
時系列信号 ( $G=0.70$ )

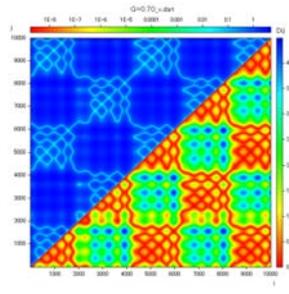


図 11 Chua 回路状  
 $x$  のリカレンスプロ  
ット ( $G=0.70$ )

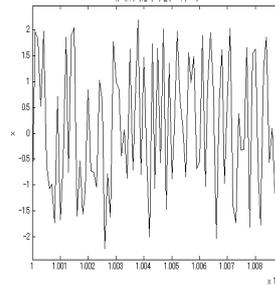


図 16 RS サロゲート  
データ変換信号  
( $G=0.6981$ )

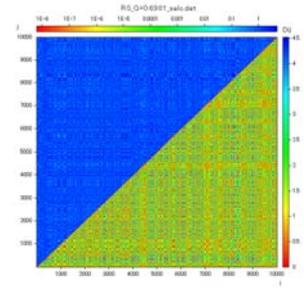


図 17 RS サロゲー  
データ・リカレンス  
プロット ( $G=0.6981$ )

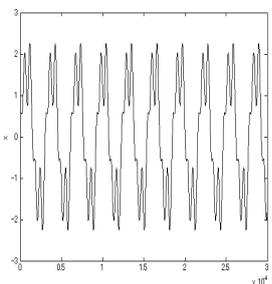


図 12 Chua 回路  $x$  の  
時系列信号 ( $G=0.6981$ )

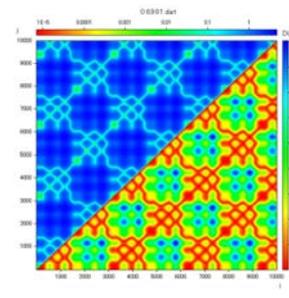


図 13 Chua 回路状  
 $x$  のリカレンスプロ  
ット ( $G=0.6981$ )

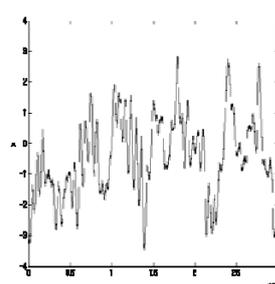


図 18 FT サロゲート  
データ変換信号  
( $G=0.70$ )

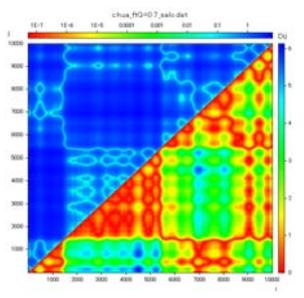


図 19 FT サロゲー  
データ・リカレンス  
プロット ( $G=0.70$ )

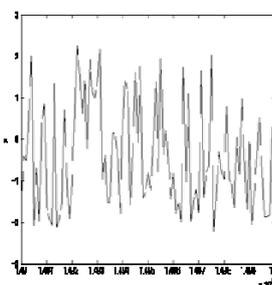


図 14 RS サロゲート  
データ変換信号  
( $G=0.70$ )

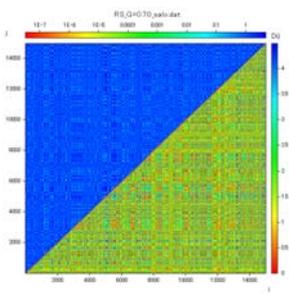


図 15 RS サロゲー  
データ・リカレンス  
プロット ( $G=0.70$ )

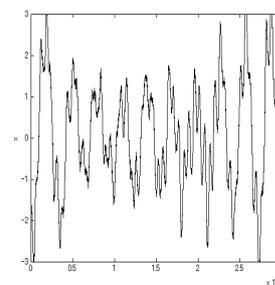


図 20 FT サロゲート  
データ変換信号  
( $G=0.6981$ )

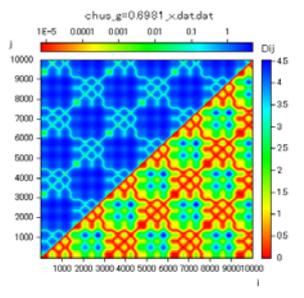


図 21 FT サロゲー  
データ・リカレンス  
プロット ( $G=0.6981$ )

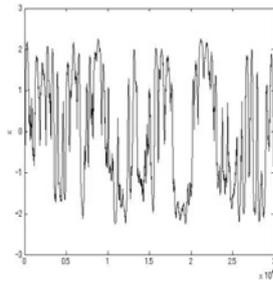


図 22 AAFT サロゲートデータ変換信号 (G=0.70)

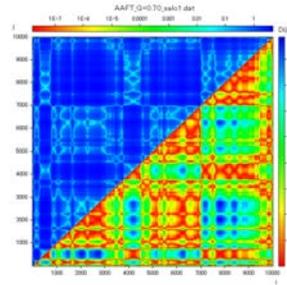


図 23 AAFT サロゲートデータ・リカレンスプロット (G=0.70)

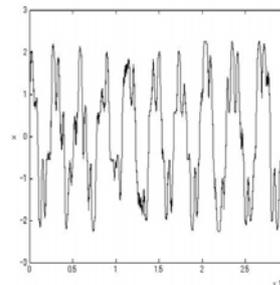


図 28 FS サロゲートデータ変換信号 (G=0.6981)

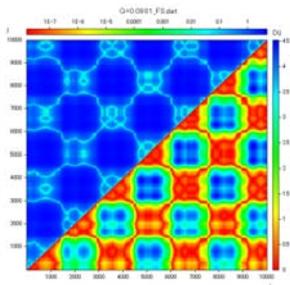


図 29 FS サロゲートデータ・リカレンスプロット (G=0.6981)

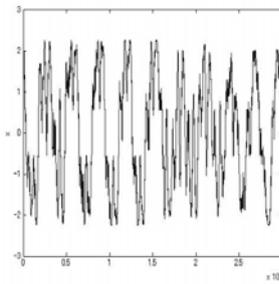


図 24 AAFT サロゲートデータ変換信号 (G=0.6981)

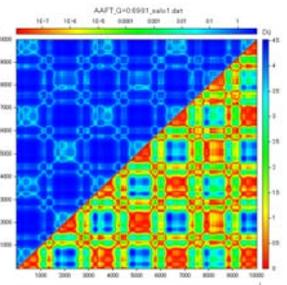


図 25 AAFT サロゲートデータ・リカレンスプロット (G=0.6981)

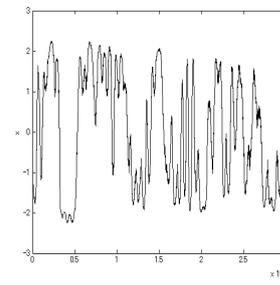


図 30 IAAFT サロゲートデータ変換信号 (G=0.70)

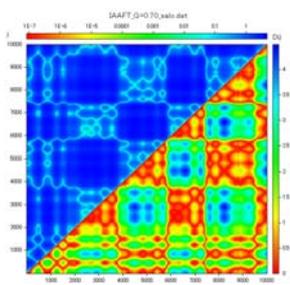


図 31 IAAFT サロゲートデータ・リカレンスプロット (G=0.70)

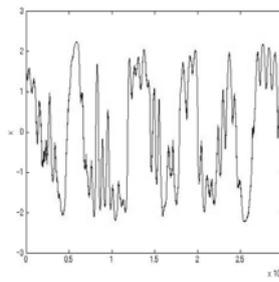


図 26 FS サロゲートデータ変換信号 (G=0.70)

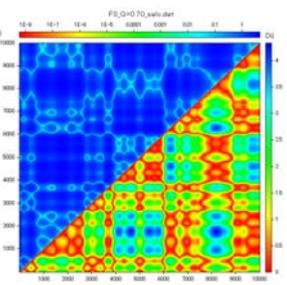


図 27 FS サロゲートデータ・リカレンスプロット (G=0.70)

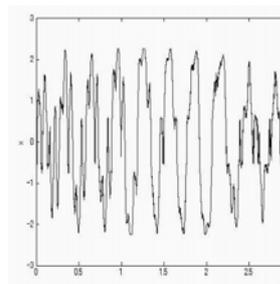


図 32 IAAFT サロゲートデータ変換信号 (G=0.6981)

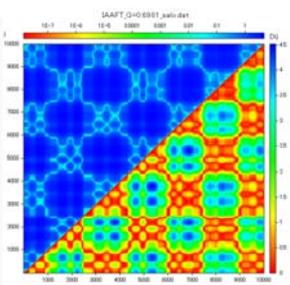


図 33 IAAFT サロゲートデータ・リカレンスプロット (G=0.6981)

## 7 考察

リカレンスプロットによる検定  
サロゲートデータをリカレンスプロットにより視覚的に判定した結果。

表 1

分岐パラメータ	周期性	フラクタル	カオス性
G=0.70	○	○	○
G=0.6981	○	○	×

○：視認できる ×：視認できない

表 2 リカレンスプロットによるカオス性の有無

アルゴリズム	G=0.70	G=0.6981
RS サロゲート	○	×
FT サロゲート	○	×
AAFT サロゲート	○	×
FS サロゲート	○	×
IAAFT サロゲート	○	×

○：カオス性の示唆 ×：カオス性の否定

各サロゲートデータのリカレンスプロットを見ると、分岐パラメータ値  $G=0.70$  のとき、リカレンスプロットはカオスの振る舞いが視覚的に確認できた。また、 $G=0.6981$  の場合はカオスの振る舞いを視覚的に確認することはできなかった。

時系列データとサロゲートデータから定性的にカオス性の判定はできるが、リカレンスプロットを用いると、視覚的で、容易に判定を行うことができた。

## 8 まとめ

カオス発生回路として、負性抵抗を有する Chua 回路に注目し、サロゲートデータ法を用いたカオス性の検定を行った。そこで、カオス発振回路における有効なパラメータ値を、カオス分岐を基に推定し、サロゲート

ト法に基づいて得たデータをリカレンスプロットを使用しカオス性の判定を行った。周期性や、フラクタルが視認でき、カオス性の検定を定性的に行うことができた。

## 参考文献

- 1) 鈴木 昱雄:カオス入門, コロナ社, 2000
- 2) 合原一幸, 池口徹, 山田泰司, 小室元政:カオス時系列解析の基礎と応用, 産業図書, 2000
- 3) 合原一幸:カオスセミナー, 海文堂出版, 1994
- 4) 藤井恭平, 清水能理:カオス発生回路を用いた秘匿通信システムの製作, 平成 20 年度 第 1 回情報処理学会東北支部研究会, 講演資料, セッション 1, 講演番号 4, 2008.12
- 5) 目黒友紀, 清水能理:カオス制御を応用したカオス同期化システム, 平成 20 年度 第 2 回情報処理学会東北支部研究会, 講演資料, セッション 2, 講演番号 9, 2008.12
- 6) 元井和征, 清水能理:カオス分岐と窓に関する考察, 平成 20 年度 第 4 回情報処理学会東北支部研究会, 講演資料, 2009.2
- 7) カオス時系列解析システム ChaosTimes  
Copyright (C)1996-200 AIHARA Electrical Engineering Co., Ltd.  
「<http://www.aihara.co.jp/rdteam/chaos-times/index-j.html>」
- 8) Sunday ChaosTimes による解析の実例  
「[http://www.aihara.co.jp/rdteam/sunday-chaostimes/sundayct-examples.pdf#search='sunday chaos times'](http://www.aihara.co.jp/rdteam/sunday-chaostimes/sundayct-examples.pdf#search='sunday%20chaos%20times')」