計測自動制御学会東北支部　第 252 回研究集会（2009. 10. 30）

資料番号 252-17

モデル予測制御による不安定系の制御

Control of Unstable System by Model Predictive Control

○田中千尋*, 有我祐一*, 遠藤茂*

○ Chihiro Tanaka*, Yuichi Ariga*, Shigeru Endo*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード：モデル予測制御（Model Predictive Control），不安定系（Unstable System），組込みシステム（Embedded System），

連絡先：〒992-0037　米沢市城南 4-3-16　山形大学工学部応用生命システム工学科　有我研究室

田中千尋, TEL&FAX 0238-26-3764, E-mail：chihiro002@yahoo.co.jp

1.　はじめに

今日，航空機は輸送だけではなく航空写真の撮影，農薬の散布など数多くの場で活躍している．ラジコン技術を駆使して，先に述べた作業をリモートコントローラーにより行っている．しかし，ラジコンをコントロールするためのテクニックを習得するには多くの時間を必要とし，また操作の訓練中に航空機を損傷することも考えられる．そこで，自律制御で動作する航空機の研究開発が行われており，実際に航空写真の撮影や農薬散布を行っている．このような作業では空中で静止するホバリングという動作が必要となり回転翼機が有利である．しかし，航続距離や速度は固定翼機には及ばない．実機による固定翼機のホバリングは不可能であるが，軽量なラジコンでは自重が軽いため可能である．

本研究では，固定翼機の特長であるホバリングを固定翼機で実現させることを目的とする．実際にホバリングをさせるために，どのようにモデルを考えるかを示す． 本来なら3次元空間で，3軸とそれぞれの回転を考えるので6個の制御量がある．今回は，６個の制御量を制御するのは困難であるので，制御対象の機体を台車に置き換える．制御系設計ではモデル予測制御を使い設計を行う.台車は，重力で引っ張られている機体に重力と同じ力を出す制御入力を与えなくてはいけない. 常に外力を受けている不安定システムで, 一定時間毎に制御入力が決まるモデル予測制御で制御ができるかをシミュレーションにより検証していく.

また，ラジコンに搭載することを考慮し，マイコンレベルのスペックで制御器が実現可能か検証する．

2.　制御対象

2.1　力学モデル

台車装置のモデル化を行う．台車の質量をMとし，摩擦係数をc，モーターのトルク定数をTと定義する．各パラメータの定義をTable.1に示す.

Table.1: Definition of Parameter

M	Weight of Cart	$1.33[kg]$
c	frictional coefficient	$212.8[Ns/m]$
T	Torque coefficient of Motor	$159.6[N/V]$

台車の運動方程式を導出すると次式となる．

$$M\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)=Tu(t) \qquad (1)$$

2.2 伝達関数

2.1節の式(1)より，台車の伝達関数をラプラス変換で求める．

$$G(s)=\frac{x(s)}{u(s)}=\frac{\frac{T}{M}}{s(s+\frac{c}{M})} \qquad (2)$$

ここで，各パラメータを式(2)に代入すると

$$G(s)=\frac{120}{s(s+160)} \qquad (3)$$

である．

3. モデル予測制御

3.1 特長

モデル予測制御には以下の特長がある．

1. 多変数制御問題を自然に扱うことができる．
2. アクチュエータの制約を考慮できる．

主に石油化学産業で使用されてきたが，現在ではプロセス産業でも使用されている．プラントでの使用が多いため，組込みシステムで性能が発揮できるか分からない．

3.2 制御の流れ

制御の流れをFig.1に示す．離散時間とし，現在時刻をkで表す．現時刻におけるプラントの出力を$y(k)$とし，図では過去の出力の軌道を示してしる．また，理想的にはその出力が従うべき軌道である任意の時刻tにおける設定値軌道を$s(t)$で表す．設定値軌道と異なるものに参照軌道がある．これは，現時刻の出力$y(k)$から出発し，外乱などが生じた後，プラントが設定値軌道に戻る理想的な軌道$r(t\,|\,k)$を表す．

参照軌道は現時刻の出力から設定値に指数関数的に近づける(他の選択も可能である)．この時，応答の速さを決める指数関数の時定数をT_{ref}とする．現在の誤差が

$$\varepsilon(k)=s(k)-y(k) \qquad (4)$$

であり，出力が参照軌道に正確に追従するのであれば，iステップ後の誤差が

$$\varepsilon(k+i)=e^{-iT_s/T_{ref}}\,\varepsilon(k) \qquad (5)$$
$$=\lambda^i\varepsilon(k) \qquad (6)$$

になるように参照軌道は選ばれる．ただし，T_sはサンプリング周期で，$\lambda=e^{-iT_s/T_{ref}}$である．ここで$0<\lambda<1$とおいた．参照軌道は次式で定義した．

$$r(k+i\,|\,k)=s(k+i)-\varepsilon(k+i) \qquad (7)$$
$$=s(k+i)-e^{-iT_s/T_{ref}}\,\varepsilon(k) \qquad (8)$$

表記$r(k+i\,|\,k)$は，参照軌道は時刻kに依存することを意味している．設定値軌道と同様に参照軌道も他の選択が可能である．

予測コントローラは内部モデルを有している．しれは現時刻から始まってある未来の予測ホライゾンにわたるプラントの動作を予測するために用いられている．

最も簡単な場合として，プラント出力が予測ホライゾンの終点である時刻$k+H_p$で要求された値$r(k+H_p\,|\,k)$となるような入力軌道を選ぶ．この時，時刻$k+H_p$で単一の一致点を持つと言う．しかし，これを達成する入力軌道はいくつか存在するが，ここでは最も入力エネルギーの少ないものを選択した．

ひとたび未来の入力軌道が選ばれたならば，その軌道の「一番目の要素」だけを入力信号としてプラントに印加する．そして，1サンプリング周期後，出力の測定，予測，そして入力軌道の決定という全体のサイクルが繰り返される．

3.3　最適入力

一致点$k+H_p$をもち，1つのパラメータ$\hat{u}(k|k)$を選ぶ場合，内部モデルがプラントの自由応答$\hat{y}_f(k+H_p|k)$を予測するために用いられる．ここで自由応答とは，未来の入力軌道が最新の値$u(k-1)$のままであるとしたとき，一致点において得られる応答のことである．伝達関数あるいは差分方程式モデルの場合，現時刻からn個過去までの入出力データが必要となる．ここnは伝達関数の次数である．

単位ステップ信号を印加してH_pステップ後のシステムの応答を$S(H_p)$とする．時刻$k+H_p$におけるその予測出力は

$$\hat{y}(k+H_p|k)=\hat{y}_f(k+H_p|k)+S(H_p)\Delta\hat{u}(k|k) \tag{9}$$

となる．ただし，

$$\Delta\hat{u}(k|k)=\hat{u}(k|k)-u(k-1) \tag{10}$$

であり，現在の入力$u(k-1)$から予測された入力$\hat{u}(k|k)$の変化分である．

そして，

$$\hat{y}(k+H_p|k)=r(k+H_p|k) \tag{11}$$

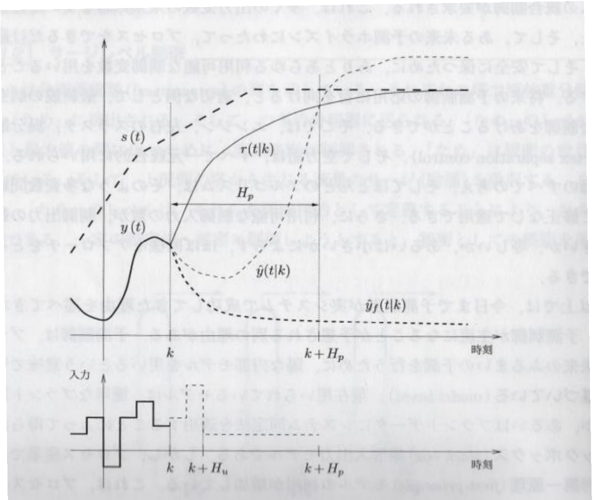


Fig.1 Model Predictive Control

としたいので，最適な入力変化は

$$\Delta\hat{u}(k|k)=\frac{r(k+H_p|k)-\hat{y}_f(k+H_p|k)}{S(H_p)} \tag{12}$$

で与えられる．

3.4　一致点

予測ホライゾンとは未来のプラント振る舞いを予測する区間であるが，3.2節では一致点を予測ホライゾンの終点としていた．しかし，一致点は1つだけ選ぶ必要は無く，予測ホライゾンの間で複数の一致点が設定されるのが普通である．この場合，利用できる変数の数よりも，満足すべき方程式のほうが多くなってしまい，一般には正確に解くことは出来ない．そこで最小二乗解を用いる．

$$\sum_{i\in P}\left[r(k+i|k)-\hat{y}(k+i|k)\right]^2 \tag{13}$$

式(9)は誤差の二乗和をとっており，これが最小化されるような解が入力軌道となる．

一致点がc個の場合，それらに対応する参照軌道の値を$r(k+P_1|k)$，$r(k+P_2|k)$，…，$r(k+P_c|k)$とする．ただし，$P_c\le H_p$とする．$i=1,2,..,c$に対して

$$\hat{y}(k+P_i|k)=r(k+P_i|k) \tag{14}$$

としたいので，次の連立方程式を解くことによって，$\hat{u}(k|k)$を選ぶ．

$$r(k+P_1|k)=\hat{y}_f(k+P_1|k)+S(P_1)\Delta\hat{u}(k|k) \tag{15}$$

$$r(k+P_2|k)=\hat{y}_f(k+P_2|k)+S(P_2)\Delta\hat{u}(k|k) \tag{16}$$

$$\vdots$$

$$r(k+P_c|k)=\hat{y}_f(k+P_c|k)+S(P_c)\Delta\hat{u}(k|k) \tag{17}$$

この方程式の最小二乗解が近似解として用いられる．

ここで次のベクトルを定義する．

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} r(k+P_1\mid k) \\ r(k+P_2\mid k) \\ \vdots \\ r(k+P_c\mid k) \end{bmatrix},\quad \mathbf{Y_f}=\begin{bmatrix} \hat{y}_f(k+P_1\mid k) \\ \hat{y}_f(k+P_2\mid k) \\ \vdots \\ \hat{y}_f(k+P_c\mid k) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} S(P_1) \\ S(P_2) \\ \vdots \\ S(P_c) \end{bmatrix} \tag{18}$$

MATLABでは，最小二乗解はバックスラッシュオペレータを用いて次のように求めることができる．

$$\Delta\hat{u}(k\mid k)=\mathbf{S}\setminus(\mathbf{T}-\mathbf{Y_f}) \tag{19}$$

3.4　制御ホライゾン

より複雑な未来入力軌道を許容する場合，入力は最初の制御ホライゾン H_u ステップにわたり変化出来るとする．よって，$\hat{u}(k|k)$，$\hat{u}(k+1|k)$，…，$\hat{u}(k+H_u-1|k)$ を選ばなくてず， $\hat{u}(k+H_u-1|k)$ ＝ $\hat{u}(k+H_u|k)$ ＝ $\cdots$ ＝ $\hat{u}(k+H_p-1|k)$ とする．ただし， $H_u<H_p$ とする．時刻 $k+P_i$ における予測出力は，

$$\begin{aligned}
&\hat{y}\ (k+P_i\mid k)= \\
&\hat{y}_f(k+P_i\mid k)-H(P_i)[\hat{u}(k\mid k)-u(k-1)] \\
&+H(P_i-1)[\hat{u}(k+1\mid k)-u(k-1)]+\ldots \\
&+H(P_i-H_u+2)[\hat{u}(k+H_u-2\mid k)-u(k-1)] \\
&+S(P_i-H_u+1)[\hat{u}(k+H_u-1\mid k)-u(k-1)]
\end{aligned} \tag{20}$$

で与えられる．ただし，

$$H(j)=S(j)-S(j-1) \tag{21}$$

は j ステップ後のシステムの単位インパルス応答係数である．ステップ応答係数ではなく単位インパルス係数を用いた理由は，それぞれの入力 j ステップ後のシステム $\hat{u}(k\mid k)$，$\hat{u}(k+1|k)$，…，$\hat{u}(k+H_u-2\mid k)$ は1サンプリング区間に対してのみ印加されると仮定しているからである．最後の1つの項 $\hat{u}(k+H_u-1|k)$ のみステップ P_i まで変化しない．その影響はステップ応答係数 $S(P_i-H_u+1|k)$ を乗じることで得られる．

システムが厳密にプロパーで仮定しているので $H(0)=0$，$S(0)=0$ である．そして， $j<0$ に対しては，因果性より $H(j)=0$，$S(j)=0$ である．ここで式(22)より式(21)は次のように書き直される．

$$\begin{aligned}
&\hat{y}\ (k+P_i\mid k)= \\
&\hat{y}_f(k+P_i\mid k)+S(P_i)\Delta\hat{u}(k\mid k) \\
&+S(P_i-1)\Delta\hat{u}(k+1\mid k)+\cdots \\
&+S(P_i-H_u+1)\Delta\hat{u}(k+H_u-1\mid k)
\end{aligned} \tag{22}$$

全ての一致点における予測出力に対する方程式を行列・ベクトルで表現すると，

$$\mathbf{Y}=\mathbf{Y_f}+\mathbf{\Theta}\mathbf{\Delta U} \tag{23}$$

が得られる．ただし，

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} \hat{y}(k+P_1\mid k) \\ \hat{y}(k+P_2\mid k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+P_c\mid k) \end{bmatrix},\quad \mathbf{\Delta U}=\begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k\mid k) \\ \Delta\hat{u}(k+1\mid k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k+H_u-1\mid k) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Theta}=\begin{bmatrix} S(P_1) & S(P_1-1) & \cdots & S(1) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S(P_2) & S(P_2-1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & S(1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S(P_c) & S(P_c-1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & S(P_c-\mathrm{H}_u+1) \end{bmatrix} \tag{24}$$

である．ここで $\mathbf{Y}=\mathbf{T}$ としたいが，正確に行うには変数の数が十分ではないので, 次式の最小二乗解を計算する．

$$\Delta\mathbf{U}=\mathbf{\Theta}\backslash[\mathbf{T}-\mathbf{Y_f}] \tag{25}$$

前述したように，ベクトル $\Delta\mathbf{U}$ の最初の要素 $\Delta\hat{u}(k\,|\,k)$ を選び，それを用いてプラントに印加する入力を構成する．

$$u(k)=\Delta\hat{u}(k\,|\,k)+u(k-1) \tag{26}$$

そして，次にステップにおいて，プラント出力 $y(k+1)$ が測定されたら，この一連の計算を繰り返す．

4.　シミュレーション

台車をモデル予測制御によって制御できるか明らかにするためシミュレーションによる検証を行った．

4.1　台車が垂直常態での制御

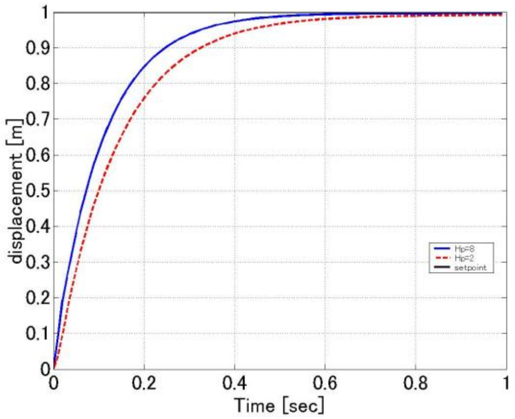
台車を垂直に置いた状態で $1[m]$ 上に上昇させるシミュレーションを示す．制御対象はホバリングを考えているため重力に引っ張られている状態にある．そこで，入力電圧から重力分の出力にあたる電圧を引いている．

モデル予測制御では，設定値軌道，参照軌道，予測ホライゾン，制御ホライゾンの5つのパラメータがある. 設定値軌道は時刻0[sec]の時に $1[m]$ 動かす軌道，参照軌道は式(8)で与えた．

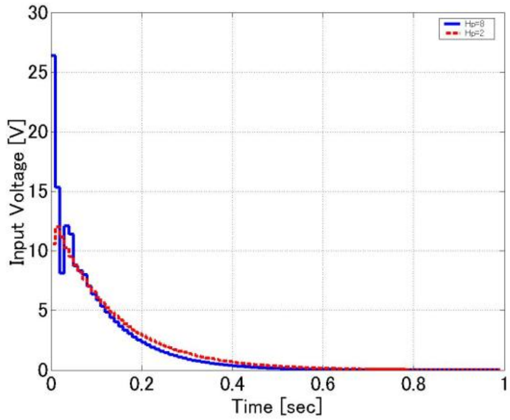
一致点，制御ホライゾン，予測ホライゾンを変化させることにより制御性能を検証する．

まず，制御ホライゾンを1ステップとし，制御ホライゾンは一致点が1つで， $H_p=3$, $H_p=8$ における出力と入力電圧をFig.3に示す．

次に，一致点が3つ， $H_p=[2\quad 3\quad 4]^T$ と，一致点が4つ, $H_p=[2\quad 4\quad 6\quad 8]^T$ の出力と入力電圧をFig.に示す．更に上述の条件で制御ホライゾンを3ステップに設定した結果をFig.5, Fig.6に示す．

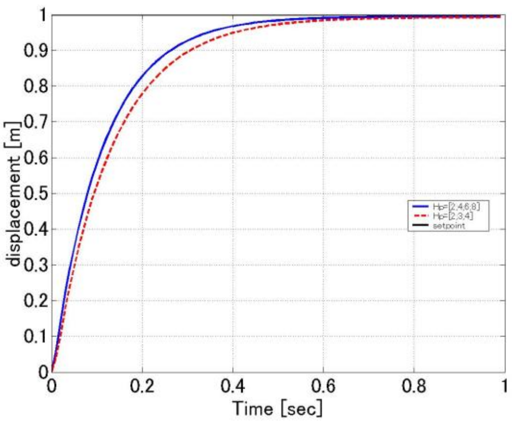


(a)Displacement

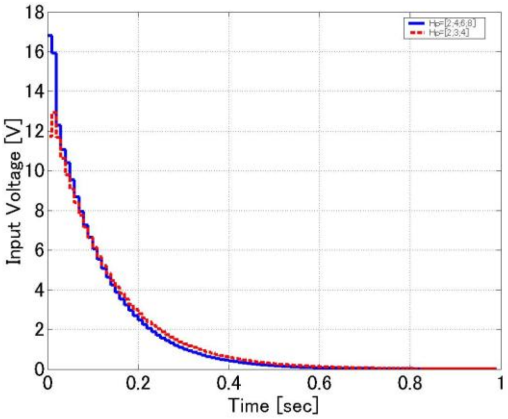


(b)Input Voltage

Fig.3 One coincidence point

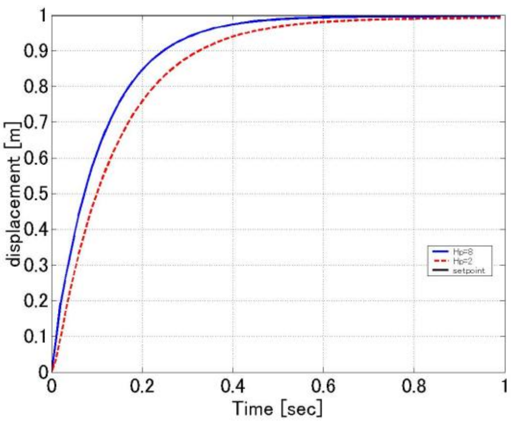


(a)Displacement

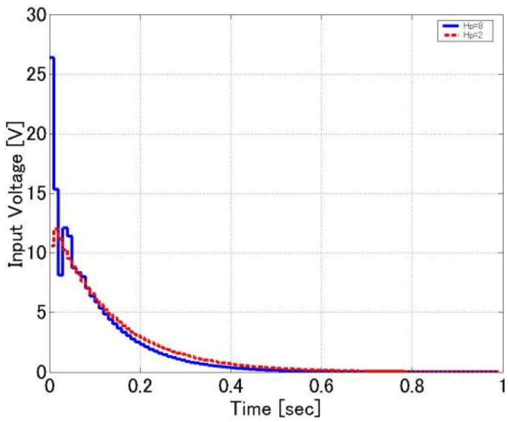


(b)Input Voltage

Fig.4 Multi coincidence point

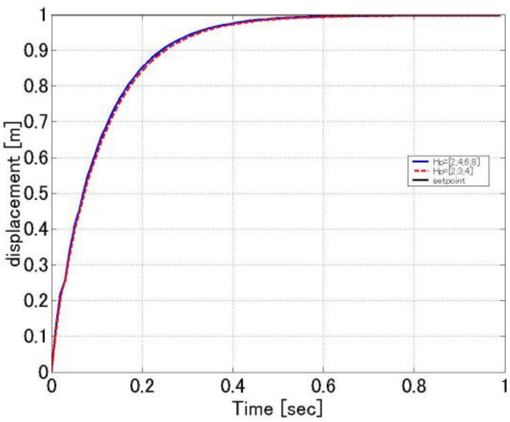


(a)Displacement

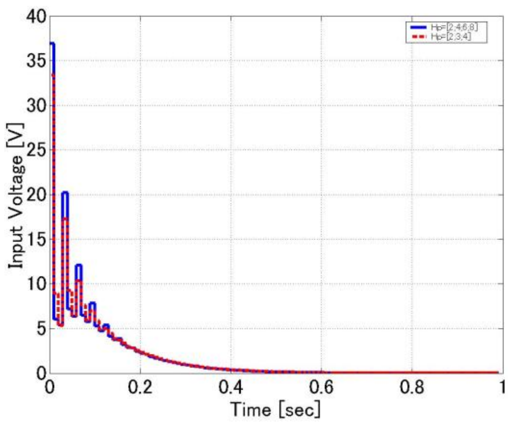


(b)Input Voltage

Fig.5 One coincidence point of $H_u = 3$



(a)Displacement



(b)Input Voltage

Fig.6 Multi coincidence point of $H_u = 3$

4.2　シミュレーションによる検証

　この制御対象で，Fig.3～Fig.6の全ての結果から言えることは，予測ホライゾンを現時刻から遠い未来まで選択した場合と，近い未来を選択した場合では，近い未来を選択したほうが，制御性能が良いことが分かった．一致点は，1つよりも複数個選択し，且つ制御ホライゾンを長く選択したほうが制御性能が良いという結果が得られた．しかし，制御性能を上げるようなパラメータを設定しようとすると，演算量が増えてしまう事が式(25)より分かる．制御性能の結果をTable.2に示す．

重力を再現するために入力電圧から重力分の電圧を引いているが，設定値軌道まで到達している．モデル予測制御は外乱に対して有効であることが分かる．

Table.2: Result of Simulation

制御ホライゾン / 一致点	1step	3step
3step	③	③
8step	⑦	⑦
2,3,4step	⑤	①
2,4,6,8step	⑥	②

5.　おわりに

本研究では，不安定系の制御をモデル予測制御用いて，シミュレーションにより検証した．その結果，モデル予測制御は外力の働く不安定システムでも制御が行えることが確認できた．しかし，制御性能を上げるようなパラメータを設定しようとすると，演算量が増えてしまう事が式(25)より分かる．

今後は，制御性能と演算量を実際にマイコンへ搭載することを考えた制御系設計を行う．さらに実機による検証を行う予定である．

参考文献

1) jan M. Maciejowski(著), 足立修一・菅野政明(訳) : モデル予測制御, 東京電機大学出版局, (2005)

2) 野波健蔵,西村秀和 : MATLAB による制御理論の基礎, 東京電機大学出版局, (1998)

3) Jacques Richalet : WHY PREDICTIVE CONTROL, 計測と制御, 43-9, pp.654-664, (2004)