

## 道路交通流の物理的性質 (V)

—  $V$ - $L$  指数側における定数  $\beta$  及び  $L_0$  についての考察 —

Physical Properties of Road Traffic Flow (V)

Discussions on the Constants  $\beta$  and  $L_0$  of  $V$ - $L$  Exponential Law

高木 相

東北大学名誉教授

Tasuku Takagi

Professor Emeritus, Tohoku University

キーワード: 交通流,  $V$ - $L$  指数則, 交通流量, 交通容量,

連絡先: 〒981-0952 仙台市青葉区中山 5-2-20

E-mail: tasuku@sirius.ocn.ne.jp

### 1. はじめに

交通流の車速度-車頭距離 ( $V$ - $L$ ) の関係が

$$L = L_0 \exp(\beta V) \quad (1)$$

( $L$ : 車頭距離(m),  $L_0$ : 最短車頭距離(m) (車列停止時),  $\beta$ : 定数,

$V$ : 速度 (m/s))

なる関係にあることは、これまでの車速度  $V$  と車頭時間  $T$  の測定と解析から明らかになった<sup>1)~5)</sup>。文献 1)~3) は (1) 式が成立するという仮定のもとに、ショックウエーブの一般的な伝搬速度を導出し、これを交差点に適用した結果、すでに幾何学的に平均化線形  $t \cdot s$  ダイアグラムから求められている結果と一致したことを述べている。このことは (1) 式が実際に成立するというを示唆しているものと解釈できる。

文献 4) と 5) は  $V$ - $L$  指数則が成立することを多くの測定とデータ解析の結果から実証したものである。測定パラメータは車速度  $V$  と車頭時間  $T$  の 2 つである。車頭距離  $L$  は  $L = TV$  である。

本文は (1) 式の  $V$ - $L$  指数則の定数  $\beta$  と  $L_0$  は如何なる意味をもつのかを検討する。

本文のサブタイトル「 $V$ - $L$  指数側における定数  $\beta$  及び  $L_0$  についての考察」は交通流のすべての特性が (1) 式の  $\beta$  と  $L_0$  なる定数が実際の交通流とどのように絡んでいるかを明らかにすることを意味している。

道路交通問題でわれわれが最終的に関心をもつのは車頭距離 (車間距離) ではなく、交通流量 ( $q$ ) である。交通流の最適化とは流量の最適化である。流量は目視できる量ある。流量  $q$  は全ての教科書で

$$q = kV \quad (2)$$

と書かれている。 $k$  は車密度、 $V$  は車速度である。しかし (2) 式が成立する根拠 (理論) を明確に記述した教科書を筆者は知らない。

車密度  $k$  と車流量  $q$  は (1) 式から導出される (後述)。

本文では先ずこれまでの測定結果で (1) 式の定数  $\beta$  及び  $L_0$  について検討することとする。

$V$ ,  $T$  と流量  $q$  との関係が明らかになれば、交通需要に応じた交通信号の制御のあり方、最も経済的な物流のあり方、交通流の予測 (渋滞予測) が可能となると考えられる。

## 2. V-L 指数則からの車密度 $k$

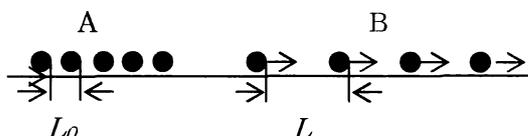


図1. 車列 (A: 渋滞時、B: 走行時)

図1は車列を模した図である。Aは停止車列で車頭距離は最短である。これを平均して  $L_0$  としている。Bは走行中の車列で車頭距離の平均を  $L$  としている。

車密度  $k$  を  $L_0$  と  $L$  の比で定義する。すなわち、

$$k = \frac{L_0}{L} \quad (3)$$

である。そうすると (1) 式から、

$$k = e^{-\beta V} \quad (4)$$

となる。筆者らの従来からの測定から得た  $k \cdot V$  指数則は、やはり  $k$  を (3) 式で定義して、

$$V = V_M e^{-\alpha k} \quad (5)$$

である<sup>6)7)</sup>。(4)式は速度からみた車密度の式であり、(5)式は車密度  $k$  からみた速度の式である。速度と車密度のどちらに主導権が存在するかということからみれば、(5)式のほうが自然である。しかし  $k$  は外部観測者からみても、またドライバーからみても直接的に感知することができない量であるところに、(5)式からの展開が実用的に扱い難いという欠点がある。これに対して(4)式は、外部観測者からも、ドライバーからも知覚できるところに、(4)式からの展開には実用的意味で理解し易いという長所がある。とくに速度  $V$  と車間距離 (論理の展開には車頭距離  $L$  を用いる) はドライバーが持たなければならない最も重要な量であることから(4)式からの展開の方が実感的理解が可能となる。

(4)式の定数  $\beta$  と(5)の  $\alpha$  がどのように結び付い

ているかは附録に示されているが、結論は

$$V_M = \frac{\alpha}{\beta} \quad (6)$$

である(付録参照:  $\beta$  は速度の逆数 (s/m の次元をもち、 $\alpha$  は無名数である)。

なお、 $k$  を (3) 式で定義すると、(2) 式は  $L = TV$  であるから、流量は

$$q' = \frac{L_0}{T} \quad (2')$$

となる。本文では流量を  $q = 1/T$  と定義 ((7) 式) するから (2) 式とは異なる。

V-L 指数則からの車密度  $k$  は(4)式であった。この式は単に (1) 式の  $V \cdot T$  特性を変形しただけである。しかし(5)式の  $k \cdot V$  関係は文献(6),(7)にあるように、多くの測定データから得られた実験的なものである。(4)式では  $V=0$  のとき  $k=1$  となり、 $k=0$  は  $V=\infty$  のときである (実際には平均最高速度  $V_M$  のときで  $k=0$  は存在しない)。一方 (5) 式では  $k=0$  は  $V=V_M$  のときで、これは交通流がきわめて疎な状態での自由走行時の平均速度という明確な位置づけが出来るが、 $k=1$  は  $V = V_M e^{-\alpha}$  となるときで、この条件はドライバーが直接感知できる量ではない。このことは  $k$  が直接感知できない量であることに加えて(5)式の指数則が説得力を欠く原因である。

## 3. V-L 指数則からの流量 $q$

交通流の議論では  $k \cdot q$  関係がもっとも基本的なものとして議論の中心に置かれているのは実用的立場から理解できる。しかしこれまでの道路交通に関する研究で、多くの研究成果が提供されているが、実用の基礎になる法則的なものは提供されていない。筆者らの研究でも(5)式の  $k \cdot V$  特性の指数則を流量に展開した議論<sup>8)</sup>でも、 $k$  が実感的量でないことから、科学的な展開に難を感じていた。しかし本文で初めて科学的にすっきりした理論展開で道路交通

流が量的に扱えることとなった。

### 3.1 流量 $q$ の定義

通常流量はある時間内(5分、10分、1時間、など)にある地点を通過する車の台数で記述され、多くのグラフは実台数をパラメータとして描かれている。これは実態を正確に表すのという意味では価値がある。しかし、実台数は変数パラメータではないから、数式的に扱うことは出来ない。

本文で定義する流量は平均車頭時間の逆数 ( $1/T$ ) である。すなわち

$$q = \frac{1}{T} \quad (7)$$

である。 $T$ の単位は秒(s)であるから、(7)式は1秒あたりの単位流量である。30秒間流量は $T$ を30秒間で平均したものとし、これを30倍して $30q$ とすれば、30秒間の通過台数となる。

### 3.2 流量 $q$ の式

(1)式で

$$L = TV \quad (8)$$

の関係を使えば $q$ は直ちに次のように求められる。すなわち、

$$T = \frac{L_0}{V} e^{\beta V} \quad (9)$$

である。 $q$ は(9)式の逆数である。実台数は最後の量であるから、一般的には(9)式で議論するのが上策である。(9)式はすでに文献4)でも導出している。

## 4. $V$ - $L$ 指数則における定数 $\beta$ と $L_0$ の値と流量 $q$ との関連

### 4.1 実交通流における定数 $\beta$ と $L_0$

ここで幾つかの異なる道路の実測から定数 $\beta$ と $L_0$ の値を見てみることにする。

従来道路交通に関するデータは信号のない高速道に限られており、一般道のデータは極めて少ない。本文で以下に示す図( $V$ - $L$ 特性)は

仙台市内と東京駅前(丸の内側)の日比谷通りを一般道として選び、高速道としては東北道(吾妻PA)のものを選んだ。データとしてはビデオ映像からそれぞれの車の速度 $V$ と通過タイミング $T$ (車頭時間)の測定値を用いる。測定法については文献4)で説明している。

$V$ - $L$ 特性が指数関数的関係になることは文献4)、5)の検討結果から明らかである。

図2は仙台市内の匂当台交差点を青信号時に発進・通過する車群の測定データである。測定台数は約450台である。

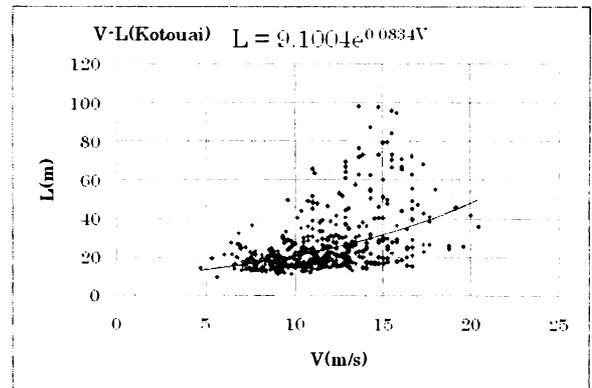


図2. 仙台市匂当台交差点出口の  $V$ - $L$ 特性

図2中の線は近似線で図上に示す式が近似指数関数である。図中の式から、 $\beta = 0.0834$   $L_0 = 9.1\text{m}$  であることがわかる。

測定点のばらつきは大きいので以下平均化したものを示すこととする。図3は図2の測定値を平均した図である。

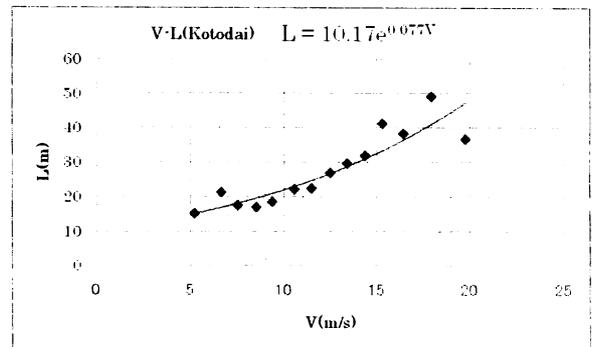


図3. 匂当台のデータを平均化した図  
平均化すると近似指数関数の定数の値が変

っている。詳細は今後の検討に譲ることとするが、定数の値の変化に大きい変動はないものとして以後平均化データで示すこととする。ここでは  $\beta = 0.077$ ,  $L_0 = 10.17\text{m}$  である。

以下その他の道路についての平均化した  $V$ - $L$  特性を示す。

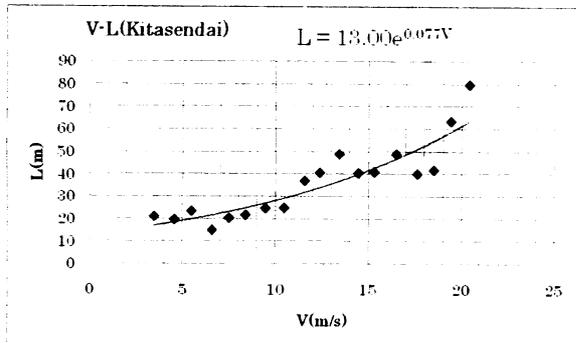


図 4. 北仙台堤通り (県庁方向)  
 $\beta = 0.077$ ,  $L_0 = 13\text{m}$

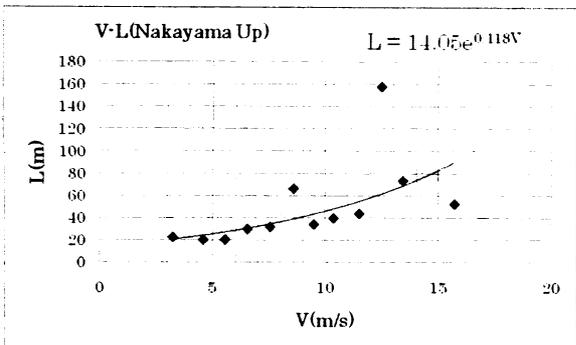


図 5. 仙台市中山道 (団地) (上り)  
 $\beta = 0.118$ ,  $L_0 = 14.05\text{m}$

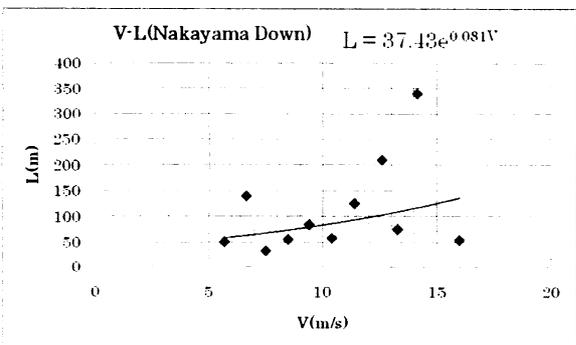


図 6. 仙台市中山道 (団地) (下り)  
 $\beta = 0.081$ ,  $L_0 = 37.43\text{m}$

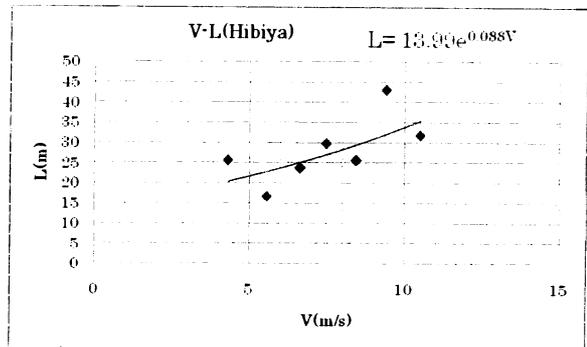


図 7. 日比谷通り  
 $\beta = 0.088$ ,  $L_0 = 13.99\text{m}$

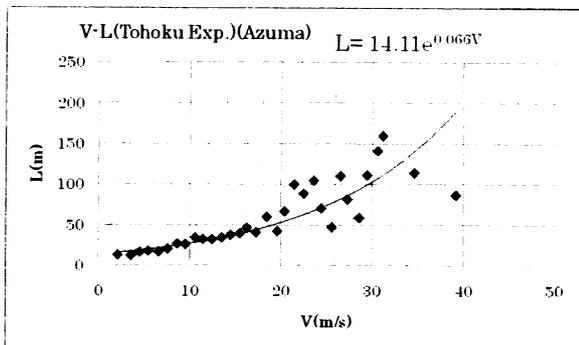


図 8. 東北自動車道 (吾妻 P A)  
 $\beta = 0.066$ ,  $L_0 = 14.11\text{m}$

#### 4.2. データのまとめ

図 3~8 に代表的な測定データを示した。測定例の中には指数関数近似をあてはめるには無理があるように見えるものもあるが、これまでの多くの測定データはすべて指数関数近似が成立することからあえて例外的な測定例も含めた。このデータから道路交通流の性質は定数  $\beta$  と  $L_0$  によって決まることは明らかである。これらの数値はそれぞれの図で示されているが、ここで取りまとめておこう(表 1)。

一見してこの表から有用な情報を得ることはできない。大まかに見て  $\beta$  値は 0.1 に近い値である  $L_0$  値はおおむね 10 m ~ 40 m の間にある。これらがどのような意味を持つかは、流量との関係を精査することによってある程度明らかになる。

表1 測定から得られた $\beta$ と $L_0$ の値

	$\beta$ (s/m)	$L_0$ (m)
匂当台	0.077	10.17
北仙台	0.077	13.00
中山 (上)	0.118	14.05
中山 (下)	0.081	37.43
日比谷	0.088	13.99
東北道	0.066	14.11

### 4.3 $\beta$ と $L_0$ が流量 $q$ に与える影響

流量は(9)式の逆数で与えられることを3章の終りで述べた。よって流量の議論は(9)式を議論すれば十分である。(9)式を再掲する。

$$T = \frac{L_0}{V} e^{\beta V} \quad (9)$$

定性的に見れば、 $T$ に与える影響は $\beta$ の値が表1のように0.1のオーダーであることから $\beta$ より $L_0$ の影響が大きいことがわかる。

議論を進めるにあたって最大流量が与えられる速度 $V$ を求めておこう。(9)式は $V=0$ で無限大である。 $V$ が大きくなると初め $T$ は小さくなるが、 $V$ がさらに大きくなると $\beta V$ の値が指数関数的に効いてくるから $T$ は大きくなる。つまり(9)式は凹関数である。

最大流量を提供する $T$ の値は $T$ が最小値( $T_m$ )となるときである。 $T_m$ は(9)式を $V$ で微分してこれが0となるときの $V$ (= $V_m$ )のときである。すなわち

$$\frac{dT}{dV} = \frac{L_0 e^{\beta V}}{V} \left( \frac{1}{V} - \beta \right) = 0$$

から

$$V_m = \frac{1}{\beta} \quad (10)$$

である。(9)式と(10)式の両式は $L_0$ と $\beta$ の位置づけを与えている。すなわち、

(1)(9)式は $T$ が $L_0$ に比例することを示す。

よって、 $L_0$ が大きいことは $T$ が大きくなる(流量 $q$ が小さくなる)。

(2)(10)式は $\beta$ 値が最大流量を与える速度パラメータである。

とうことである。

## 5. 当該道路の実最大流量条件

### 5.1 前提となる考察

中山道における上りと下りの測定は、この道路が坂道であることから、筆者は坂道の影響を調べる目的で同一ビデオにより前章(4)の測定を行った。しかし結果はあまりにもかけ離れたものであった(表1)。当然のことながら、前章の測定は当該道路のその時の車流を定量的に調べたものに過ぎない。よって、坂道の違いが一つの測定で明らかになるはずはない。中山道で言えば、上り方向と下り方向では、ビデオ映像を撮った時間帯では流れる台数が異なっている(上り:220台、下り:170台)。この差が $\beta$ 値の差に影響している可能性がある。

重要なことは、当該道路がもつ理論的な最大流量(交通容量)を推定することが求められているということである。

### 5.2 測定データからの最大流量(交通容量)の推定

#### 5.2.1 $V$ - $T$ 関係の考察

$V$ - $T$ 関係式(9)をいくつかの $\beta$ 値を与え、 $L_0=10$ m一定として計算したものを図9に示す。この図は車列の各車が前の車に追従して走行しているという条件下での速度 $V$ と車頭時間 $T$ の関係である。測定データ(図3~8)には当然非追従走行車も含まれている。

道路を走行する車には、拘束・準拘束・自由の3領域があることを筆者はこのシリーズで提唱した<sup>9)</sup>。これを図10に示す。

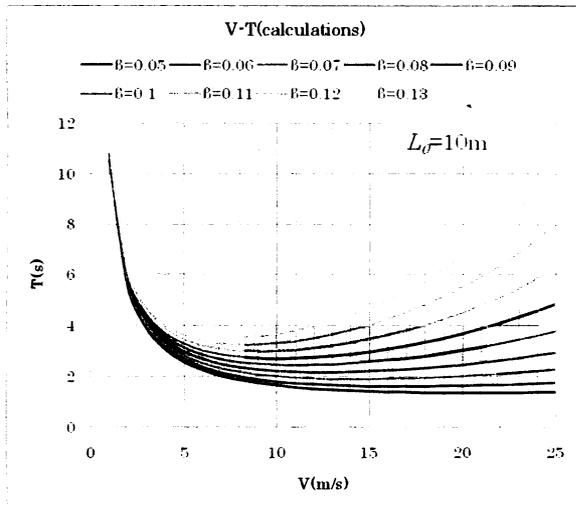


図9. 各種 $\beta$ 値に対応するV-T関係理論曲線

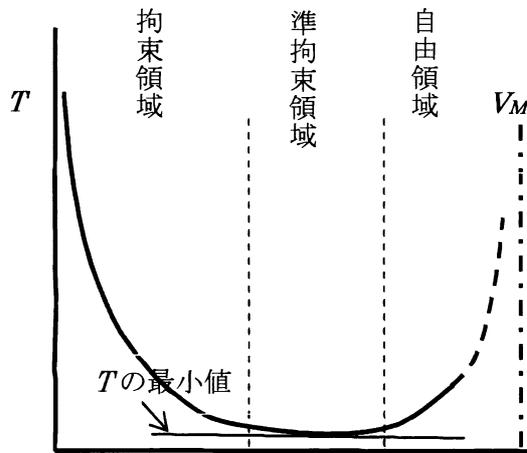


図10. 車頭時間 $T$ の存在領域

図10は図9を知る前のもので、空想図に過ぎないが、おおむね理論曲線と同様な形をしている。ここで $V_M$ は道路によって異なる平均的  
最高走行速度である。このカーブは図9と同じ  
意味で、追従走行時を想定したものである。こ  
のカーブが平均値を示すものとすれば、追従走  
行であれば、平均的にすべての車はこのカーブ  
の上にくることになる（図10の $T$ の最小値が  
最大流量を与える）。

しかし拘束領域であってもこの線から大き  
く離れる車は常に存在する。大きい車間距離を  
もって前車に追従走行しない車である。

### 5.2.2 追従走行時を想定した道路の交通容量 の推定

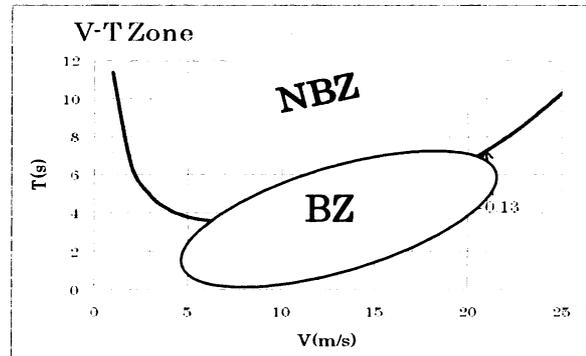


図11. 拘束領域 (Binding Zone: BZ) と非  
拘束領域 (Non-Binding Zone: NBZ)

図11は $V$ - $T$ 平面上での領域(Zone)表示である。  
両者が重なるところは準拘束領域である。追従  
走行での車頭時間がどの程度かは今のところ  
定かではないが、筆者が常磐道(郡山)で学生  
らと目視的に測定したデータでは1~3秒の間  
で平均約2秒であった<sup>10)</sup>。通常の道路では信  
号待ち時間もはいる。さしあたり、信号待ち時  
間を除外することにして、車頭時間を10秒以  
内( $T < 10s$ )に限ってみた。

このようにして再び中山道の上り、下りのデ  
ータ処理をすると、それぞれ図11、12のよう  
になった。

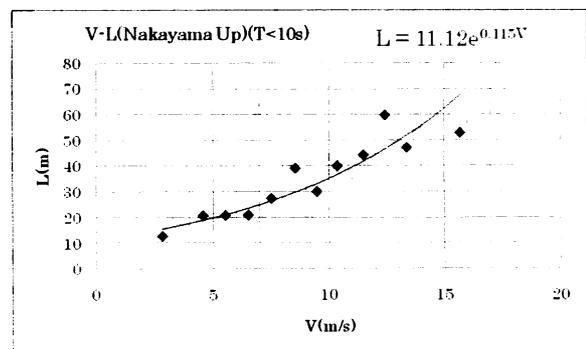


図11. 中山道上り ( $\beta = 0.115, L_0 = 11.12$ )

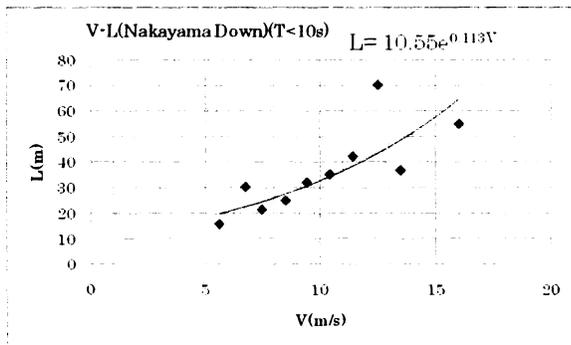


図 12. 中山道下り ( $\beta=0.113$ ,  $L_0=10.55\text{m}$ )

表 1 では中山道の上り、下りで大きい差があったが、車頭時間を 10 秒以内に限ってみると大きい差はなくなった。このような処理は当該道路 (交差点などがある) の交通容量を決定する基礎になるものと考えられる。

#### 6. 交通流量に与える $\beta$ と $L_0$ の役割

4.3 において、 $\beta$  と  $L_0$  はそれぞれ

- (1)  $\beta$  : 速度条件を定める
- (2)  $L_0$  : 流量に反比例する ( $T$  に比例)

などのことを知った。ここではこのことをもう少し掘り下げてみることにする。

図 9 から多くのことを知ることができる。この図は  $L_0$  を 10m とした時の図であるから実データでは  $L_0 = (\text{測定値}) / 10$  として修正が必要である。

- (1) 流量  $q$  は  $L_0$  に反比例する。すなわち

$$q \propto 1/L_0 \quad (11)$$

- (2)  $T \leq \text{Constant}$  の領域は  $\beta$  大で狭くなり、 $\beta$  小で広がる。 $\beta$  値がさらに小さくなるとこの領域は極端に広くなり、 $T$  の値は速度  $V$  の変化にあまり関係しなくなる。また  $T$  の値は小さくなる (流量は大きくなる)。この領域では  $T$  はほぼ一定であるから、車頭距離は速度に比例する。すなわち、

$$L \propto V \quad (12)$$

である。

以上を要約すると、 $L_0$  は速度の比例定数で  $\beta$  は道路の走りやすさの係数とみることが出来る。東北高速道では表 1 で  $\beta=0.066$  となっており、他の市内道路の値に比べて小さい。

#### 7. おわりに

本文では速度—車頭時間関係の指数関数則に基づいて各種の道路について走行車各々の速度と車頭時間の測定値を解析し、指数則の式中の定数  $L_0$  と  $\beta$  の役割を明らかにした。得られた結論を要約すれば以下の通りである。

1.  $L_0$  は流量定数である。しかしこの値を決定する要因については未だ明らかではない。また  $\beta$  と  $L_0$  が互いに独立であるか否かも今後の調査課題である。
2.  $\beta$  は道路の走り易さに関する定数である。 $\beta$  が小さいほど走り易く、流量 (容量) は大きくなる (平均車頭時間が短くなる)。しかも高速走行に対応している。

本研究から今後の交通問題に対処する多くの示唆を得ることができたが、定数  $L_0$  と  $\beta$  の詳細を知るためにはさらに多くのデータの蓄積が必要である。

#### 謝辞

本論文のシリーズは筆者の過去の研究発表の誤謬を正すとともに、内容の整理をする目的で始めたものであるが、新しい  $V-L$  特性の発見の機会にもなった。筆者が日本大学で始めた研究を東北文化学園大学に引き継ぎ、その後現在に至るまでお世話になっている谷口正成先生、鈴木祥介先生には格別のご配慮を頂いている。ここに厚く御礼申し上げる次第である。

#### 文献

- 1) 高木相 : 道路交通の物理的性質 (III) —  $t-s$  ダイアグラムから見た交通流のショックウェーブの性質 —、計測自動制御学会東北支部、第 250 回研究集会、資料番号 250-21

(2009.6.19)

2) 鈴木祥介、谷口正成、高木相：“交通流の  $V \cdot L$  指数則からのショックウェーブ伝搬速度の導出”、電気関係学会東北支部連合大会、1 B 1 0 (平成 21 年 9 月、東北文化学園大学)

3) 鈴木祥介、谷口正成、高木相：“ $V \cdot L$  指数則からの Shockwave の伝搬速度の導出”、2009 年電子情報通信学会基礎・境界ソサイエティ大会、A-17-2、(2009.9 15-18、新潟大)

4) 高木相：“道路交通流の物理的性質 (IV) -  $k \cdot V$  特性と  $V \cdot L$  特性-”、S I C E 東北支部第 251 回研究集会 (2008.7.15)

5) Tasuku Takagi, Masanari Taniguchi, Shosuke Suzuki: “An Exponential Law in Road Traffic Flow”, 計測自動制御学会東北支部 45 周年記念学術講演会論文集、講演番号: 2205 (2009.9.7-8 岩手大学)

6) 鈴木祥介、谷口正成、高木相：“道路交通流の測定と解析—車密度と速度の関係 ( $k-v$  特性)—”、計測自動制御学会東北支部第 232 回研究集会、資料番号 232-1、(2006.11.24)

7) Shosuke Suzuki, Masaki Tsunoda, Masanari Taniguchi, Tasuku Takagi: “Characterization of Road Traffic Flow from Measured Data of Speed and Time-Headway - Relationship between Density ( $k$ ), Flow Rate ( $q$ ) and Speed-”、SICE Annual Conference 2007, Sept.17-20, 2007, Kagawa University, Japan

8) 高木相：“道路交通流の挙動解析の原理的考察”、平成 18 年度電気関係学会東北支部連合大会、2G20 (平成 18 年 8 月)

9) 高木相：“道路交通流の物理的性質 (II) -  $t \cdot s$  ダイアグラムによる交通流の表示-”、計測自動制御学会東北支部第 247 回研究集会、

資料番号 247 - 5 (2008.12.19)

10) 高木相、谷口正成、藤木澄義、神村伸一、鈴木伸夫：“交差点における車お両の挙動のモデル的解析と青信号スループット”、情報処理学会論文誌、第 42 巻 第 7 号、pp.1885-1891 (平成 13 年 7 月発行)

附録 2つの指数則

$$V = V_M e^{-\alpha k} \quad (\text{附 1})$$

$$L = L_0 e^{\beta v} \quad (\text{附 2})$$

における  $\alpha$  と  $\beta$  の関係について: この 2 つの式はともに実験によって得られた。論理的に (数学的に)  $\alpha$  と  $\beta$  の関係を導出することはできない。よって 2 つの式から最大流量条件を導出して両者を等置することによって両者の関係を導く。

$$(\text{附 1}) \text{ の式から } k = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{V_M}{V}\right)$$

$$(\text{定義: } k = \frac{L_0}{VT}) \quad \frac{L_0}{VT} = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{V_M}{V}\right)$$

$$\text{流量: } q = \frac{1}{T} \quad (\text{定義}) \quad q = \frac{V}{\alpha L_0} \ln\left(\frac{V_M}{V}\right) \quad (\text{A})$$

$$\text{最大流量: } \frac{dq}{dV} = \frac{1}{\alpha L_0} \left[ \ln\left(\frac{V_M}{V}\right) - 1 \right] = 0$$

$$V \text{ を } V_m \text{ とすると、} \ln(V_m) = \ln(V_M) - 1$$

$$V_m = e^{\ln V_M - 1} = V_M e^{-1} \text{ で } q \text{ は最大値をとる。}$$

これを (A) 式に代入して、最大流量  $q_m$  は

$$q_m = \frac{V_M}{\alpha e L_0} \ln\left(\frac{V_M}{V_M/e}\right) = \frac{V_M}{\alpha e L_0} \quad (\text{B})$$

(附 2) 式から  $L = TV$  だから

$$\frac{dT}{dV} = \frac{L_0}{V} e^{\beta v} \left(\frac{1}{V} - \beta\right) = 0 \text{ から } V_m = \frac{1}{\beta}$$

$$q_m = \frac{1}{\beta e L_0} \quad (\text{C})$$

(B) と (C) を等置すると (6) 式の関係が得られる。