

## 道路交通流の物理的性質(VI)

— 走行車列長の伸縮現象の考察 —

Physical Properties of Road Traffic Flow (VI)

· Consideration of Expansion-Contraction Phenomena in Row Length of Moving Vehicles ·

高木 相

東北大学名誉教授

Tasuku Takagi

Professor Emeritus, Tohoku University

キーワード: 自動車列、伸縮ダイナミクス、t-s ダイアグラム、ショックウェーブ、

連絡先: 〒981-0952 仙台市青葉区中山 5-2-20

E-mail: tasuku@sirius.ocn.ne.jp

### 1. はじめに

道路を走行する車群はある塊となって走行する傾向がある。ドライバーは前の車について行こうとする傾向があるためである。この現象を安定性 (stability) という見方で議論している論文や著書がある<sup>例えば1)</sup>。ここで記述されているのは、走行中に車頭距離が時間とともに伸び縮みする現象について、L.A. Pipes が導出した微分方程式

(Dynamical Equation と呼ばれている<sup>2)</sup>) に適当な解釈を加えて議論したものである。不安定性とは車列長が振動的に繰り返し短縮・伸長する現象であり、一定の車列長に落ち着かないということであって、不安定だから危険性があるという意味ではない。よって、今日の交通問題に必須の対策的議論ではない。強いて言えば、渋滞の状態と非渋滞流の繰り返し現象を安定論として議論しているのであって、安定とは車流がスムーズな状態を言っているものと解釈される。

走行車列長の伸縮現象はドライバー(人間)がもつある種の追従心理の具体例のひとつと考えられることから、自動車の追従現象はわれわれ人間がもつある共通の追従行動心理の一つの現象であろうという興味がある。

なお、前述の Pipes による Dynamical Equation と、これに関連する車列長の伸縮についての安定性に関するこれまでの研究には、交通流の物理的理解、あるいは実用論からみて説得力に欠ける点があることは否めない。

本文は交通流のダイナミクスの基本を Pipes のそ

れとは異なる Dynamical Equation を物理的に無理のない形で導出し、これをもとに車列の伸び縮みを考察するものである。

### 2. 基本となる自動車の Dynamical Equation

#### 2.1 基本式の導出



図1. 自動車の推進力と加速力

図1は自動車のエンジン推進力とこれによって生ずる加速に基づく力(加速力)の関係である。図1の  $x$  は距離座標(矢印方向を正方向とする)である。あとのために、 $x$  の時間 ( $t$ ) による微分を

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

と書くこととする。

推進力は加速力となって車は前進する。推進力は車が動く距離に比例する。すなわち、

$$\text{推進力} = px \quad (1)$$

である。ここに  $p$  は 定数である。この力は後ろ向き（座標  $x$  の負方向）である。一方、加速力は

$$\text{加速力} = m \ddot{x} \quad (2)$$

で正方向の力である。ここに  $m$  は自動車の質量である。

図1に見るように加速力は正方向であるから両者は方向が反対で、大きさは等しい。よって

$$m \ddot{x} + px = 0 \quad (3)$$

である。実際には走行すれば空気抵抗、タイヤ摩擦、あるいはブレーキなどの力が加わる。そしてこれらは一般に速度に比例する。これらの抵抗を  $r$  とすると、(3)式は

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + px = 0 \quad (4)$$

となる。通常(3)式は  $m$  で規格化して

$$\begin{aligned} \ddot{x} + R \dot{x} + Px = 0 \\ \left( R = \frac{r}{m}, P = \frac{p}{m} \right) \end{aligned} \quad (4')$$

と書く。

(4)式は機械系の運動や、電気・電子回路の振動現象を記述する方程式でこれらの系の挙動を記述するダイナミクスの一般式である。さらに高次元の2次以上の微分方程式で表わされる系、例えば3次の系は1次と2次の系の結合体であることが筆者らの能動電子回路の非線形微分方程式の検討から明らかにされている<sup>3)</sup>。

図1の1台の自動車の動きは(4)式でその挙動の概要を知ることが出来る。しかし、(4)式の  $R$  と  $P$  は一般には多くのパラメータが関係し、また多くの場合変数  $x$  の関数となるので、(4)式は非線形微分方程式となり、また更に高次の系とならざるを得ない。定性的に(4)式について言えることは、車が発進して定常速度に達すると、加速度が0となるから

$\ddot{x}$  の項はなくなり、(4)式は

$$R \dot{x} + Px = 0 \quad (5)$$

となるということである。(5)式は速度  $\dot{x}$  ( $= V_k$  ま

たは  $V_{k+1}$ ) に比例する抵抗成分 ( $R \dot{x}$ ) を補うだけのパワーをエンジンからの推進力 ( $Px$ ) として供給すればよいということを意味している。

本文は1台の車の動きを解析することが目的ではなく、車頭距離の伸び縮みを議論することを目的としているので、(4)式をこの目的のために展開することとする。

## 2.2 車頭距離の変動に適応する Dynamical Equation

図2は2台の車が走行している図である。車頭距離を  $X$  とする。

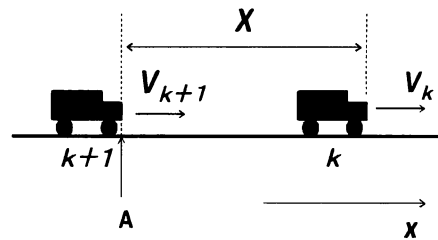


図2. 走行中の2台の車の関係

図2は車の進行方向  $x$  の座標上で車 No.  $k$  を No.  $k+1$  が追従走行している状態を示す。それぞれの座標は  $x_k$ 、 $x_{k+1}$  である。(4)式はそれぞれの車について成立する。車頭距離  $X$  は

$$X = x_k - x_{k+1} \quad (6)$$

である。(4)式の  $R$  と  $P$  が座標の位置によって不変であるとする、 $x_k$  についての(4)式から  $x_{k+1}$  についての(4)式の差をとれば、(6)式の関係から  $X$  についてのいわゆる Dynamical Equation が得られる。すなわち

$$\ddot{X} + R \dot{X} + PX = 0 \quad (7)$$

である。

この式は(4)式とは異なり追従走行する車と前車との間隔（車頭距離  $X$ ）が時間とともにどのように変化するかを記述するものである。したがって、

(7) 式に実際の測定値を導入して検討すればマクロ的な交通流の状態を定性的に知ることが可能となる。

さて、交通流の測定は速度 (図 2 の  $V_k$  と  $V_{k+1}$ ) および車頭時間  $T_{k,k+1}$  である<sup>4)</sup>。 $T_{k,k+1}$  は図 2 において、車  $k$  の車頭が A 点 (任意) に来た瞬間  $t=0$  から次の車  $k+1$  のそれが A 点にきた瞬間までの時間である。この 2 つの測定パラメータ ( $T$  と  $V$ ) を筆者はビデオ映像から計時により得ている<sup>4)</sup>。

車頭距離  $X$  と測定量 (速度  $V$ 、車頭時間  $T$ ) の関係は

$$X = VT \quad (8)$$

である。車  $k$  と  $k+1$  について言えば  $X=X_{k+1}$  は

$$X_{k+1} = V_{k+1} T_{k+1} \quad (9)$$

である。一般に追従車と前車との間の車頭時間は追従車のパラメータである。車頭距離と速度との間には明確な指数則が存在する。すなわち

$$X = X_0 e^{\beta V} \quad (10)$$

である<sup>4) 5) 6) 11)c</sup>。

注 1)  $X_0$  と  $\beta$  は  $T$  と  $V$  の測定値から (10) 式の近似で決定される定数であるが、これらの詳細はまだ明らかにされていない。しかし、(10) 式の  $X$  は車頭距離であるから、交通流の実務的運用に直接役にたつものではなく、交通流量がもっとも必要な量であることを考えると、(10) 式より、(8) 式の関係から、(10) 式を

$$T = \frac{X}{V} e^{\beta V} \quad (1)$$

と変形して  $T$  に着目するのが実用的である。流量  $q$  を

$$q = \frac{1}{T} \quad (2)$$

で定義し  $n$  個の測定値  $T_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) の平均を  $T$  とすれば、例えば 1 分 (=60 s) の流量  $q_{60}$  は

$$q_{60} = \frac{60}{T} \quad (3)$$

で求められる。ただし  $T$  は

$$T = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_k \quad (4)$$

で  $n$  台の車頭時間の平均である。

注 2) 適正車頭距離・時間: (10) 式で定まる車頭距離をここ適正車頭距離と定義する。追従走行で最も前車に接近出来る車頭距離で、交通量から見れば最も流量が大きい条件を与

えるという意味をもつ。かつそれに対応する時間 ((1) 式) を適正車頭時間と定義する。

上記注 1 で述べているように、交通流の制御等の実務においては注 1 で記述した式 ((1) ~ (4)) によって考察することになるが、本文はそのような実務から離れて、特に高速道で常に見られる、車列の粗密走行現象のダイナミクスを解析的に考察するというもので、実用的意味は少ない。

### 3. 走行車列長の伸縮現象のダイナミクス

#### 3.1 位相面上での挙動

(7) 式がこのダイナミクスを記述する基本式である。厳密には定数  $R, P$  は一定値ではないが、ここではマクロ的な現象をみるという意味から、一定値をとるものとする。したがって当面のこのダイナミクス論は線形微分方程式の範囲でよく知られたものである。ただ、考察の中に (10) 式の条件が取り込まれるところに重要な意味がある。

(7) 式は  $X$  の変化が  $X=0$  を中心に動く。追従走行の場合、平均車頭距離は (10) 式で示されるように速度  $V$  によって決まる。この  $V$  は先行する前車の速度である。図 2 でいえば  $V_k$  である。 $V_k$  は初め  $V_0$  でこれが  $V_0$  ( $V_0 < V_0$ ) に変化したときの車頭距離  $X$  が時間とともにどのように変化するかがこのテーマである。図 5 で  $V=V_0$  での車頭距離を  $X_{V0}$  としている。これがこの時の適正車頭距離である。よって、(7) 式の  $X$  は  $X_{V0}$  の伸縮量であるから、われわれは車頭距離を  $X_{V0} + X$  として  $X_{V0}$  の伸び縮みを  $X$  の動き (ダイナミクス) として考えればよいということになる。 $X$  のダイナミクスはいわゆる位相面 ( $X-u$  平面,  $u = dX/dt$ ) で表わされる。この図から  $X$  の時間変化が求められる。

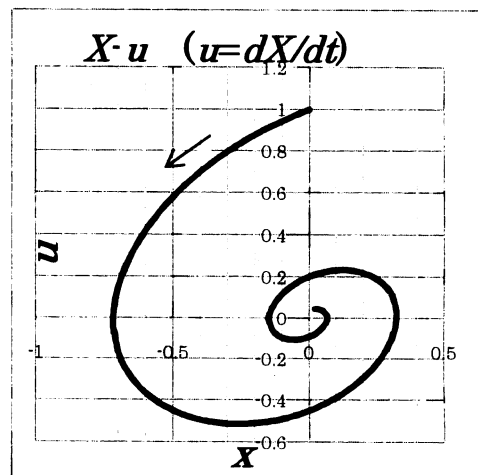


図 3. 位相面における  $X$  の動き ( $R=0.5, P=1$ )

図3は(7)式を位相面で描いた図である。図中の矢印は時間経過の方向を表わす。この図は $R=0.5, P=1$ とした場合であるが、この値は実際の車頭距離の挙動から推定したものではなく、(7)式の挙動を定性的に示すために選んだものである。

位相面では時間の経過(矢印)によって、 $X$ がどのように変化するかを定性的にみることができる。図が円であれば波形は正弦波である。図3は円を描きながら原点に収束する形である。一見してこれは正弦波的に減衰する波形であることを示している。

### 3.2 時間変化

図4は図3から $X$ の時間変化(波形)を求めた結果である。ここでは $X_{VD}$ を15mとしている。定性的には車頭距離がこの図に示すように変化するものと考えられる。

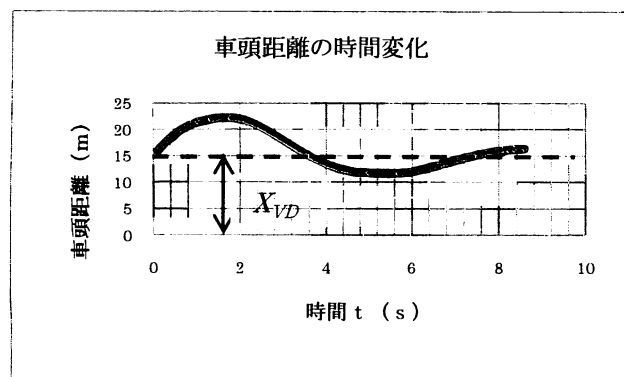


図4. 車頭距離の時間変化

### 3.3 t-s ダイアグラム上での挙動

道路交通流に関するほとんどの性質はt-sダイアグラム上で理解できるのみならず、定量的解析が可能であることは筆者のこのシリーズで明らかにしてきた<sup>7)8)</sup>。t-sダイアグラムとは車群の走行軌跡を時空間軸上の2次元平面上に描いたものである。

図5はt-sダイアグラム上で、前車①が速度を $V_U$ から $V_D$ に減速( $V_D < V_U$ )したとき、 $V_D$ での適正車頭距離 $X_{VD}$ に追従車②がどのように追従するかを時空間軸上で示したものである。

図で示すように前車①の速度が $V_U$ から $V_D$ に変化したとき(簡単のため、 $V_U, V_D$ は一定で軌跡は折れ線で描いてある)、追従車②の軌跡は図5のようになる。この軌跡は追従車の変化(図4)を $V_D$ に重ねた $V_D t + X$ の計算値である。この軌跡をみると、一旦車頭距離が縮小し次にもとにもどるが車頭距離が開きすぎてその後適正值((10)式の値)

にもどる様子が示されている。なお、速度 $V_U$ での車頭距離(図5の $X_{UD}$ )はここでの車流は自由走行を含むから様々の値をとることになる。

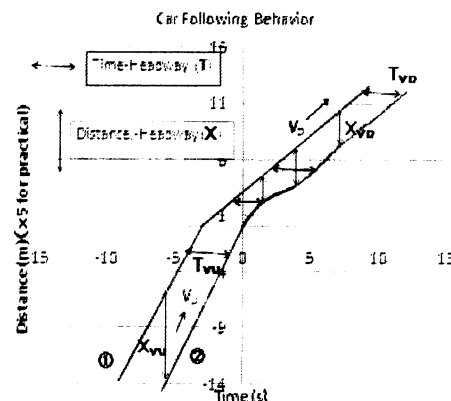


図5. 前車の減速にともなう追従車の走行軌跡の変化(シミュレーション)

### 3.4 走行車列長の一般的挙動

#### 3.4.1 平均化線形t-sダイアグラムと

##### Shockwave

図5から本文の課題である高速道における走行車列長の伸縮現象が説明できる。図5では車2台を考えたが、後続車は次々に来る。長い車列を作って走行するときの車頭距離の平均は(10)式の指数関数則に従うことはすでに述べた通りである。(10)式はその速度での適正車頭距離を与える。そしてこの条件で、前車が減速したときの後続車の挙動は図6に示す通りである(①と②は図5と同じ)。図6は平均化線形t-sダイアグラムである。平均化とは車頭時間のある時間帯で平均化したもので、線形化とは速度のうねり(わずかな変動)を線形化したものである。図6では図5の②を③で線形化した。③の後には④、⑤、…と後続車が続く。車頭時間の平均化は③~⑥までと⑦⑧である(紙面の都合で⑧以降は省略している)。

③を前車とする④は、図5の①と②の関係と同様で、③の速度変化に通常直ちに追従しないため、車頭距離が適正距離より小さくなる。この現象は後続車に伝搬する。t-sダイアグラムを描けばこの様子は明瞭に記述することができる。準備のために②の自動車の軌跡を③のように線形化した平均化線形t-sダイアグラムで、図5の②の速度変化がどのよ

うに後続車伝搬して行くかをショックウェーブとして考えてみる。平均化線形 t-s ダイアグラムによれば車群流の平均的な挙動を明確に知ることができる<sup>7) 8)</sup>。

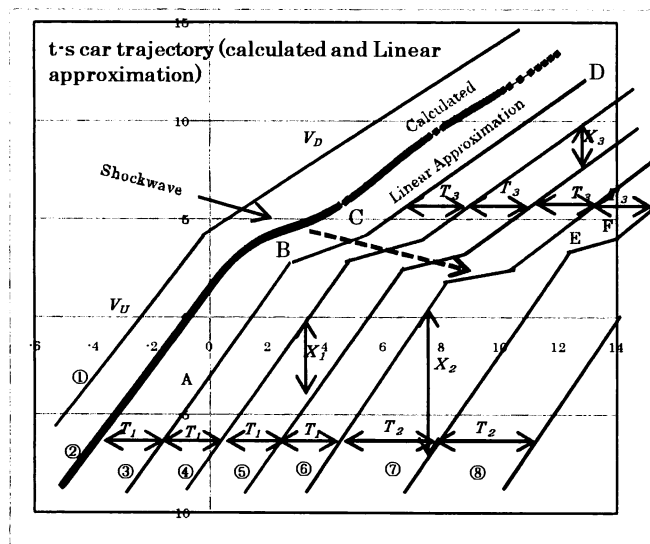


図 6. 平均化線形 t-s ダイアグラムと Shockwave

### 3.4.2 図 6 による交通流の挙動の説明

図 6 の①と②は図 5 と同じものである。③は②を線形化したものである。車頭距離は一般にばらつきが大きい、ある時間内で平均して、その時間内では同じ車頭時間として扱う。この手法で出来る t-s ダイアグラムが平均化線形 t-s ダイアグラムである。

やや冗長にわたるが、ここで一般的な交通流の挙動をこの図で説明しておこう。図では①から⑧までの 8 台の車で交通流全般を代表させている。すなわち、

- ①：速度が  $V_U$  から  $V_D$  に変化した線形化 t-s ダイアグラム ( $V_U > V_D$ )。
- ②：①に追従する車；適正車頭距離 ((10) 式) で  $V = V_U$  から  $V_D$  への変化に従って  $X_{V_U}$  から  $X_{V_D}$  へ近く ( $X_{V_D}$  は (7) 式の数値計算解)、(①の車頭距離変化は減衰振動的)。
- ③：②を線形化したもの。AB 間は高速範囲、BC 間は高速度から低速度に移る過渡現象の範囲、CD 間は低速度範囲。
- ④～⑥：(適正車頭距離での車流)、②を追従する後続車。この車群の車頭距離は適正距離としているので最も車密度が高い状態での車流となる。②の過渡的車流変化が後車群に次々と伝搬してここに Shockwave ができる。最高密度での

車流群で出来る Shockwave は低密度にならない限り消滅しない (文献 7 の図 4.2)。この図では⑥まで続く。車頭距離は高速度領域 ( $V_U$  領域) で  $X_1$ 、低速度領域 ( $V_D$  領域) で  $X_3$  としている。この両者は (10) 式で決まる適正車頭距離である。Shockwave 領域での車頭距離は小さくなる。この領域ではそれぞれの車の車長が影響するほどせまくなることがあり、極端な場合車が停止することもあり渋滞の原因になる。各車の軌跡間は高速度領域で  $T_1$ 、低速度領域で  $T_3$  としてある。両者は注 1 で示した (1) 式で求められる値である。

- ⑦⑧：⑦から車頭時間が  $T_2$  と大きくなっている。ここからは自由走行で車頭距離  $X_2$  は大きく (10) 式に拘束されるのは相当先になる。

このように車頭距離あるいは車頭時間が大きくなると Shockwave は消滅する。そして EF のような新しい Shockwave の種が出来ることもあるが、継続することはない。

### 4. 線形化 t-s ダイアグラムによる車列長の伸縮現象の説明

図 6 の t-s ダイアグラムは少ない車数で一般に起こる交通流の挙動のほとんどすべてを説明したが、この t-s ダイアグラムは平均化線形 t-s ダイアグラムであるからやや不自然さを伴う。しかしこれでマクロ的交通流は車速度  $V$  と車頭距離  $X$ 、あるいは車頭時間  $T$  の変化でほとんど全ての挙動を大まかに知ることが出来る事が分かる。

本節では本論文の主題である車列長の伸縮現象に着目する。このために平均化しない線形 t-s ダイアグラムでこの問題を考えることとする。

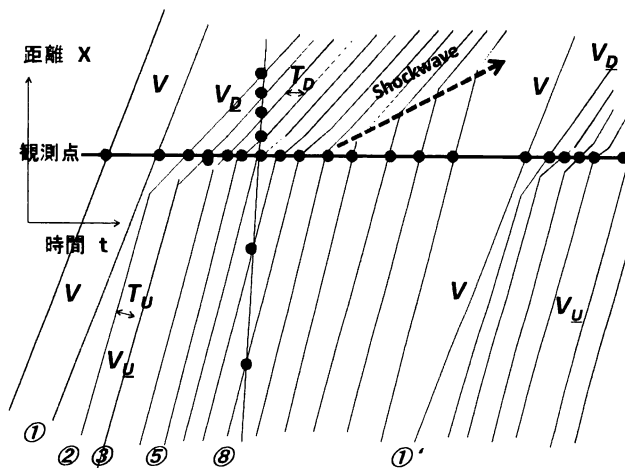


図 7 線形 t-s ダイアグラムによる交通流の挙動

図7は車頭時間の平均化を省いて、速度の僅かな変動を無視して直線化し、速度が大きく平均的に変化するところを折れ線で近似したt-sダイアグラムである。これをここで線形t-sダイアグラムという。

図7で速度変化のない車を①で示す。速度は $V$ である。後続車②は①より高速の $V_h$ で①に接近して速度を $V_h$ に落としてそのままの速度で走行しているとしている。したがって③は②に追従走行せざるを得ず図のような走行軌跡を辿ることになる。③以降の車は全てこれに倣うことになる。ここで高速度領域の車頭時間 $T_h$ は一般には適正車頭時間ではないが⑤～⑧の間では間隔が小さくここは適正車頭時間を想定している。低速度領域全般は強制的に適正車頭時間となる。

さて、走行中の車列長が伸び縮みする伸縮現象の検証には2つの見方がある。すなわち、空間領域と時間領域の2つである。以下この違いを見ることとする。

#### 4.1 空間領域

図7で空間領域すなわち距離 $X$ 方向の車列をみれば空間的な車疎密度を知ることができる。実際には高空からの観察に頼るのであるが、簡単ではない。しかし図7の縦方向を見れば容易に知ることができる。図7で車を黒丸で示す。図で縦方向が距離方向であるから縦方向のそれぞれの車が時間とともに、t-sダイアグラムの線上を右に移動する。これによって車列の変化を知ることができる。明らかに高速度領域では車密度は疎であり、低速度領域では密になっていることが分かる。そしてこの図では⑧以降、車頭時間 $T_h$ が少し大きくなっているためその影響で高速度領域は今までの低速度領域の範囲に入り込んで高速度領域が広がっている。この広がりの速度はShockwave(点線矢印)の伝搬速度<sup>9)</sup>で決まる。これによって車列の密度<sup>注3)</sup>は密から疎になって行く。この状態が続くと低速度領域は消滅する。実際の交通流ではこのような状態を繰り返しているものと考えられるので図7では①'のように再び①と同じ状況が生まれるとしている。

注3) 車密度の定義：一般には1kmあたりにその時点で存在している車の台数で定義されている。そして、この数字を $k$ として数式で扱われていることもある。しかしこれは生の数量であるから数式上のパラメータ(変数)とはなし難い。そこで筆者は合理的な車密度パラメータとして車頭間隔の比として次のように定義している<sup>10)</sup>。すな

わち、

$$k = \frac{X_0}{X} \quad (1)$$

である。(文献10)では $X$ の代わりに $L$ を用いている。

指数則(10)式からこの値は $e^{\beta V}$ に等しい。

#### 4.2 時間領域

時間領域すなわち時間軸からみると図7の横軸を見ることになる。一見して車密度の疎密は明確に把握することは出来ないことが分かる。明らかに図7の高速度領域での車(黒点)のばらつきは時間軸上では圧縮されている。これに関連する実測例を図8, 9によって示そう。この図は東北道吾妻PA付近での測定結果である。

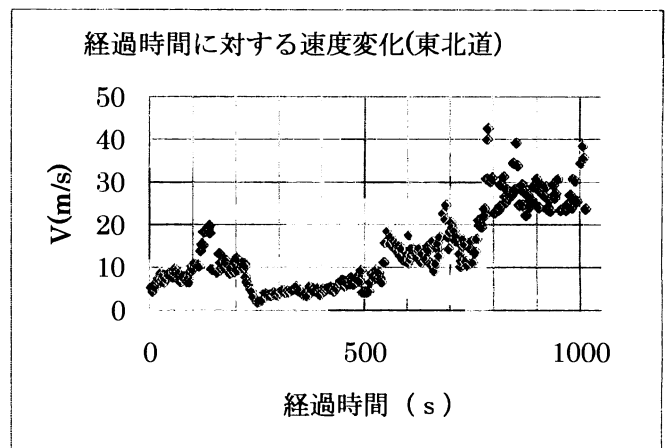


図8 速度変化(東北道)

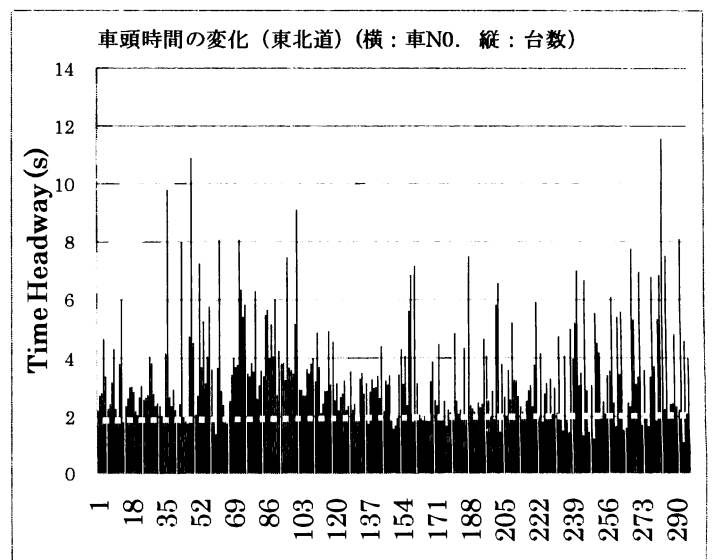


図9 各車(図8)の車頭時間変化

図8は次々に来る車の速度を各車について調べた

ものである。図9は図8に対応する各車の車頭時間の測定結果である。この測定時間帯では渋滞があつて低速度の領域があることが分かる。図8と図9を対比してみると明らかに速度と車頭時間の変化に際立った相関はない。図9で見るようにほとんどが拘束追従走行をしていてその車頭時間は2秒程度の車が多く（白い点線）。このことから時間領域での車密度変化を調べるのは当を得ていないことが分かる。

## 5. おわりに

初めに述べたように、走行車群の車列長の伸び縮み（車列の疎密）については、過去に、いわゆる安定論として、多くの研究があるが、これらの諸研究では結論に至るプロセスに若干説得性に欠ける面があることが本文を執筆する動機であった。本文は自動車の動きの基本物理から車頭距離に関する Dynamical Equation を導出してその性質から交通流の疎密流を考察した。考察のなかに筆者らの実測データから導出した車頭距離と車速度との関係を表わす指数則を導入したことにより車流の疎密（車列長の伸縮）のダイナミクスの概要はより明確になった。

本文で明らかになったことは以下のようなことである。すなわち、

- 1) 交通流の Dynamical Equation (DE) は車頭距離を変数として、2階微分方程式で記述できたこと
- 2) 追従走行車の Dynamics の大要は線形 DE の解で走行軌跡の形として把握できたこと
- 3) 走行車列の挙動の大要は平均化線形  $t-s$  ダイアグラムで説明できたこと
- 4) 走行車列の伸び縮み現象は線形  $t-s$  ダイアグラムにより説明できたこと
- 5) 車密度変化（走行車列長の変化）は時間領域の測定では把握できないこと

などである。

## 謝辞

このシリーズ全てにわたって、御協力と御理解をいただいている、東北文化学園大学科学技術学部知能情報システム学科の谷口正成教授並びにお世話をいただく鈴木祥介准教授に厚く御礼申し上げる次第である。

## 文献

- 1) 佐佐木綱監修、飯川恭敬編著：交通工学、第5章 道路交通流の理論、5.2.4 追従モデル (p.143-149) オーム社 (1992年)
- 2) Louis A. Pipes: "An Operational Analysis of Traffic Dynamics", Journal of Applied Physics, Vol.24, No.3, pp.274-281, (March, 1953)
- 3) 高木相：「電圧制御ブロッキング (VCBO) とその計測および神経モデルへの応用」、計測と制御、計測自動制御学会誌、第11巻第8号、pp. 691-705、(1972年8月)
- 4) 高木 相：「道路交通流の物理的性質 (IV) —  $k-V$ 特性と  $V-L$ 特性—」、計測自動制御学会東北支部第251回研究集会資料番号 251-12 (2009.7.15)
- 5) 高木 相：「道路交通流の物理的性質 (III) —  $t-s$ ダイアグラムから見た交通流のショックウェーブの性質—」、計測自動制御学会東北支部第250回研究集会資料番号 250-21 (2009.6.19)
- 6) Tasuku Takagi, Masanari Taniguchi, Shosuke Suzuki: "An Exponential Law in Road Traffic Flow", 計測自動制御学会東北支部 45周年記念講演会、資料番号 2205, (2009.9.7), (岩手大学)
- 7) 高木 相：「道路交通流の物理的性質 (II) —  $t-s$ ダイアグラムによる交通流の表示—」、計測自動制御学会東北支部 第247回研究集会、資料番号 247-5 (2008. 12.19)
- 8) 高木 相：「道路交通流の物理的性質 (I) —挙動の調査—」、計測自動制御学会東北支部第246回研究集会資料番号 246-17 (2008.11.19)
- 9) 鈴木 祥介、谷口 正成、高木 相：「 $V-L$ 指数則からの Shockwave の伝搬速度の導出」、電子情報通信学会ソサイエティ全国大会、A-17-2、(H.21、9、17)
- 10) Shosuke Suzuki, Masaki Tsunoda, Masanari Taniguchi, Tasuku Takagi: "Characterization of Road Traffic Flow from Measured Data of Speed and Time-Headway -Relationship between Density( $k$ ), Flow Rate( $q$ ) and Speed( $V$ ) -", SICE Annual Conference 2007, 2B07, pp.397-401, (2007-9)
- 11) 高木 相：「道路交通流の物理的性質 (V) — $V-L$ 指数則における定数  $\beta$  および  $L_0$  についての考察—」、計測自動制御学会東北支部 第252回研究集会、資料番号 252-22 (2009.10.30)