

共通リアプノフ関数を用いた 線形リセットシステムの設計について

Synthesis of liner reset system via common Lyapunov function approach

○朝倉 裕幸, 佐藤 淳

○ Hiroyuki Asakura, Atsushi Satoh,

岩手大学

Iwate University

キーワード: リセットシステム (Reset system), Zeno 解 (Zeno solution),
線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality), リヤプノフ関数 (Lyapunov function)

連絡先: 〒 020-8551 岩手県盛岡市上田 4-3-5 岩手大学大学院 工学研究科 機械システム工学専攻
佐藤 淳, Tel: (019)621-6404, E-mail: satsushi@iwate-u.ac.jp

1. 緒言

リセットシステムは Clegg¹⁾ により考案されたもので、線形システムにリセット動作を付け加えた非線形システムである。例えば Clegg integrator と呼ばれるリセットシステムは、積分器の入力と出力とが異符号になった瞬間に内部の状態をゼロにリセットするという動作を加えたシステムである。

近年、より一般のリセットコントローラに関する研究や、LMI アプローチに基づく解析手法などが発展しつつある^{2),3)}。不安定な線形時不変フィードバックシステムにリセット動作を付加することで、システムが安定化されたり、線形制御と比べ制御性能が向上する場合があることが知られている。

本研究では、近年 Nešić *et.al* により提案されたリアプノフ関数に関する条件⁴⁾に基づき、

状態フィードバック型リセットシステムの設計について考える。

2. 準備

2.1 リセットシステム

本研究では次の線形リセットシステムについて考える。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_d d & \text{if } x \in \mathcal{F}, \\ x^+ = A_r x & \text{if } x \in \mathcal{J}, \end{cases} \quad (1)$$

$$y = Cx \quad (2)$$

flow set $\mathcal{F}$ 、jump set $\mathcal{J}$ を non-definite な行列 M を用いて以下のように定義する。

$$\begin{cases} \mathcal{F} := \{x : x^T M x \leq 0\} \\ \mathcal{J} := \{x : x^T M x \geq 0\} \end{cases} \quad (3)$$

$x = [x_p \ x_r]^T$ はプラントの状態量 x_p とコントローラの状態量 x_r からなる状態ベクトルであ

り、 d は外乱、 y は出力である。リセットシステムではシステムの状態 x がある領域内に遷移した時に、「リセット」と呼ばれる不連続な状態の遷移が発生する。flow set と jump set は全体の状態空間を2つに区切る閉集合であり、それぞれリセットが起こらない領域とリセットが起こり得る領域を意味する集合である。リセット行列 A_r はリセット後の状態量を決める行列であり、リセット直後の状態量を x^+ で表す。

2.2 タイマー要素の導入

タイマー要素の導入によってゼノ解の可能性を除外する⁴⁾。ゼノ解とは有限時間内にリセット間隔が0に収束する状態であり、数学的にはありえるが物理的にはありえない状態である。タイマー要素を導入しシステムを拡張させると、全体のダイナミクスは以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tau} &= 1, \\ \dot{x} &= Ax + B_d d \end{aligned} \right\} \text{ if } x \in \mathcal{F} \text{ or } \tau \leq \rho \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau^+ &= 0 \\ x^+ &= A_r x \end{aligned} \right\} \text{ if } x \in \mathcal{J} \text{ and } \tau \geq \rho \quad (5)$$

タイマー要素の導入によって、システムの状態量 x が jump set 内へ遷移しても前のリセットが起こってから一定時間 ($\rho > 0$) 以上経過しなければ次のリセットが起こらないようになる。これによりゼノ解の可能性を除外する。

3. 主結果

本研究では、まずリアプノフ関数が満たすべき条件を定式化し、状態フィードバック型リセットシステムの安定化ゲインの設計を行う。

3.1 リアプノフ関数が満たすべき条件の定式化

システム (4), (5) 式において指数安定性と $\mathcal{L}_2$ 安定性を示すためにリアプノフ関数が満たすべき条件を仮定1で提案している⁴⁾。

仮定 1 システム (1) 式と $|y|^2 \leq \lambda_y |x|^2$ を満たす出力 y について、リアプノフ関数 $V(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は全ての d について次式を満たす正の実数 $\lambda_i, i = 1, \dots, 7, \eta \in (0, 1)$ が存在するような関数である:

$$\lambda_1 |x|^2 \leq V(x) \leq \lambda_2 |x|^2 \quad (a)$$

$$\langle \nabla V(x), Ax + B_d d \rangle$$

$$\leq \lambda_3 V(x) + \lambda_4 |x| |d|, \forall x, \quad (b)$$

$$\langle \nabla V(x), Ax + B_d d \rangle$$

$$\leq -\lambda_5 V(x) - \lambda_6 |y|^2 + \lambda_7 |d|^2, \forall x \in \mathcal{F}, \quad (c)$$

$$V(A_r x) \leq \eta V(x), \quad \forall x \in \mathcal{J}. \quad (d)$$

仮定1を満たす $V(x)$ が存在するための十分条件を定理1に示す。

定理 1 次の (6), (7) 式を満たす $P = P^T > 0$, $\tau_F, \tau_R \geq 0, \gamma > 0$ が存在するならば、仮定1を満たすような $V(x) = x^T P x$ が存在する。

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A - \tau_F M & P B_d & C^T \\ B_d^T P & -\gamma I & 0 \\ C & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

$$A_r^T P A_r - P + \tau_R M < 0 \quad (7)$$

3.2 状態フィードバック型リセットシステムの安定化ゲインの設計について

以下の状態フィードバック型リセットシステムについて考える。

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_u K)x + B_d d & \text{if } x \in \mathcal{F}, \\ x^+ = A_r x & \text{if } x \in \mathcal{J}, \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 K および $\mathcal{F}, \mathcal{J}$ を決定する行列 M は設計パラメータである。タイマー要素を導入してシステムを拡大すると、全体のダイナミクスは以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tau} &= 1, \\ \dot{x} &= (A + B_u K)x + B_d d \end{aligned} \right\} \text{ if } x \in \mathcal{F} \text{ or } \tau \leq \rho \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau^+ &= 0 \\ x^+ &= A_r x \end{aligned} \right\} \text{ if } x \in \mathcal{J} \text{ and } \tau \geq \rho \quad (10)$$

定理 1 より (9),(10) 式のシステムの指数安定性および $\mathcal{L}_2$ 安定性を保証するリアプノフ関数が存在することの十分条件は、(11),(12) 式を満たすような $P = P^T > 0, K, \tau_F, \tau_R \geq 0, \gamma > 0$ が存在することである。

$$\begin{bmatrix} F(P, K) & PB_d & C^T \\ B_d^T P & -\gamma I & 0 \\ C & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

$$A_r^T P A_r - P + \tau_R M < 0 \quad (12)$$

$$F(P, K) = (A + B_u K)^T P + P(A + B_u K) - \tau_F M \quad (13)$$

ここで、 $X = P^{-1}, G = KX, \hat{M}_X = XMX$ とおき、Schur complement を用いれば (11),(12) 式と等価な次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \hat{F}(X, G) & B_d & XC^T \\ B_d^T & -\gamma I & 0 \\ CX & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} -X + \tau_R \hat{M}_X & XA_r^T \\ A_r X & -X \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$\hat{F}(X, G) = XA^T + AX + B_u G + G^T B_u^T - \tau_F \hat{M}_X \quad (16)$$

もし、固定された $\hat{M}_X$ について (11),(12) 式を満たす X, G が存在すれば M, K は一意に求まる。

なお、(15),(17) 式を満たすような $X = X^T > 0, G, \tau_F, \tau_R \geq 0, \gamma > 0$ が存在すればシステムは指数安定である。

$$\hat{F}(X, G) < 0 \quad (17)$$

固定された $\hat{M}_X$ について (15),(17) 式を満たす X, G が存在すれば M, K は一意に求まる。

3.3 設計の手順

リセットコントローラの設計手順を示す。

ステップ 1 任意の non-definite な行列 $\hat{M}_X$ を選択する。

ステップ 2 固定された $\hat{M}_X$ に対し条件 (15),(17) 式を満たす X, G を数値最適化手法により求め、 P, K, M を決定する。

ステップ 3 求められた M において、 $x^+ \in \mathcal{F}$ が成立するかを確認する。これは、以下の (18) 式を満たすような $\tau \geq 0$ が存在することを確認すればよい。

$$A_r^T M A_r + \tau M \leq 0 \quad (18)$$

4. 数値例

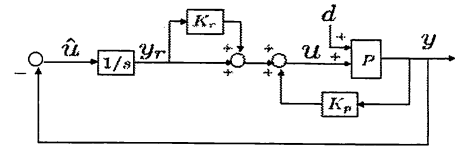


Fig. 1 状態フィードバックシステム

図 1 のブロック線図で表現されるような状態フィードバックシステムについて考える。プラント P のダイナミクスは以下のように記述される。

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_{pu} u + B_{pd} d \quad (19)$$

$$y = x_p \quad (20)$$

積分器は以下のように記述される。

$$\dot{x}_r = -y \quad (21)$$

$$y_r = x_r \quad (22)$$

システム全体の状態方程式は以下のように表現される。

$$\dot{x} = (A + B_u K)x + B_d d \quad (23)$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} A_p & B_{pu} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} B_{pu} \\ 0 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} B_{pd} \\ 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_p & K_r \end{bmatrix} \quad (24)$$

システム (9),(10) 式の係数行列を以下のようにおく。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

数値例 $\hat{M}$ を以下のように固定する。

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

この時、条件 (15),(17) 式から X, G を求めると、

$$X = \begin{bmatrix} 0.7365 & 0.2058 \\ 0.2058 & 1.3963 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} -2.1501 & -1.2601 \end{bmatrix},$$

$$\tau_F = 1.0019, \tau_R = 0.6037,$$

してがって P, K, M は、

$$P = \begin{bmatrix} 1.9988 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.9469 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} -2.5000 & -1.5264 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} -4.6233 & 2.4871 \\ 2.4871 & -0.6327 \end{bmatrix}$$

5. 結言

本研究では状態フィードバック型リセットシステムのリアプノフ関数が満たすべき条件の定式化を行い、さらに状態フィードバック型リセットシステムの安定化ゲインの設計を行った。

参考文献

- 1) J.C.Clegg. A nonlinear integrator for servomechanisms. *Trans.A.I.E.E.*,77(part II): 41-42,(1958)
- 2) D.Nešić, L.zaccarian, and A.Teel:Stability properties of reset system,in IFAC World Congress, Prague (CZ) (2004)
- 3) W.H.T.M. Aangenent, G. Witvoet, W.P.M.H. Heemels, M.J.G. van de Molengraft and M.Steinbuch:An LMI-based $\mathcal{L}_2$ gain performance analysis for reset control system, 2008 American Control Conference, (2008)
- 4) D.Nešić,Andrew R.Teel and Luca Zaccarian . On necessary and sufficient conditions for exponential and $\mathcal{L}_2$ stability of planar reset systems. In *American Control Conference*,,pages 4140-4145,June 11-13 2008.
- 5) 岩崎哲也, LMI と制御, 昭晃堂,pp 121-122,1997

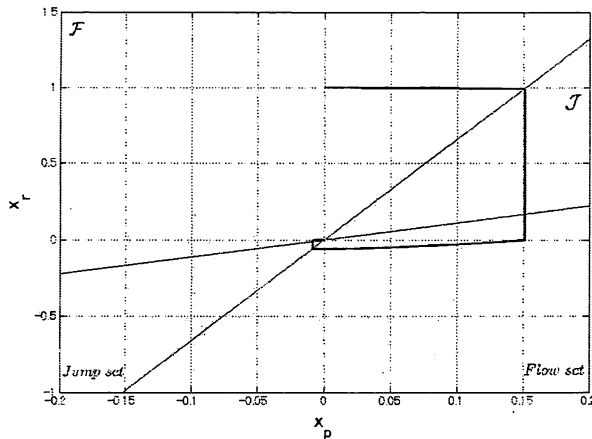


Fig. 2 状態フィードバック型リセットシステムの状態空間平面

求めた M に対し (18) 式を計算すると、 $\tau = 3.4169 \times 10^{-13} > 0$ よりリセット後に状態量 x は flow set の内部へジャンプする。