

非整数次フーリエ変換による 光波伝搬の数値計算法の検討

A study on numerical method for light-wave propagation in terms of fractional Fourier transforms.

○橋本 哲弥, シラウィット ティーラヌタラーノン, 吉森 久

○Tetsuya Hashimoto, Sirawit Teeranutrannont and Kyu Yoshimori

岩手大学大学院工学研究科

Graduate School of Engineering, Iwate University

キーワード: 非整数次フーリエ変換(fractional Fourier transform), フレネル回折(Fresnel diffraction),

3次元イメージング(3-D imagng), 角スペクトル法(Angular spectrum)

連絡先:〒020-8551 盛岡市上田 4-3-5 岩手大学院 工学研究科 電気電子・情報システム工学専攻

吉森 久, Tel 019-621-6485, FAX 019-621-6485, E-mail:yosimori@ql.cis.iwate-u.ac.jp

1. はじめに

光源から放射された光波が有限距離において回折する様子を与える計算式をフレネル回折積分といい, われわれの研究室で開発されたデジタル分光ホログラフイーの光源像再生にも利用されている。

フレネル回折における積分の直接計算は効率が悪く, その改善を目的として様々な数値計算法が研究されてきた. 中でも著名な計算法としては, FFT 法と角スペクトル法があるが, それらは計算可能な伝搬距離が制限されていて, 使い分ける必要があった. そこで距離の制限を受けず振幅計算が可能な非整数次フーリエ変換(Fractional Fourier Transform : FRFT)を利用したフレネル回折積分が提案された。

本研究では, これら3つの数値計算法それぞれによる回折の数値計算, 及びデジタル分光ホログラフイーにより実験的に取得された相互スペクトル密度からの3次元像の再生結果について比較し, 非整数次フーリエ変換を利用することの有用性を検討する。

2. 非整数次フーリエ変換の定義

FRFT は非整数な変換次数 p ($0 < |p| < 2$)

を有する線形変換で, 入力信号 $u(a)$ に対し次式で定義される^{1), 2)}:

$$\begin{aligned} F^p[u(a)] &\equiv u^p(a') \\ &= C_p \exp\left\{\frac{i\pi}{\tan\left(\frac{p\pi}{2}\right)}\right\} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} u(a) \exp\left\{\frac{i\pi}{\tan\left(\frac{p\pi}{2}\right)} a^2\right\} \\ &\times \exp\left\{\frac{-i2\pi}{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)} aa'\right\} da. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, 定数 C_p は,

$$C_p = \frac{\exp\left\{\frac{-i\pi \operatorname{sgn}\left[\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right] + jp\pi}{4}\right\}}{|\sin(p\pi/2)|^{1/2}} \quad (2)$$

で与えられる. 式(1)から, $p = 0$ の場合, 入力信号 $u(a)$ は変化せず

$$\begin{aligned} u^0(a') &= \int_{-\infty}^{\infty} u(a) \delta(a - a') da \\ &= u(a'). \end{aligned} \quad (3)$$

$p = \pm 2$ のとき、逆転を起こす

$$u^{\pm 2}(a') = \int_{-\infty}^{\infty} u(a)\delta(a+a')da = u(-a'). \quad (4)$$

更に、 $p = 1$, $p = -1$ はそれぞれフーリエ変換、逆フーリエ変換と同等である。また、FRFT の特性として半群特性が挙げられ、次式が成り立つ:

$$F^a\{F^b[f]\} = F^{a+b}[f]. \quad (5)$$

したがって、FRFT により実際計算される変換次数 p は $[0, 1]$ に収まる。

FRFT の高速な計算法は 2 回の高速フーリエ変換により定数を見捨てて次式で表される:

$$u^p(n') = \exp\left[-\frac{i\pi}{N}\tan\left(\frac{p\pi}{4}\right)n'^2\right] \times \text{DFT}^{-1}\left[\text{DFT}\left[u(n)\right] \times \exp\left[-\frac{i\pi}{N}\tan\left(\frac{p\pi}{4}\right)n^2\right]\right] \times \exp\left[-\frac{i\pi}{N}\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\tilde{n}^2\right], \quad (6)$$

ここで N は信号の長さである。この計算法の DFT についてナイキスト条件をみると、 $0 < p < 1$ ではエイリアシングを起こさないことが分かる。

3. フレネル回折と数値計算法

開口 $g(x)$ を通った波長 λ の平面波が光軸上 R 離れた観測面で生成する回折像 $u(X)$ は次式で表される³⁾

$$u(X) = \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda R}X^2\right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\exp\left[\frac{i\pi}{\lambda R}x^2\right] \times \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda R}xX\right]dx = g(X) * \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda R}X^2\right]. \quad (7)$$

式(7)の直接離散的な計算は効率が悪いので、高速フーリエ変換や角スペクトル伝

搬則を利用した近似的な計算法が提案されており、以下に概要を述べる。

3-1. FFT 法

式(7)の第 1 表式について、積分部分をフーリエ変換とみなし、離散化すると次式を得る:

$$(u_R)_{m'} = \exp\left[\frac{i\pi\lambda R}{\Delta x^2}n'^2\right] \times \text{DFT}\left\{u_0\left(\frac{n\Delta x}{N}\right) \times \exp\left[\frac{i\pi\Delta x^2}{\lambda RN^2}n^2\right]\right\}. \quad (8)$$

この手法で計算される領域は R に比例するため、開口部分 $R = 0$ では計算できない。また DFT 内の 2 次位相のナイキスト条件から、FFT 法ではナイキスト条件 ($f_1 = \Delta x^2/\lambda N$) より小さい距離では振幅がエイリアシングを起こすことがわかる。

3-2. 角スペクトル法

式(7)の第 2 式のように畳み込み積分と見なすことで、次のようにも記述できる:

$$(u_R)_{v'} \propto \text{DFT}^{-1}\left[\text{DFT}\left[u_0\left(\frac{n\Delta x}{N}\right)\right] \times \exp\left(-\frac{i\pi\lambda R}{\Delta x^2}\tilde{n}\right)\right]. \quad (9)$$

この手法で計算される領域は常に入力されたサイズと一定になる。また逆 DFT 内の 2 次位相のナイキスト条件から、角スペクトル法では $R > f_1$ のときエイリアシングを起こすことがわかる。

3-3. FRFT 法

フレネル回折は、波動方程式の形式解より、FRFT の定義式(1)を利用して次のように記述できる:

$$u_z\left(\frac{x_p}{\beta}\right) = \exp\left[i\pi x_p^2 \frac{\tan\varphi}{\lambda f_1}\right] F^p[u_0(x_0)], \quad (10)$$

ここで、 $\beta = \cos\varphi$, $\varphi = p\pi/2$, $z = f_1 \tan\varphi$ である。これを離散化すると次式を得る:

$$(u_z)_\mu = \exp \left[i\pi\mu^2 \frac{\tan\varphi}{N} \right] F^p [u_0(x_0)]. \quad (11)$$

この手法で計算される領域は $\sec\varphi$ により開口では入力されたサイズと同じで、距離に従って大きくなっていく。ナイキスト条件について考えた時、振幅計算に関して常にエイリアシングを起こさないことが分かる。

4. 数値計算による比較

フレネル回折の数値計算を近距離、中距離、遠距離で行い、各距離における振幅分布を比較した。光源は、一辺 13.3024mm の正方開口に波長 $\lambda = 543.5\text{nm}$ の平面波を照射した場合を考える。一辺のサンプリング数は $N = 256$ 、大きさ $\Delta x = 26.6048\text{mm}$ とした。回折距離はそれぞれ $24.7\text{mm}(p=0.05)$ 、 $313.5\text{mm}(p=0.5)$ 、 $+\infty(p=1)$ とした。計算結果を図 1 に示す。図 1(a) は近距離、図 1(b) は中距離、図 1(c) は遠距離での計算結果であり、それぞれ左上が入力信号、右上が FFT 法、左下が角スペクトル法、右下は FRFT 法による結果である。FRFT 法は近距離では角スペクトル法、遠距離では FFT 法とそれぞれ有効とされる手法と結果が一致している。このことから、FRFT 法が距離の制限を受けない柔軟な計算法であることが確認できた。

5.3 次元光源像再生比較

次にデジタル分光ホログラフィーの方法で実験的に取得される相互スペクトル密度に対して、光源像再生処理を各計算法で行い、その結果を比較した。測定された相互スペクトル密度は観測面から 85mm 離れた点光源の空間情報を持った複素ホログラムと等価である。各手法により再生された 3次元像について、強度分布の最も高い場所を点光源の位置として、その位置での z 軸方向の強度の変化を、FFT 処理におけるゼロパディングの条件を変えながら比較した。計算結果を図 2 に示す。その結果、FFT 法はゼロパディングを多くとるほど強度分布の変化は乱れ、角スペクトル法はゼロパディングの量が少ない時強度分布の変化が乱れるが、FRFT

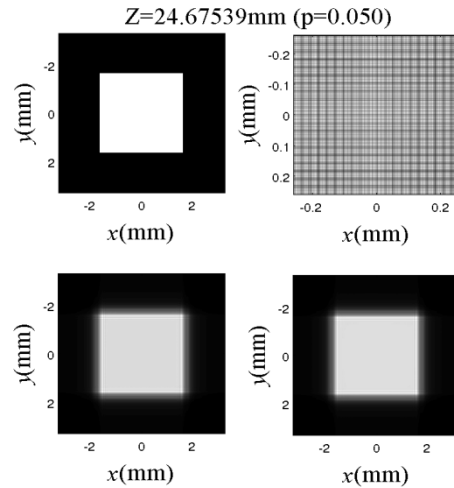


図 1(a) 近距離における回折パターン
左上: 入力信号 右上: FFT 法
左下: 角スペクトル法 右下: FRFT 法

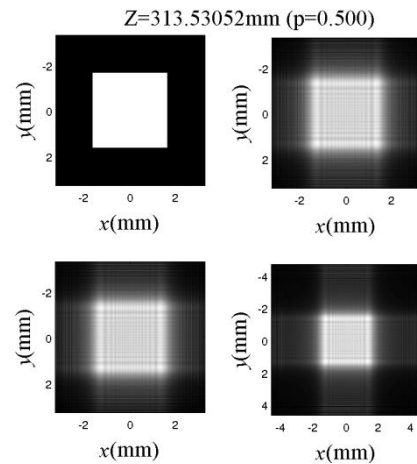


図 1(b) 中距離における回折パターン
4 画像の配置は図 1(a) と同様

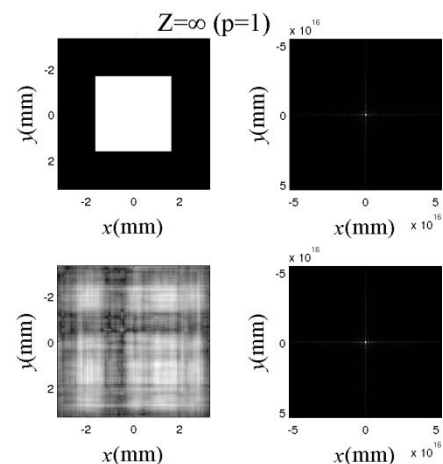


図 1(c) 遠距離における回折パターン
4 画像の配置は図 1(a) と同様

法はゼロパディングに関わらず滑らかな強度分布を再生することが確認できた。その原因はゼロパディングによりナイキスト限界の位置が変化したことが原因であると考えられるが、再生距離に制限を持たないFRFT法はこの処理の有無にかかわらず滑らかな再生を実現することが出来る。このことから、デジタル分光ホログラフィーへの実利用においても有用であることが確認できた。

6. まとめ

フレネル回折積分の数値計算法であるFFT法、角スペクトル法、FRFT法の3手法について回折計算の数値計算比較を行い、更にデジタル分光ホログラフィーの生データから生成した相互スペクトル密度から単色点光源の3次元像の再生比較及び検討を行った。その結果、FRFT法が再生距離に制約を持たない柔軟な再生法であることが確認され、デジタル分光ホログラフィーへの利用において有用であることがわかった。

今後は、直接的にはフレネル回折積分を適用できない双曲線型及び他のタイプのインターフェログラムを基礎とする3次元干渉分光イメージングへもFRFT法を適用できるよう研究を進めていく予定である。

参考文献

- 1) A. W. Lohmann, "Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform," *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 2181-2186(1993)
- 2) J. Garcia, D. Mas, and R. G. Dorsch, "Fractional-Fourier-transform calculation through the fast-Fourier transform algorithm," *Appl. Opt.* **35** 7013-7018 (1996)
- 3) D. Mas, J. Garcia, C. Ferreira, L. M. Bernardo, F. Marinho, "Fast algorithms for free-space diffraction patterns calculation," *Opt. Commun.* **165**, 233-245 (1999)

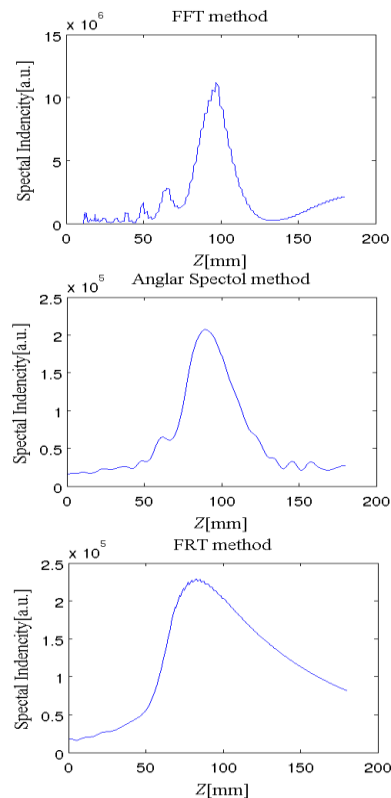


図 2(a) 相互スペクトル密度からの光源再生(ゼロパディングなし, $N=32$)

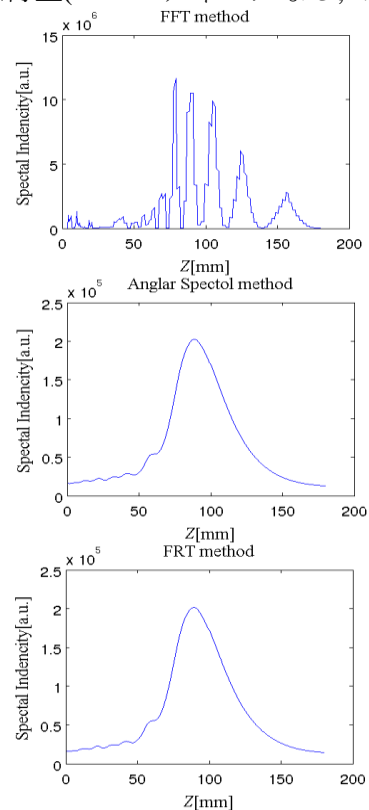


図 2(a) 相互スペクトル密度からの光源再生(ゼロパディングあり, $N=256$)