

道路交通流における Weber—Fechner の法則

Weber-Fechner Law in Road Traffic flow

高木 相

東北大学名誉教授

Tasuku Takagi

Professor Emeritus, Tohoku University

キーワード: 自動車列、Weber-Fechner の法則、渋滞

連絡先: 〒981-0952 仙台市青葉区中山 5-2-20

E-mail: tasuku@sirius.ocn.ne.jp

1. はじめに

筆者のこれまでの交通流についての研究で、道路交通流の全ての挙動は車速度 $V(m/s)$ と車頭時間

$T(s)$ の 2 つのパラメーターによって記述できることを明らかにしてきた。特に重要なことは、速度 V と車頭距離 $X(m)(=TV)$ の関係に

$$X = X_0 e^{\beta V} = X_0 \exp(\beta V) \quad (1)$$

なる指数則が存在することを V と T の測定値からのデータ分析から明らかにした¹⁾²⁾。ここに X は車頭距離で

$$X = TV \quad (2)$$

である。また、 X_0 は停止車列 ($V=0$) における車頭距離である。(文献 1)、2) では L 、 L_0 としているが X 、 X_0 と同義である)。また β は車の速度に関する係数である。

本文は (1) 式が Weber-Fechner の法則に適合することを明らかにし、これをベースにして時間領域での交通流の挙動、とくに渋滞に至る過程を理論的に示したものである。

本文は (1) 式が Weber-Fechner の法則に適合することを明らかにし、これをベースにして時間領域での交通流の挙動、とくに渋滞に至る過程を理論的に示したものである。

2. Weber-Fechner の法則

この法則は人間の感覚と物理的刺激の間に指数関数的、あるいは対数的関係が存在するというものである。

すなわち、物理的刺激 (W) (力、可視光の強さ、音の高さ (周波数)、重量、など) に対する感覚量、すなわち感じ方 (S) (痛さ、明るさ、音の高さ、重さ、など) は W の変化量 ΔW に比例するのではなく、 $\frac{\Delta W}{W}$ に比例するというものである。これを

Weber (Ernst Heinrich Weber(1795-1878)) は

$$k \frac{\Delta W}{W} = \Delta S \quad (3)$$

と定式化した。後に Fechner (Gustav Theodor Fechner(1801-1887)) はこれを積分して、対数式の形で

$$k \ln \left(\frac{W}{W_0} \right) = S \quad (4)$$

と書いて (3) 式を一般化した³⁾。(文献 3) では ΔW を dW 、 ΔS を ds としている。)

3. 交通流における刺激と感覚量及び Weber-Fechner の法則

(4) 式を指数関数で書くと

$$W = W_0 e^{\frac{S}{k}} \quad (5)$$

と書ける。これと交通流指数則 (1) 式とを対応すると、

- ・物理量 (刺激) : W は X に対応
- ・感覚量 : S は V に対応
- ・定数 : $\frac{1}{k}$ は β に対応

という関係になる。この対応に十分な根拠があれば、

交通流に Weber-Fechner の法則が存在することになる。これについて考察する。

まず、車は人間（ドライバー）が運転するものであることを認識しなければならない。道路を走行する車の流れに法則があるとすれば、それはドライバーに関わる法則である。つまり、

a) ドライバーが受ける物理的的刺激は何であるか：

車頭距離 X は物理的的刺激量であるか？

b) ドライバーが感じる感覚量は何であるか：車速度 V は感覚量であるか？

の二つが明確に説明できるかどうかというのが課題となる。上記 a), b) とともに人間の感覚に関わるものであるから、決定論的な手段、例えば数学的な手段で証明できるものではない。よってここでは車間距離（車頭距離 X は車間距離に車長を加えたもの）と速度 V のいずれもドライバーは目によってその大小を判断していることから、どちらがより物理量として把握出来やすいかを経験的に判断しなければならない。

a) について：ドライバーは前車を追従走行している状態では、車間距離を常に目測で感知しており、およそ何メートルというように判断することができ、安全距離を保って追従走行する。ドライバーにとって車間距離はもっとも重要で、安全を保つために前車に接近し過ぎないように速度を調整する。この時ドライバーは速度がいま物理的に毎時何キロメートルであるかということには無関心である。

b) について：上で述べたように、追従走行時の速度は前車のそれに合わせて適正な車間距離を保って安全走行するということから、ドライバーの感覚量と考えるのが適当である。事実、速度（キロメートル/毎時）をドライバーは物理量的に把握することはほとんど不可能であるから、運転席にはスピードメーターが設置されているのである。

以上のことから、定性的な、あるいは経験的な判断から、車速度 V は感覚量、車頭距離 X （実際は車間距離）は目に与える刺激量と考えることが出来る。以上のように考えられることから (1) 式で表わされる道路交通流における V と X の間に存在する指数関数関係は Weber-Fechner の法則に適合しているものと結論してよいであろう。

4. 交通流における Weber の微分形式と Fechner の積分形式 (Weber の式と Fechner の式)

Weber の式は (3) 式である。これを交通流のパラメータ V と X に当てはめれば、(6) 式になる。

ここで定数と考えられる k は都合により $\beta (= 1/k)$ としている。すなわち、

$$\frac{\Delta X}{X} = \beta \Delta V \quad (6)$$

また、Fechner の積分表示は ΔX を dX 、 ΔV を dV として (6) 式を積分すると、(4) 式に対応して

$$\ln\left(\frac{X}{X_0}\right) = \beta V \quad (7)$$

となる。これを指数関数として表現すれば、(1) 式となる。すなわち、

$$X = X_0 \exp(\beta V) \quad (1) \text{ (再掲)}$$

以後便宜上 Weber の式 ((6) 式) にたいして (1) 式を Fechner の式と云うことにする。

数学的に明らかなように、Weber の式が成立すれば、Fechner の式は単なる積分形式として導出される。しかし後述するように、この両者の意味するところは異なる。Fechner の式が交通流を適確に表現しているのに対して、Weber の式は限定的な情報しか提供していない。このことを次章で明らかにする。

5. 交通流における Weber の式と Fechner の式およびこれらと実データとの関係

5.1 Weber の式の成立

まず交通流において、Weber の式が成立するか否かを検証しなければならない。これについて Fig.1

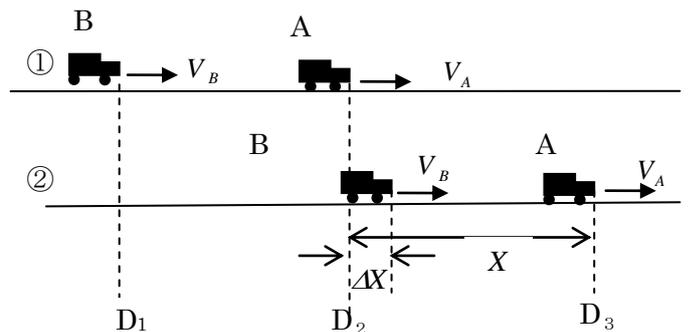


Fig.1 走行車の速度と車頭位置の関係

のモデル図によって考察することとする。

Fig.1 は前車 A を B 車が追従走行している図である。①の時点から②の時点に移った状況を示す。①の時点 t_1 、②の時点 t_2 とすると、車頭時間 T (s)

は車頭時間 $T = t_2 - t_1$ である。車頭距離 X は

$$X = TV_A \quad (8)$$

である。図ではB車の速度がA車のそれより速いので ($V_B > V_A$) B車はT秒間に走る距離は $X + \Delta X$ である。 ΔX は

$$\Delta X = (V_A - V_B)T = \Delta V T \quad (\Delta V < 0) \quad (9)$$

である。Xは(8)式であるから(6)式は

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta V T}{V_A T} = \frac{\Delta V}{V_A} = \beta \Delta V \quad (10)$$

である。(6)式と比較すると(10)式は $\beta = \frac{1}{V_A}$ とした式にはかならない。

$$\frac{\Delta V}{V_A} = \beta \Delta V \quad (11)$$

である。つまり $\beta = \frac{1}{V_A}$ の条件で、交通流に関する

Weberの式((6)式)が成立することは自明である。

さて、 V_A は特定の車を意味するのではなく、 β の逆数で決まる速度という意味で V_β と書くことにする。すなわち道路を走行する一般的な車群の流れについて、Weberの式((6)式)が成立するが、ここで

$$\beta V_\beta = 1, \quad (\beta = \frac{1}{V_\beta}) \quad (12)$$

なる制限条件が付加されていることに注目しなければならない。

5.2 Fechnerの式の成立

交通流においてWeberの式((6)式)が成立することは、(6)式を積分した形が

$$\ln\left(\frac{X}{X_0}\right) = \beta V \quad (13)$$

となり、これを指数関数で表記すれば(1)式となることは2.で述べた通りである。

5.3 実交通流データとWeberの式とFechnerの式の関係

以上のように、道路交通流にはWeber-Fechner

の法則が成立することが明らかとなった。ここで実際のデータとの関係をWeberの式とFechnerの式に適用してみる。

データとしては東北高速道のデータ(吾妻PA前)で取ったものを使用する。このデータには渋滞時と非渋滞時のものが混在しているので多くの情報をもっていると考えられるからである。Fig.2に時間経過と速度のデータ(300台)を示す。

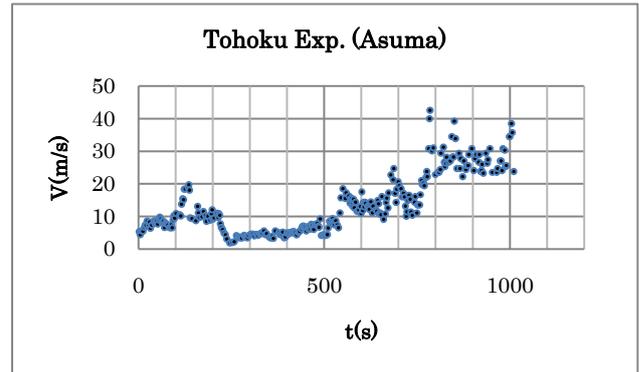


Fig. 2 東北道(吾妻)の速度の時間変化

Weberの式にこのデータを当てはめてみるとFig.3となり、Fechnerの式に当てはめてみるとFig.4となった。

Fig.3とFig.4は全く同じデータである。Fig.3を積分したものがFig.4であるが、一見してこの関係を認識することはできない。Fig.3は $\Delta V = 0$ で0値を通る扇型にデータが分布している。包絡線が直線でその傾斜が β であることは、(6)式から明らかである。Fig.3では $\beta = 0.03 \sim 0.3$ の間にデータが分布しているが、この間には多くの β 値をもつ直線があり、それらのそれぞれの線上にデータ点が存在しているはずである。全部を平均したのも当然直線とならなければならない。コンピュータによる平均直線が図中に示してあるが、この式に示すように β 値は0.0554である(この式中の定数0.0176は誤差である。この項は本来0でなければならない)。Fig.4でも指数関数での近似式が示してある。一般道での多くのデータの検証からV-X特性は指数関数的であることはすでに明らかとなっている^{1) 2)}。Fig.4では β 値は0.0696である。Fig.3と4の中の β 値はともに平均的な β 値であるが、両者には差がある。なぜ違うのかの理由を考えてみる。

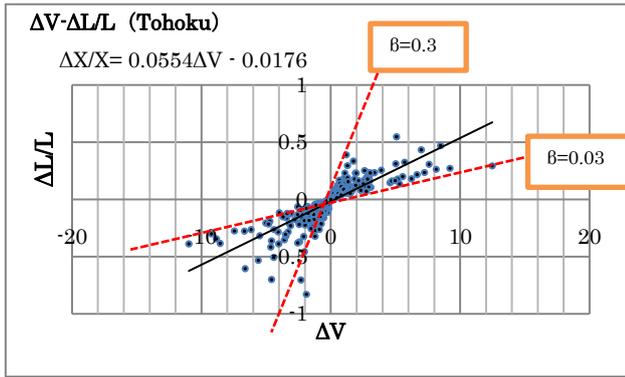


Fig.3 Weber の式へのデータの埋め込み

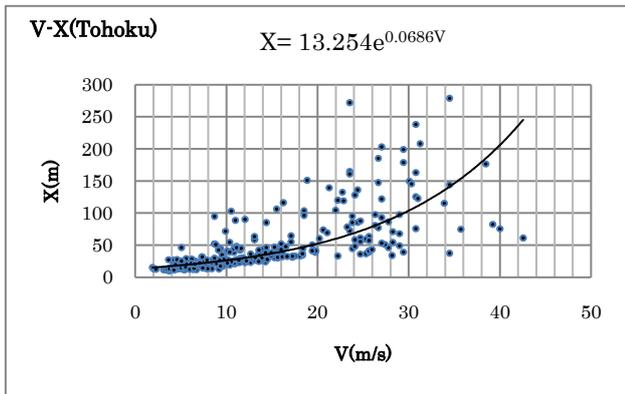


Fig.4 Fechner の式へのデータの埋め込み

大きく異なることは Fig.3 は $\beta V_\beta = 1$ という条件下のもので、Fig.4 にはその制約はないということである。つまり、Weber と Fechner のもっとも大きく異なるところは Fig.3 (Weber) では $\Delta V = 0$ のデータがグラフに現れていないことである。あとで明らかになるが、 $\Delta V = 0$ のデータは交通流では極めて大きい意味をもつ。Fig.2 では $\Delta V = 0$ のデータが見えないことが β 値の違いの原因であることは疑う余地はない。なお、 X_0 ($V = 0$ での車頭距離) は Fig.4 では 13.254m と出ている。データによってこの値は一定値ではないが、およそ 10m 前後の値である。今後数値が必要となるときは 10m とし計算する。

なお付録で示しているように、 $\beta V_\beta = 1$ の条件は車頭時間 T が最小値 T_{min} をとる速度 $V_\beta (= \frac{1}{\beta})$ を与える条件である。

5.4 $\beta V_\beta = 1$ の条件下での Fechner の式

$\beta V_\beta = 1$ なる条件は瞬時最大流量 (q_{1m} としている。付録参照) を与える車頭時間 $T = T_{min}$ を与える条件である (付録参照)。この条件が $\Delta V = 0$ のときに成立するというのが、Weber の式であるから Weber の式から直接 $\Delta V = 0$ の意味を知ることはできない。そこで、ここで Fechner の式をこの条件で運用してみることにする。

Fechner の式 (1) を Fig.1 で前車 A を車 B が追従するという状況で考える。後続車 B (速度 V_B) は前車 A の速度 V_A に等しいかそれより速い ($V_A \leq V_B$) かのいずれかが興味の対象である。追従車 B の速度が前車 A の速度より遅いときは、車頭距離は大きくなるばかりであるから追従性は失われていくことになる。このように考えて、 $V_B = V_A + \Delta V$ を考える。(説明の都合上サフィックス A,B をつける。)。そうすると (1) 式は

$$X_A = X_0 \exp\{\beta(V_A + \Delta V)\} \quad (14)$$

と書ける。特定の速度 $V = V_A$ を V_β と書く。 $\beta = 1/V_\beta$ である。 $\beta V_\beta = 1$ であるから (14) 式は

$$X_A = X_0 \exp\{1 + \beta \Delta V\} \quad (15)$$

となり

$$X_A = X_0 \exp\left\{1 + \frac{\Delta V}{V_\beta}\right\} \quad (16)$$

と書くことができる。ここで X_A は特別な値を指しているのではなく $\beta V_\beta = 1$ の条件を意味しているので、この条件での一般式として (16) 式を

$$X = X_0 \exp\left\{1 + \frac{\Delta V}{V_\beta}\right\} \quad (17)$$

と書くこととする。

6. 時間領域における交通流

6.1 はじめに (交通流の研究のこれまで)

従来の研究としては統計解析に基づく速度 - 車密度関係 ($k - V$ 特性) のモデルの導出、密度 - 交通量関係 ($k - q$ 特性)、などが議論されている。代表的な専門書にはこれらの概念的グラフが示されており、 $Q - K$ 曲線、 $Q - V$ 曲線などと書かれている⁴⁾。これらはいずれも統計的データ解析から導出されたものである。Weber-Fechner の法則が成立するか否かは、やはり統計的データ解析によって検証される。この意味で本文の 5. での記述は時間的に蓄積された多くのデータの統計的解析である。

交通流の時間軸上の解析は L.A.Pipes⁵⁾ が提唱した交通流の Dynamical Equation に基づいた、交通流の安定性の問題が議論されている。文献 4) 第 5 章にこの内容が詳細に記述されているがこの理論には物理的あるいは科学的根拠が乏しいことを筆者は本研究集会で指摘している⁶⁾。

6.2 $\beta V_\beta = 1$ での交通流 ($\Delta V = 0$ の場合)

(17) 式で $\Delta V = 0$ とする。そして X_0 を 10m とすると、

$$X = eX_0 = 2.718 * 10 \approx 30 \text{ (m)} \quad (18)$$

となる。交通流の数値解析には相当の誤差があることを考えて、ここでは 27.18m を 30m とした。

付録の 付 5) 式から最短車頭時間 T_{min} は

$$T_{min} = \beta e X_0 = \beta 2.718 X_0 \approx \frac{30}{V_\beta} \text{ (s)} \quad (19)$$

となる。

β 値が小さければ小さいほど、 T_{min} は小さくなり、

付 2) 式の瞬時最大流量は大きくなる。ここで初めて係数 β の物理的意味を知ることができた。

6.2 車頭距離 X と速度差 ΔV の関係

Fig.1 において、B 車が A 車を追従している状態を時間領域を意識して Fig.5 に示す。

B 車が A 車を追従走行しているということは、はじめは B 車の速度が A 車の速度より大きい、やがて A 車の速度と同じになって、B 車は A 車に最も接近して走行する状態を意味する。B 車は可能な車間距離まで接近する。

Fig.5 によって車頭距離 (X) の時間変化 ($X(t)$)

を考えてみよう。図において、次の関係が成立する。すなわち

$$X(t) = X'_0 + \Delta V t, \quad (20)$$

ここに、 X'_0 は $t = 0$ (はじめの状態) での車頭距離で十分大きい任意の距離である。また、

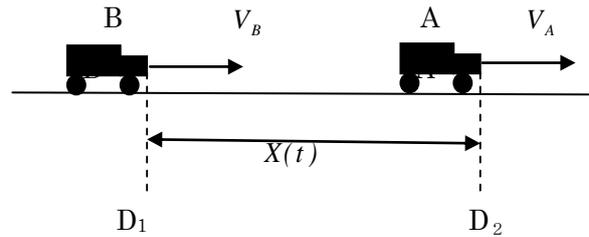


Fig.5 B 車が A 車を追従走行している図
 X は時間とともに変化する

$$(X = X(t))$$

$$\Delta V = V_A - V_B \quad (21)$$

である。追従走行とは $V_A - V_B < 0$ 、つまり $\Delta V < 0$ の場合をいう。 $(\Delta V > 0$ は前車 A より B 車の速度が遅いので $X(t)$ は t とともに大きくなるから追従とはいえない)。

- ・走行車列長は伸び ($\Delta V > 0$)、縮み ($\Delta V < 0$) しながら進行することはドライバーが経験することである。このことは交通流の安定問題としてシミュレーション的研究が過去になされている⁴⁾ が科学的根拠に乏しい。

さて、Fig.5 で $X(t)$ がどこまで縮められるかが重要である。 $V_A - V_B < 0$ 、すなわち後続車 B の速度が前車 A のそれより速い状態が続けば最終的には B 車は A 車に追突する。これは B 車の速度が低下して $V_B = V_A$ となることで避けられ、車 A, B はある一定の車頭距離を保って走行することになる。つまり時間とともに $\Delta V = 0$ に落ち着かなければ安定走行にはならない。 $\Delta V = 0$ すなわち $V_B = V_A$ となったとき安定車間距離に落ち着く。ドライバーは本能的にこうなるように運

転するのである。そしてその結果 (18) 式の車頭距離で走行することになる。

時間領域でこのことをグラフ的に描けば Fig.6 のようになる。

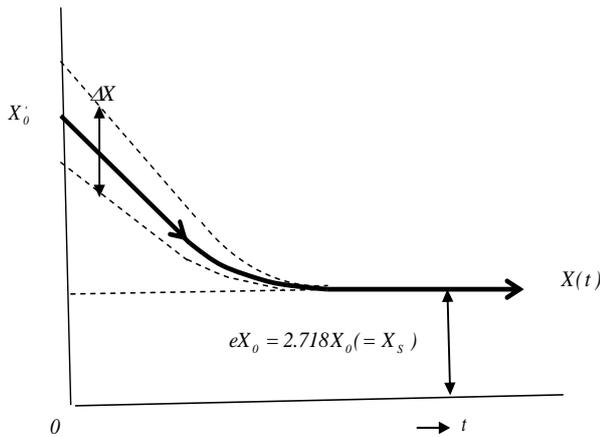


Fig.6 追従走行時の車頭距離の時間変化

ΔV が時間とともに 0 に接近することは、同時に ΔX が 0 に接近することを意味する ((10) 式参照)。

この状態はゆらぎのないときである。流体力学で云われる層流に相当する車流である。この状態での車頭距離は一定値で約 30m である。そしてこの値は速度には無関係である。付 5) (付録) からの (19) 式が示すように、 β 値が時間領域で決定できれば、その時間帯での瞬時最大流量を付 2) 式から知ることができることになる。

6.3 停止車列の生成 (渋滞) へ向かう過程

層流は乱れない流れである。交通流にも当然層流が存在する。このながれは車速度に無関係に存在する。しかしこの流れは僅かの揺らぎの存在で崩れるのは液体や気体のながれと同じである。車の流れは常にゆらぎ (速度の変化) が存在することはドライバーが経験するところである。

渋滞がどのような過程で起こるのかが本節の課題である。これから、このことを論ずるにあたって、再び (17) 式を考える。

Fig.5 で前車 A が D_2 点を過ぎたある地点で停止すれば追従車 B は A 車の後ろで停止する。B 車を追従している車も B 車の後ろに停止するなど次々に後続車が停止することによって停止車列ができる。いま車 A がある地点で停止すれば $V_A = 0$ となる。A 車が停止した時点では B 車はまだ A 車が走っていた速度と等しい速度 ($V_B = V_A$) で走行して

いるという状態が想定されるから、(17) 式の $\frac{\Delta V}{V_\beta}$ の

項は

$$\frac{\Delta V}{V_\beta} = \frac{V_A - V_B}{V_A} = \frac{-V_A}{V_A} = -1 \quad (22)$$

となって

$$X = X_0 \quad (23)$$

となる。 X_0 は停止車列の車頭距離であるから以上の説明で停止車列形成に至る過程が説明できた。これを図示すると Fig.7 のようになる。

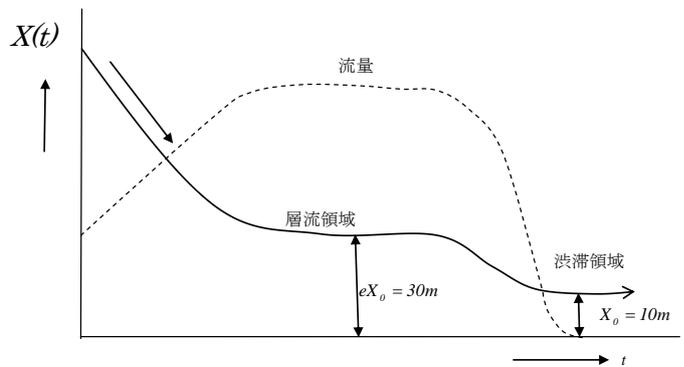


Fig.7 渋滞へ向かう車流の時間経過

層流領域から渋滞領域への過程はこのようになるものと考えられる。

層流領域から渋滞領域に至るきっかけは車列のどこかで、ある車の速度が落ちた時、そこで発生したショックウエーブの影響が次々に増幅されて、ついに停止車列を形成するに至るとい現象で説明できる¹⁾。

7. 考察 (β 値の時間領域での決定について)

本文で確定した道路交通流の法則 ((1) 式) は今後の道路交通流の効率化に向けての研究の基礎となる。先ず本文付録で導出した T_{min} (付 5) 式は交通流の効率化に向けての考察の基礎を与えている。ここで β なる量が T_{min} を決定する。 β を時間領域で如何に決定するかが次の重要課題である。 β の値は交通流量によって異なり、また道路とその状態によっても異なる値となることが予想されるから、 β を時間領域で $\beta = \beta(t)$ の形で求めるには工夫

を要する。

筆者のこれまでの経験から、交通流の時間領域の把握は30秒ごとのデータ処理でおこなうのが適当と考えている。 β の決定をこの方法で行った例をFig.8とFig.9に示す。

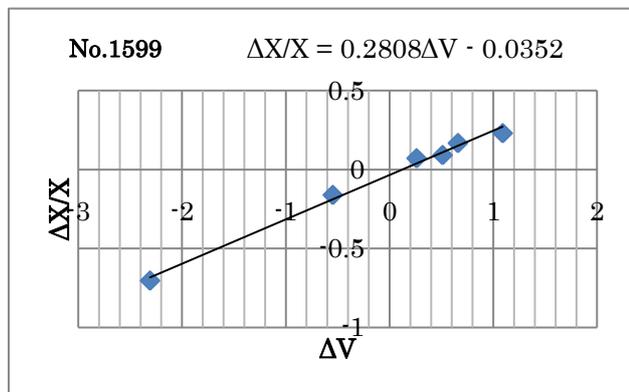


Fig8 $V \approx 3.6\text{m/s}$ (Fig.2の250秒あたり)、 $\beta = 0.28$

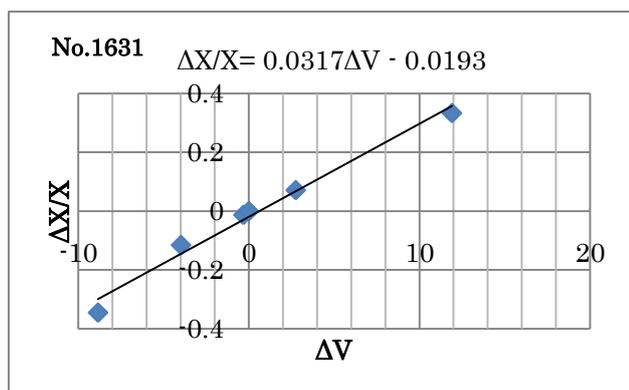


Fig.9 $V \approx 31.6\text{m/s}$ (Fig.2の1000秒あたり)、 $\beta = 0.0317$

図中のNo.は30秒ビデオのNo.である。このように30秒のビデオから $\Delta V - \Delta X/X$ のグラフを作ると、直線関係が得られ、その傾斜から β 値を知ることができる。この方法から β を30秒おきに決定することが可能である。この方法によって、交通流の短時間予測が可能となるものと期待される。

8. おわりに

本論文では、交通流にWeber-Fechnerの法則が適用されることを明らかにした。これまで、車速度と車頭距離の間には指数関数則が存在することはすでに明らかであったが、これを本論文でオーソライズすることが出来た。これによって、(1)式を交通流の指数関数則として今後の利用に供することが可能となった。

交通流の考察はこの法則を出発点として展開で

きるものと期待される。本文で明らかになった重要なポイントは β 値の意味が明らかになったこととその値を30秒間の交通流観測から知ることができることが分かったことである。加えて、Weberの式

(微分形式)((6)式)で表わされる交通流は $\beta V = 1$

の条件での法則であることが分かり、この条件は最短車頭時間 T_{min} を与えることも明らかになった。

T_{min} は瞬時最大流量を与え、これが β 値によって決まることから、実用的な展開の可能性を得ることができた。

終わりに、本論文を校閲頂いた東北文化学園大学鈴木祥介客員教授に厚く御礼申し上げる次第である。

文献

- 1) 高木相：“道路交通流の物理的性質 (IV) — $k-V$ 特性と $V-L$ 特性—”、計測自動制御学会東北支部第251回研究 (2009.7.15) 資料番号 251-12
- 2) 高木相：“道路交通流の物理的性質 (V) — $V-L$ 指数則における β と L_0 についての考察—”計測自動制御学会東北支部第252回研究集会 (2009.10.30) 資料番号 252-22
- 3) Eli Maor: e : the Story of a NUMBER, Princeton University Press 1994 (pp.111-113)(伊理由美訳：不思議な数 e の物語 岩波書店 (1999)、pp.145-151)
- 4) 佐佐木綱監修、飯川恭敬編著：交通工学、第5章 道路交通流の理論、オーム社 (1992年)
- 5) Louis A. Pipes: “An Operational Analysis of Traffic Dynamics”, Journal of Applied Physics, Vol.24, No.3 (March, 1953)
- 6) 高木相：“道路交通流の物理的性質(VI) — 走行車列長の伸縮現象の考察 - ”、計測自動制御学会東北支部第254回研究集会 (東北学院大学) 資料番号 254-9、(2009,12,17)

付録

Fechnerの式 (1)

$$X = X_0 e^{x/\beta V} \quad (1) \text{ (再掲)}$$

から $X = TV$ であるから

$$T = \frac{X_0}{V} \exp(\beta V) \quad \text{付1)}$$

である。この関数は単調連続で下に凸の関数であるから、この関数には最小値 T_{min} が存在する。 T_{min} は瞬時流量の最大値を与える。

1秒間の流量を q_l （瞬時流量）を定義すると最大瞬時流量（ q_{lm} とする）は

$$q_{lm} = \frac{1}{T_{min}} \quad \text{付2)}$$

である。

T_{min} は付1)式から求められる。付1)式を V で微分すると、

$$\frac{dT}{dV} = \frac{X_0}{V} e^{\beta V} \left(-\frac{1}{V} + \beta \right) \quad \text{付3)}$$

なるから、付4)式を0とおくと

$$\beta V = 1 \quad \text{付4)}$$

となる。本文ではこの時の速度を V_β としている。すなわち、この条件が最小車頭時間（ T_{min} ）、すなわち最大流量を与える条件である。 T_{min} は付1)式に付5)式を代入して

$$T_{min} = \beta e X_0 = \frac{e X_0}{V_\beta} \quad \text{付5)}$$

を得る。ここで、 $V_\beta = \frac{1}{\beta}$ である。

参考

自然界を律する関数として指数関数がある。図は富士山の稜線が指数関数で記述できることを示したものである。

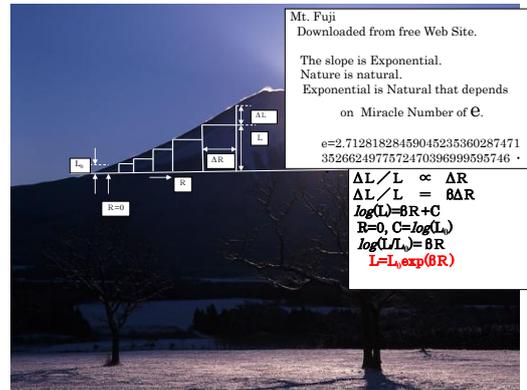
物理的解釈

噴火口から噴き出る粉塵は頂上近くに多く落ちる。中心から遠ざかるにつれて指数関数的に少なくなると解釈される。富士山に吹く風は西風が多い。仙台空港から西日本方面に飛び立つ飛行機から富士山を見ると、明らかに日本海側の稜線は太平洋側のそれより傾斜はきつい。詳しい調査をすれば富士山の歴史を知る手掛かりが得られるかもしれない。

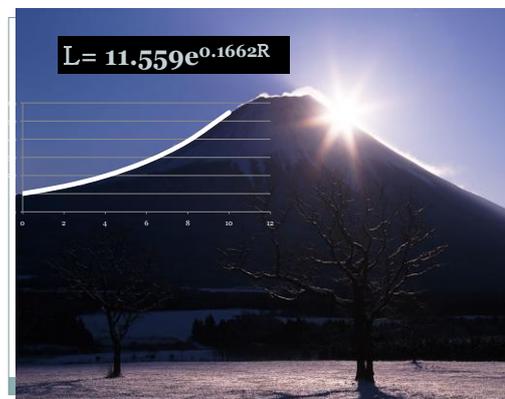
もし火星のように大気が薄いところの火山を調べると多分全方向で対称であろう。



A. 富士山の稜線



B. $\frac{\Delta L}{L} = k \Delta R$ 、（ L ：高さ、 R ：中心へ向う水平距離）



C. 指数関数近似（数値は暫定）