計測自動制御学会東北支部　第 260 回研究集会(2010.10.29)
資料番号 260-14

走行台車によるモデルブリッジ制御と GIMC 構造の制御性能の比較

A Control Performance Comparison between Model Bridge Control and GIMC

○ 香山幸輝*，有我祐一*，渡部慶二*，遠藤茂*

○Kayama koki*， Yuichi Ariga*， Keiji Watanabe*，　Sigeru Endo*

* 山形大学

* Yamagata University

キーワード：モデルブリッジ制御(Model Bridge Control)，ロバスト制御(Robust control)，内部モデル制御(Internal Model Control)

連絡先：〒992-8510 米沢市城南 4-3-16　山形大学工学部応用生命システム工学　有我研究室
香山幸輝，tell：090-9359-8445，E-mail：ekf47217@yahoo.co.jp

---

1. 緒言

今日まで多くのロバスト制御理論が提案されており，その代表とされるH_∞制御はゲインのみに着目した，スモールゲイン定理をもとにしているため，制御性能とロバスト安定性にトレードオフが発生してしまい保守的である．

そこで，この問題を解決する制御法として，モデルブリッジ制御（以下 MBC）と GIMC 構造に着目した．

MBC の特徴として，乗法的モデル誤差$1+\Delta(j\omega)$のゲインと位相の両情報を導入することでロバスト安定化を実現している点が挙げられる．よって，スモールゲイン定理を打破することが可能であり，制御性能とロバスト安定性のトレードオフを解消できる．またモデル誤差，目標値応答，外乱抑制に対して制御器（パラメータ）を用意して内部モデル制御を基に外に拡大しながら個々に特性を実現する多自由度制御である点も特徴である．

GIMC 構造は内部モデル制御に出力フィードバック補償器を導入して一般化したものであり，高い性能を持つノミナルコントローラK_0と高いロバスト性を持つロバストコントローラKを使い分け，ノミナル時にはK_0で，モデル変動時にはKで制御し，制御性能とロバスト性のトレードオフを解消している．このように MBC と特徴が似ている点が多いので，今回 MBC との制御性能の比較対象として選んだ．

本研究ではパラメータ変動を含む走行台車に対して，MBC と GIMC 構造のそれぞれで制御系を設計し，シミュレーションにより誤差補償器の有効性を検証すると同時に GIMC との比較を行う．

2. MBCの構造と安定判別法

本章では制御系の構成と安定判別法について示す．

2. 1. 制御系の構成

制御対象の伝達関数を$(1+\Delta(s))G(s)$とする．ただし，$G(s)\in R(s)$は虚軸上に零点を持たない制御対象のモデルである．$\Delta(s)\in R(s)$はモデル誤差であり，$G(s)$と$((1+\Delta(s))G(s)$の不安定極の数は等しいとする．この制御対象に対し，Fig.1の系の制御を考える．ここで，$M(s)\in R(s)$は誤差補償器で

$$M(s)G(s)=c(sI-A)^{-1}b \tag{1}$$

とする．ただし， $A \in R^{n\times n}$ ， $b \in R^{n\times 1}$ ， $c \in R^{l\times n}$ で (A,b) は可制御， (c,A) は可観測とする．また， $f \in R^{l\times n}$ ， $k \in R^{n\times l}$ で， $A-bf$ と $A-kc$ は安定， $Q_a(s), Q_b(s) \in R(s)$ は安定なパラメータとする．

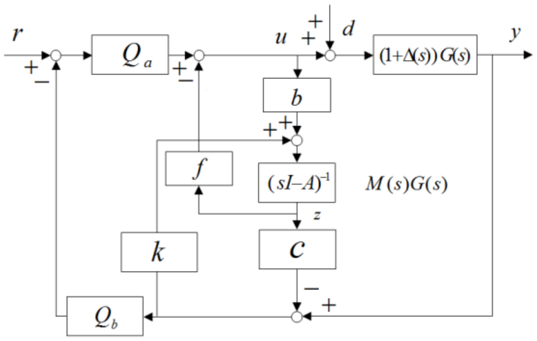


Fig. 1　State space system of MBC

2. 2.　伝達関数と安定判別

Fig.1の系の伝達特性を求めるために伝達関数表示に変換するとFig.2の内部モデルパラメリゼーション表示となる．ただし，

$$P(s) = [1 - f(sI - A + bf)^{-1} b] Q_a(s) \tag{2}$$

$$N(s) = Q_a^{-1}(s) f (sI - A + kc)^{-1} k + Q_b(s)\{1 - c(sI - A + kc)^{-1} k\} \tag{3}$$

Fig.2から, Fig.1の系で $M(s) = 1 + \Delta(s)$ としたときの目標入力 $r(s)$ に対する出力 $y(s)$ は次式となる．

$$\begin{aligned} y(s) &= M(s)G(s)P(s)r(s) \\ &= c(sI - A + bf)^{-1} b Q_a(s) r(s) \end{aligned} \tag{4}$$

また，外乱 $d(s)$ に対する出力 $y(s)$ は次式となる．

$$\begin{aligned} y &= [1 - M(s)G(s)P(s)N(s)]M(s)G(s)d(s) \\ &= [1 + c(sI - A + bf)^{-1}(k - bQ_a(s)Q_b(s))] \\ &\quad \times c(sI - A + kc)^{-1} b d(s) \end{aligned} \tag{5}$$

実際には $M(s) \neq 1 + \Delta(s)$ であり, Eq.4,5 は次式として表される．

$$y(s) = \frac{(1+\Delta(s))G(s)\dfrac{P(s)}{1 - M(s)G(s)P(s)N(s)}}{1 + (1+\Delta(s))G(s)\dfrac{P(s)N(s)}{1 - M(s)G(s)P(s)N(s)}} r(s) \tag{6}$$

$$y(s) = \frac{(1+\Delta(s))G(s)P(s)}{1 + (1+\Delta(s))G(s)\dfrac{P(s)N(s)}{1 - M(s)G(s)P(s)N(s)}} d(s) \tag{7}$$

Eq.6,7 が安定であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} &1 + (1+\Delta(s))G(s)\frac{P(s)N(s)}{1 - M(s)G(s)P(s)N(s)} \\ &\quad = [1 + \{(1+\Delta(s)) - M(s)\}G(s)P(s)N(s)] \\ &\qquad \times \frac{1}{1 - M(s)G(s)P(s)N(s)} \end{aligned} \tag{8}$$

のナイキスト線図が原点の周りを反時計方向に 制御対象の不安定極の数だけ回ることである．Eq.8のうち $1/\{1 - M(s)G(s)P(s)N(s)\}$ の部分は

$$\begin{aligned} &1 - M(s)G(s)P(s)N(s) \\ &\quad = [1 + c(sI - A + bf)^{-1}(k - bQ_a(s)Q_b(s))] \\ &\qquad \times [1 + c(sI - A)^{-1} k]^{-1} \end{aligned} \tag{9}$$

から，制御対象の不安定極を極にもち，そのナイキスト線図は原点の周りを反時計方向に制御対象の不安定極数だけ回ることが分かる．したがって，この系が安定であるための必要十分条件は $1 + \{(1+\Delta(s)) - M(s)\}G(s)P(s)N(s)$ のベクトル軌跡が原点を回らないことである．この条件は, $\{(1+\Delta(s)) - M(s)\}G(s)P(s)N(s)$ のベクトル軌跡が点 $(-1,0)$ を回らないことと等価である．

ここで Fig.3 に示すように各ベクトルを定義する．

$$\begin{aligned} OE &= M(s)G(s)P(s)N(s) \\ OF &= OE - 1 \\ OJ &= \{1 + \Delta(s)\}G(s)P(s)N(s) \end{aligned}$$

これらの各ベクトルにより次式を得る．

$$\begin{aligned} EJ &= \{(1+\Delta(j\omega)) - M(j\omega)\}G(j\omega)P(j\omega)N(j\omega) \\ EF &= -1 \end{aligned}$$

つまり，系が安定であるための必要十分条件は, すべての周波数において, 点 J が点 F の左側を回らないことと表現できる．

次に，モデル誤差の影響を受ける点 J の存在範囲を考える．モデル誤差はつぎの仮定をみたすものとする．

＜仮定2. 1＞

$$W_L(\omega) \le |1 + \Delta(\omega)| \le W_H(\omega), \forall \omega > 0 \tag{10}$$

ただし， $W_L(\omega), W_H(\omega) \in R$

＜仮定2.2＞

$$\theta_L(\omega) \le \angle(1+\Delta(j\omega)) \le \theta_H(\omega), \forall\omega > 0 \qquad (11)$$

ただし，$\theta_L(\omega), \theta_H(\omega) \in R$

以上の仮定から，点J は，Fig.3に示すベクトルと扇形の領域$ABCD$の中に存在する．ただし各点は,

$$OA = e^{j\theta_H(\omega)} W_H(\omega) G(j\omega) P(j\omega) N(j\omega)$$
$$OB = e^{j\theta_L(\omega)} W_H(\omega) G(j\omega) P(j\omega) N(j\omega)$$
$$OC = e^{j\theta_L(\omega)} W_L(\omega) G(j\omega) P(j\omega) N(j\omega)$$
$$OD = e^{j\theta_H(\omega)} W_L(\omega) G(j\omega) P(j\omega) N(j\omega)$$

以上から，仮定を満たすモデル誤差に対しロバスト安定であるための必要十分条件は, 領域$ABCD$ が点F の左側に回りこまないことであることが分かる．そこで，Fig.3で半直線EF と領域$ABCD$の縁との交点をP とし，$\eta(\omega)$ をつぎのように定義する．

$$\eta(\omega) = \begin{cases} EP\text{の最大の長さ} & \text{交点あり} \\ 0 & \text{交点なし} \end{cases} \qquad (12)$$

＜**定理1**＞ロバスト安定判別法

仮定2. 1 および2. 2を満たす任意のモデル誤差に対し，Fig.1の系がロバスト安定であるための必要十分条件は，次式を満たすことである．

$$\eta(\omega) < 1, \forall\omega \le 0 \qquad (13)$$

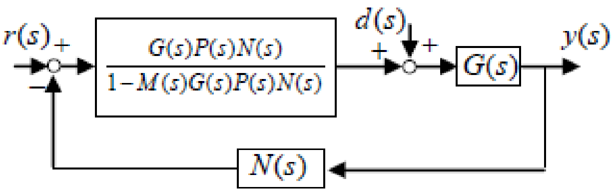


Fig. 2　Transfer function of a control system

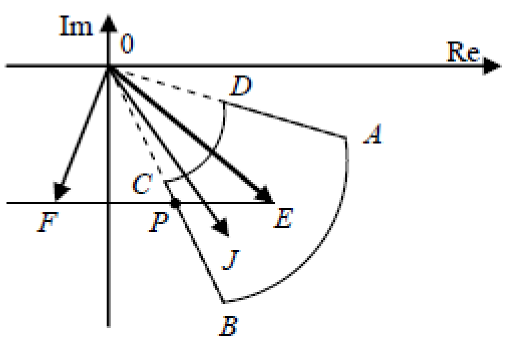


Fig. 3　A stability criterion

この安定判別のもとで，目標入力，外乱に対する過渡特性をそれぞれ，f，k で，定常特性をそれぞれ$Q_a(s)$，$Q_b(s)$ で設定できる．具体的な設計法は次章に示す.

3. 制御系設計法

本章では，状態空間モデルの制御系設計法について述べる. 誤差補償, 目標値応答の設計, 外乱抑制, 安定判別の順に**STEP1～4**に示す.

STEP1【誤差補償】：$-\omega L < \theta_L(\omega)$，$W_H(\omega) < g$，$\forall\omega \le 0$ を満たすL，$g > 0$ を見積もり，誤差補償器を次式とする.

$$M(s) = \frac{g}{\left(1 + \frac{L}{p}s\right)^p} \qquad (p = 0,1,2,3) \qquad (14)$$

STEP2【目標応答の設計】: $M(s)G(s)$ を分解し次式とする.

$$M(s)G(s) = G_I(s)G_o(s) \qquad (15)$$

ただし，$G_I(s)$ はインナで，$G_o(s)$ は不安定零点を持たない伝達関数である．この$M(s)G(s)$を

$$\begin{aligned} M(s)G(s) &= c(sI - A)^{-1}b \\ &= G_I(s)\bar{c}(sI - A)^{-1}b \end{aligned} \qquad (16)$$

とする．$(\bar{c}, A)$ は可観測とする．$M(s)G(s)$の相対次数をv とし，時定数$\tau > 0$ を任意に選び

$$(1+\tau s)^v = a_v s^v + a_{v-1}s^{v-1} + \cdots + a_1 s + 1 \qquad (17)$$

$$\psi = a_v \bar{c}A^v + a_{v-1}\bar{c}A^{v-1} + \cdots + a_1\bar{c}A + \bar{c} \qquad (18)$$

から，制御器ゲインとして次式を得る.

$$f = (a_v \bar{c}A^{v-1}b)^{-1}\psi \qquad (19)$$

$$Q_a(s) = (a_v \bar{c}A^{v-1}b)^{-1}Q_r(s) \qquad (20)$$

ここで$Q_r(s)$ は目標入力$r(s)$ の極$s_i\,(i = 1,\cdots,\gamma)$ に対し次式とする.

$$Q_r(s) = \frac{k_0 + k_1 s + \cdots + k_{r-1}s^{r-1}}{(1+\tau s)^{r-1}} \qquad (21)$$

k_i は次式を満たすように選らんだ実数である.

$$G_I(s_i)\frac{1}{(1+\tau s_i)^\nu}Q_r(s_i)=1,\quad (i=1,\cdots,r) \tag{22}$$

これらをEq.4に代入すると,

$$y(s)=\frac{1}{(1+\tau s)^\nu}Q_r(s)G_I(s)r(s) \tag{23}$$

となる．時定数τを小さくすることで目標応答を速め，$Q_r(s)$で定常偏差を0にできる．なお，上記の制御で$A-bf$は安定であり，制御系は内部安定である．

STEP3【外乱抑制】: $\alpha \ge 0$を$A+\alpha I$が虚軸上に固有値を持たないように選び，リカッチ方程式

$$Y(A^T+\alpha I)+(A+\alpha I)Y-Yc^TcY=0 \tag{24}$$

の安定化解$Y=Y^T\ge 0$を用いて

$$k=Yc^T \tag{25}$$

とする．このとき，Eq. 5の$A-kc$の固有値は安定となる．$\alpha \ge 0$の値を変えることで外乱に対する過渡応答を調整できる．定常偏差を0にするには，Eq.5のうちの$1+c(sI-A+bf)^{-1}(k-bQ_a(s)Q_b(s))$の零点で，外乱の極を消去する．そのためには，外乱$d(s)$と目標入力$r(s)$の極を$s_j\,(j=1,\cdots,\zeta)$として，

$$Q_b(s)=\frac{c_0+c_1s+\cdots+c_{\nu-1}s^{\zeta-1}}{(1+\tau s)^{\zeta-1}} \tag{26}$$

とおき，分子の係数c_jを

$$1+c(s_iI-A+bf)^{-1}(k-bQ_a(s_i)Q_b(s_i))=0 \tag{27}$$

を満たすように決める．これにより，目標値入力$r(s)$の極jsに対して，$1-M(s_j)G(s_j)P(s_j)N(s_j)=0$かつ，$M(s_j)G(s_j)P(s_j)=1$であるので，$N(s_j)=1$となる．このとき，Eq.6から$M(s)\neq 1+\Delta(s)$であっても目標値入力に対する定常偏差は0となる．また，外乱の極に対して$1-M(s_j)G(s_j)P(s_j)N(s_j)=0$となるので，Eq.7より$M(s)\neq 1+\Delta(s)$でも外乱に対する定常偏差0が補償される．

STEP4【安定判別】: 定理1の条件を満たすかどうか調べる．これには，各周波数における領域$ABCD$と線分EFを求め，交点の有無と，交点がある場合には$\eta(\omega)$を算出する．全周波数域に渡って条件を満たせば終了．満たせないとき，**STEP2**にもどり時定数τを少し大きくして再計算する．

4. 制御対象

本研究の制御対象はFig. 4で示される台車である．台車の質量をmとし，変位を$x(t)$，入力電圧を$u(t)$，摩擦係数をc，モーターのトルク定数をTと定義する．各パラメータの定義をTable. 1に示す．この台車の運動方程式はEq. 28で表される

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)=Tu(t) \tag{28}$$

Eq. 28より，台車の伝達関数は次式となる．

$$G(s)=\frac{\frac{T}{m}}{s(s+\frac{c}{m})} \tag{29}$$

また，制御対象には次のようなパラメータ変動が存在するとする．

$$m=1.33+m_d\,[kg],\quad (m_d=0\sim 10) \tag{30}$$

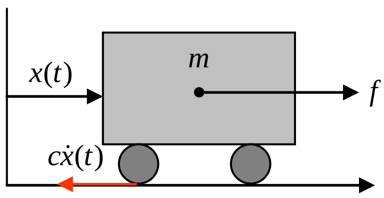


Fig. 4　Plant model

Table.1: Definition of Parameter

m	Weight of Cart	$1.33[kg]$
c	frictional coefficient	$212.8[Ns/m]$
T	Torque coefficient of Motor	$159.6[N\cdot m/V]$

5. MBCの設計

本章では誤差補償器がありの場合と誤差補償器なしの場合の制御系設計をそれぞれ示す.

5. 1　誤差補償器ありの場合

まず，すべてのモデル変動に対して制御系がロバスト安定になるように，Fig. 5に示すように誤差を規定した. 次に$-\omega L<\theta_L(\omega)$の条件を満たすように$L=0.045$とし，誤差補償器を次式と定めた.

$$M(s)=\frac{1}{0.045s+1} \tag{31}$$

過渡応答を決める設計パラメータは，次のように定めた．

$$\tau = 0.018,\ \alpha = 1 \qquad (32)$$

τ をこの値に定めたのは，これ以上小さくすると，コントローラがハイゲインになり応答が振動的になる限界であるためである．

5. 2　誤差補償器なしの場合

誤差補償器なしの場合のノミナル応答の整定時間とロバスト制御性能をそれぞれ節5.1で設計した制御系と同等にする制御系設計を項5. 2. 1と項5. 2. 2に示す．

5. 2. 1　誤差補償器ありの場合とノミナル応答の整定時間を同等にした場合

$M = 1$ とし，過渡応答を決める設計パラメータを次のように定めた．

$$\tau = 0.045,\ \alpha = 1\ M = 1 \qquad (33)$$

τ をこの値に定めたのは，ノミナル応答の整定時間を節5. 1で設計した制御系と同等にするためである．

5. 2. 2　誤差補償器ありの場合とロバスト制御性能を同等にした場合

$M = 1$ とし，過渡応答を決める設計パラメータを次のように定めた．

$$\tau = 0.15,\ \alpha = 1 \qquad (34)$$

τ をこの値に定めたのは，ロバスト制御性能を節5. 1で設計した制御系と同等にするためである．

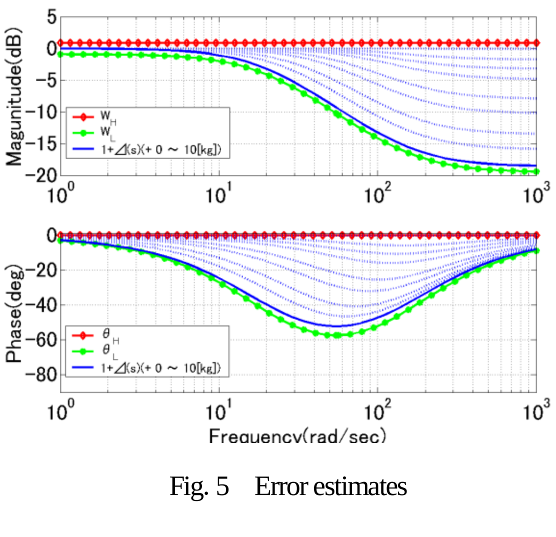


Fig. 5　Error estimates

6.　比較用のGIMC構造の設計

詳しいGIMC構造の制御系設計は文献［8］を参照されたし．

GIMC構造で用いるノミナルコントロール K_0 とロバストコントローラ K を H_∞ 混合感度制御問題により設計する．用いる一般化プラントをFig. 6に示す．K_0，K の設計に用いる重みをそれぞれEq. 35, Eq. 36に示す．このコントローラ設計では K_0 を高い制御性能を有するように，K には高いロバスト性を持たせるようにした

$$W_{SP} = \frac{10^5}{8 \cdot 10^4 s + 1},\quad W_{TP} = \frac{10^{-1} s + 10^{-6}}{20s + 1000},\quad \varepsilon = 10^{-3} \qquad (35)$$

$$W_{SR} = \frac{10^5}{2.8 \cdot 10^3 s + 1},\quad W_{TR} = \frac{11s + 1.1 \cdot 10^{-5}}{10s + 90},\quad \varepsilon = 0.06 \qquad (36)$$

求まった H_∞ コントローラ K_0，K をFig. 7に示す．実線が K_0，破線が K である．設計した二つのコントローラは K_0 が高ゲインで高性能，K が低ゲインでモデル変動に対してロバストであることが分かる．

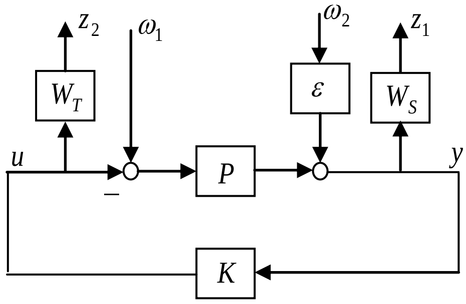


Fig. 6　Generalized Plant

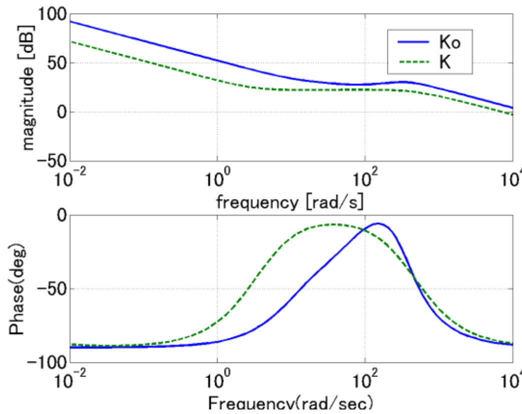


Fig. 7　Bode Diagram of Controllers：K_0 and K

7. シミュレーション

まず，MBCの誤差補償器を検証するために，5章で設計した誤差補償器がありの場合と誤差補償器なしの場合のシミュレーションを行った．次に，MBCとGIMC構造とのロバスト制御性能比較のために，6章で設計したGIMC構造のシミュレーションを行った．

7. 1　MBCの誤差補償器の有効性の検証

MBCの誤差補償器の有効性をロバスト制御性能と制御性能の観点から検証する．

7. 1. 1　ロバスト制御性能の検証

誤差補償器ありの場合のステップ応答をFig. 8 (a) に示す．目標入力と外乱に対して，変動モデルの場合とノミナルモデルの場合のどちらも良好な応答を示している．次に安定判別結果をFig. 8（b）に示す．全周波数域に渡って$\eta<1$となり，安定であることが示されている．

次に項 5. 2. 1 で設計した誤差補償器なしの場合のステップ応答を Fig. 9（a）に示す．モデル変動時では応答が大きく変動を起こしており，良好な制御ができていない. このことから, 誤差補償器を導入することで, ロバスト制御性能が補償されることがわかる．この時の安定判別結果を Fig.9（b）に示す．全周波数域に渡って$\eta<1$となり，安定であることが示されている．

7. 1. 2　制御性能の検証

項5. 2. 2で設計した誤差補償器なしの場合のステップ応答ステップ応答をFig. 10に示す．この図の整定時間は0.8〔sec〕である．一方，誤差補償器ありの場合のステップ応答を示したFig. 8（a）の整定時間は0.3〔sec〕である．このことから，誤差補償器を導入することでロバスト制御性能を低下させることなく，整定時間を0.5〔sec〕速くすることができる．

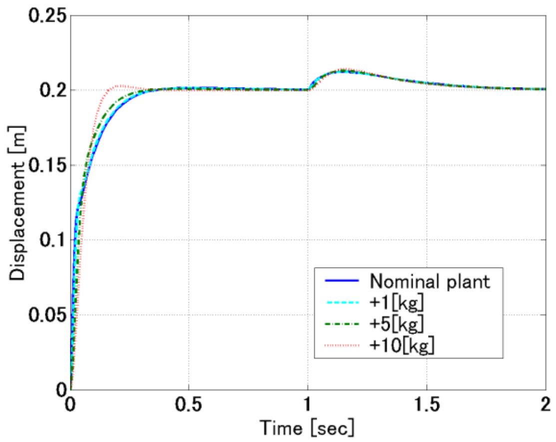
7. 1. 3　MBCの誤差補償器の有効性の検証のまとめ

節7. 1. 1，7. 1. 2から誤差補償器を導入することで, ロバスト制御性能を保持したまま，良好な制御性能を得られることが示された．

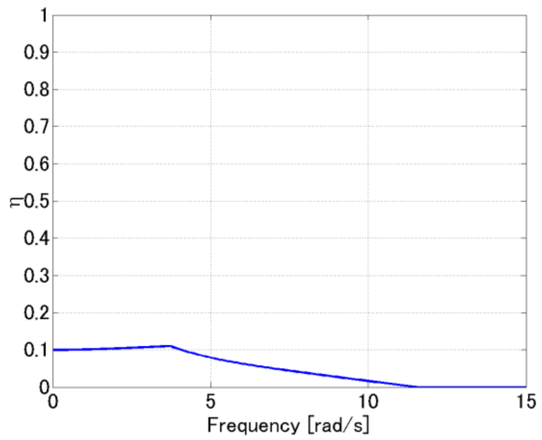
7. 2　GIMC構造とのロバスト制御性能比較

GIMC構造のステップ応答をFig. 11に示す．ステップ応答時にオーバーシュートが生じて過渡応答が悪いのは，GIMC構造にフィードフォワード要素がないからである．MBCと同じ基準にいないので, 目標値応答特性は比較できなかった．

よって，ロバスト制御性能のみを比較する．誤差補償器ありの場合のMBCのステップ応答を示したFig. 8（a）と比較すると，GIMC構造はモデル変動時の応答の変化が大きいが, MBCはその変化が小さいことがわかる. 以上のことからMBCのほうがロバスト制御性能を保持していることが示めされた．

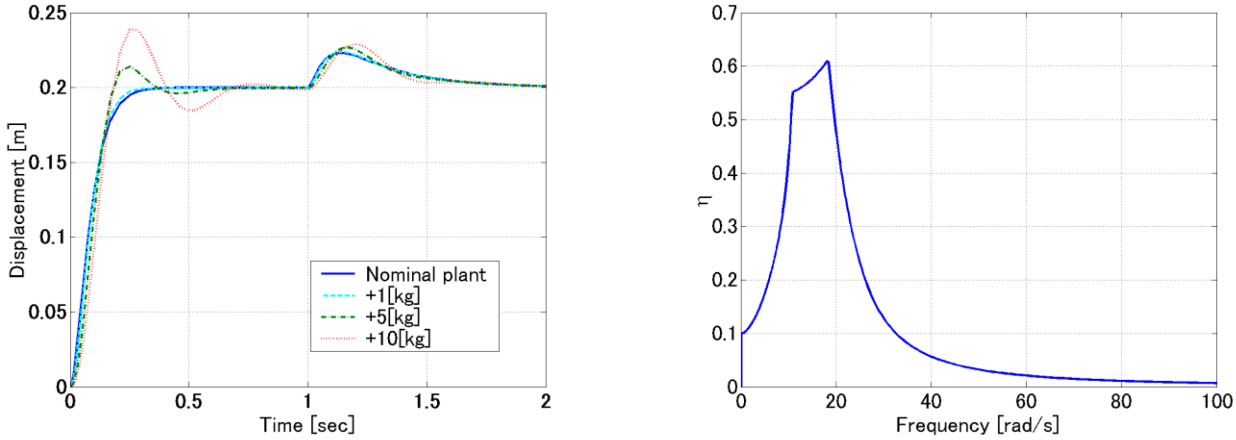


(a) Step responses



(b) Stability check by theorem

Fig. 8　With An error compensator



(a) Step responses　　(b) Stability check by theorem

Fig. 9　With An error compensator ($\tau = 0.045$)

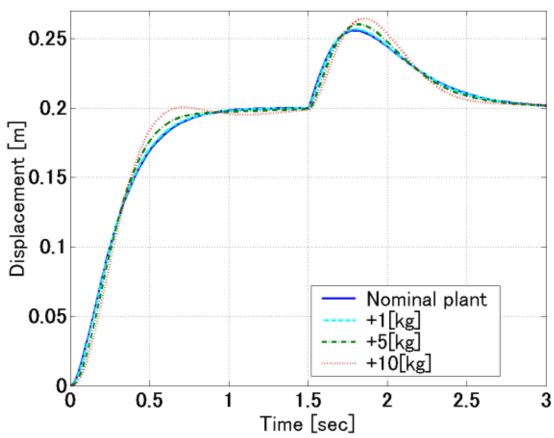


Fig. 10　Step responses　(With An error compensator) ($\tau = 0.15$)

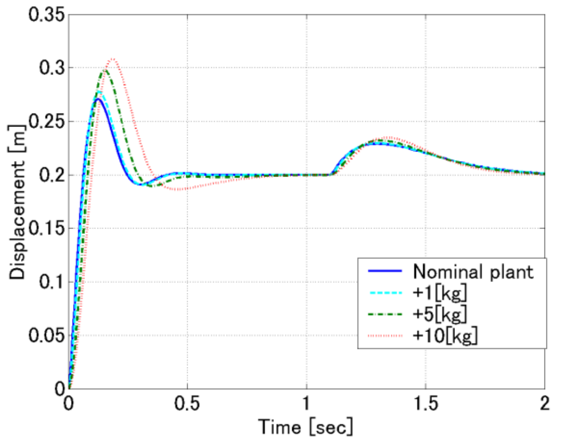


Fig. 11　Step responses of GIMC

8.　終わりに

本研究ではパラメータ変動を含む走行台車に対して，MBCとGIMC構造のそれぞれで制御系設計を行った．次に誤差補償器ありの場合と誤差補償器なしの場合のMBCのシミュレーションを行った．その結果，誤差補償器を導入することにより，ロバスト制御性能を保持したまま良好な制御性能が得られることが示された．続いてMBC（誤差補償器ありの場合）とGIMC構造のシミュレーションを行った．その結果，MBCのほうがロバスト制御性能を保持していることが示めされたが，制御性能は比較をすることができなかった．

今後の課題は，より複雑な実システムに対して誤差補償器の有効性を検証すること，GIMC構造をMBCと同じ基準にして，制御性能比較を行うことである．

参考文献

[1]　渡部慶二，王蕊，村松鋭一，有我祐一，遠藤茂:「モデルブリッジ制御」ーモデルベースド多自由度誤差補償ロバスト制御ー，第 36 回制御理論シンポジウム講演論文集, pp. 351-35, 2007.

[2]　渡部慶二，王蕊，村松鋭一，有我祐一:「内部モデル制御をもとにした多自由度制御」，システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集, pp.　401-402，2007.

[3]　王蕊，渡部慶二，村松鋭一，有我祐一，遠藤茂:「モデルブリッジ制御の体系化」ーMBC シス

テム構造とパラメートリゼーションー，第 52 回自動制御連合講演会講演論文集，pp. 230-235, 2008.

[4] 「MATLAB による制御系設計」，野波健蔵，西村秀和，平田光男，東京電機大学出版局

[5] 「線形ロバスト制御」，劉康志，コロナ社

[6] 美多，H_∞ 制御，昭晃堂(1994)

[7] 平田光男:「H_∞ 制御理論から応用まで」，ロバスト制御　ー基礎の基礎から設計の勘所までー，SICE セミナー，pp. 17 - 54

[8] 滑川徹:「GIMC 構造に基づく高性能ロバスト制御と耐故障制御」，ロバスト制御　ー基礎の基礎から設計の勘所までー，SICE セミナー　pp. 87 - 112

[9] K. Zhou:「A Natural Approach to High Performance Robust Control: Another Look at Youka Parameterization」，Proceedings of SICE Annual Conference 2004，pp. 869-874，2004