計測自動制御学会東北支部　第 260 回研究集会（2010.10.29）

資料番号 260-15

パラメータ変動とむだ時間を有するシステムのロバスト制御

Robust Control for System with Time Delay and Parameter Variations

○澤田薫*，有我祐一*，渡部慶二*，遠藤茂*

○ Kaoru Sawada*, Yuichi Ariga*, Watanabe Keiji, Shigeru Endo*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード：モデルブリッジ制御(Model Bridge Control),むだ時間(Time Delay),

ロバスト制御(Robust Control)

連絡先：〒992-0037　米沢市城南 4-3-16　山形大学工学部応用生命システム工学科　有我研究室

澤田薫, E-mail：shu_pag@yahoo.co.jp

1 はじめに

実際の制御おいてむだ時間を含む制御対象は少なくない．例えば，遠隔操作システムなどの入出力むだ時間系，状態にむだ時間を持つものなど種々のむだ時間系が存在する．入力むだ時間系を例に挙げると，一般的なフィードバック制御では制御入力が出力には直ぐ現れない．このため，目標値追従特性，外乱除去特性の劣化や，安定性が損なわれる場合がある．

制御対象とモデルの間に必ず存在するモデル誤差にも同様の問題がある．

一般的なロバスト制御法としてロバスト制御が提案されている．一般的なロバスト制御にはスモールゲイン定理をもとにした H^∞ 制御，μ-解析，LMIがあるが，これらの制御は実際の応用において保守的である．この理由は，スモールゲイン定理はモデル誤差$1+\Delta(s)$のうち$\Delta(s)$のゲイン情報だけを利用しているからである．

そこで$1+\Delta(s)$そのもののゲインと位相を利用する特長を持つ制御法としてモデルブリッジ制御を提案している[1)2)3)4)]．モデルブリッジ制御のモデル誤差の位相情報を利用しているという特長からむだ時間を含む制御対象に対して有効ではないかと考えられる．

先行研究[1)2)3)4)]において，本手法によりパラメータ変動を有するシステムのロバスト制御が可能であることを示した． また，むだ時間に関しても先行研究[4)]において本手法の有効性を示した.

本研究ではむだ時間とパラメータ変動が混在するシステムに対して本手法の有効性の検証と誤差補償器の構造について検討する.

2 モデルブリッジ制御の特長

2.1 モデルブリッジ制御系の構成

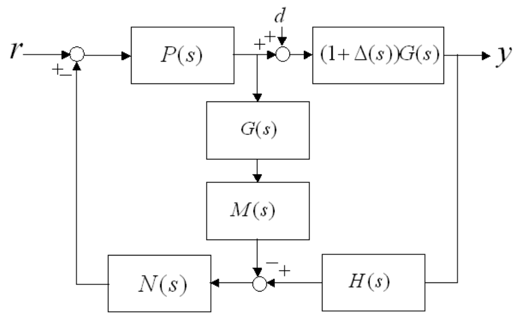


Fig 1 Basic type of model bridge control

Fig1において$(1+\Delta(s))G(s)$は制御対象である． $M(s)$は位相遅れ型誤差補償器， $H(s)$は位相進み方誤差補償器である． $N(s)$は外乱の応答を調整する外乱補償器である． $P(s)$は目標入力に対する応答を調整する目標制御器である.

以上のように，個々の制御性能を個別に独立して設計できることが，モデルブリッジ制

御の特徴である

モデルブリッジ制御の基本形は安定な対象に限られる．不安定対象に対応できるようにするために Fig2 のように構成する．これを状態空間系と呼ぶ．基本形の $P(s)$ は内部モデルの状態を使ったフィードバック f と自由パラメータ Q_a で構成でき，過渡応答を f で，定常特性は Q_a で個々に調整できる．また，外乱補償器 $N(s)$ は内部モデルの状態を k を用いたフィードバックと自由パラメータ Q_b で構成でき，外乱に対する過渡応答を k で，定常特性を Q_b で調整できる．

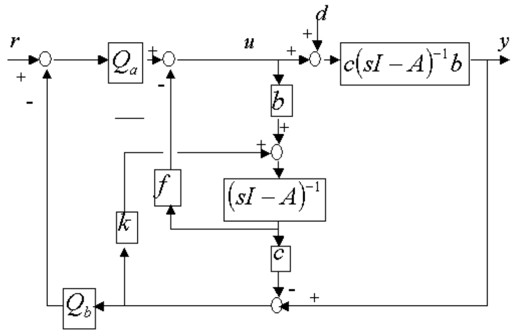


Fig2 Model bridge control

2.2 安定判別

制御対象の伝達関数を $(1+\Delta(s))G(s)$ する．ただし， $G(s)\in R(s)$ は虚軸上に零点を持たない制御対象のモデルである． $\Delta(s)\in R(s)$ はモデル誤差であり， $(1+\Delta(s))G(s)$ と $G(s)$ の不安定極の数は等しいとする．この制御対象に対し，Fig2の制御を考える．

ここで $M(s)\in R(s)$ は誤差補償器で

$$M(s)G(s)=c(sI-A)^{-1}b \tag{1}$$

とする．ただし， $A\in R^{n\times n}$， $b\in R^{n\times 1}$， $c\in R^{1\times n}$ で， (A,b) は可制御， (c,A) は可観測とする．また， $f\in R^{1\times n}$， $k\in R^{n\times 1}$ で， $A-bf$ と $A-kc$ は安定， $Q_a(s)$， $Q_b(s)\in R(s)$ は安定なパラメータとする．

Fig2の系の伝達特性を求めるために，Fig2を伝達関数表示すると, Fig3の内部モデルパラメリゼーション表示となる．ただし,

$$P(s)=[1-f(sI-A+bf)^{-1}b]Q_a(s) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}N(s)&=Q_a^{-1}(s)f(sI-A+kc)^{-1}k\\&+Q_b(s)\{1-c(sI-A+kc)^{-1}k\}\end{aligned} \tag{3}$$

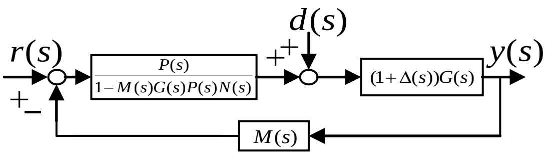


Fig3 Transfer function of a control system

Fig3からFig2の系で $M(s)=1+\Delta(s)$ としたときの目標入力 $r(s)$ から出力 $y(s)$ は

$$\begin{aligned}y(s)&=M(s)G(s)P(s)\\&=c(sI-A)^{-1}bQ_a(s)r(s)\end{aligned} \tag{4}$$

である．また外乱 $d(s)$ に対する出力 $y(s)$ は

$$\begin{aligned}y(s)&=[1-M(s)G(s)P(s)N(s)]M(s)G(s)d(s)\\&=[1+c(sI-A+bf)^{-1}(k-bQ_a(s)Q_b(s))]\\&\quad\times c(sI-A+kc)^{-1}bd(s)\end{aligned} \tag{5}$$

である．実際の制御では $M(s)\neq 1+\Delta(s)$ であり式(4)と式(5)は次式に表される．

$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{(1+\Delta(s))G(s)\dfrac{P(s)}{1-M(s)G(s)P(s)N(s)}}{1+(1+\Delta(s))G(s)\dfrac{P(s)N(s)}{1-M(s)G(s)P(s)N(s)}} \tag{6}$$

$$\frac{y(s)}{d(s)}=\frac{(1+\Delta(s))G(s)P(s)}{1+(1+\Delta(s))G(s)\dfrac{P(s)N(s)}{1-M(s)G(s)P(s)N(s)}} \tag{7}$$

となる．感度，相補感度は

$$S(s)=1-M(s)G(s)P(s)N(s) \tag{8}$$

$$T(s)=M(s)G(s)P(s)N(s) \tag{9}$$

式(6)式 (7)が安定であるための必要十分条件は,

$$\begin{aligned}&1+(1+\Delta(s))G(s)\frac{P(s)N(s)}{1-M(s)G(s)P(s)N(s)}\\&=\frac{[1+\{1+\Delta(s)-M(s)\}G(s)P(s)M(s)]}{1-M(s)G(s)P(s)N(s)}\end{aligned} \tag{10}$$

のナイキスト線図が原点の周りを反時計方向に制御対象の不安定極の数だけ回ることである． $1/(1-M(s)G(s)P(s)N(s))$ は

$$1-M(s)G(s)P(s)N(s)$$
$$=[1+c(sI-A+bf)^{-1}(k-bQ_a(s)Q_b(s))] \quad (11)$$
$$\times[1+c(sI-A)^{-1}k]^{-1}$$

より，制御対象の不安定極を極に持ち，そのナイキスト線図は，原点の周りを反時計方向に制御対象の不安定極の数だけまわる．従って，安定であるための必要十分条件は $1+\{1+\Delta(s)-M(s)\}G(s)P(s)M(s)$ のベクトル軌跡が原点を回らないことであり，等価的に $\{1+\Delta(s)-M(s)\}G(s)P(s)M(s)$ のベクトル軌跡が $(-1,0)$ を回らないことである．Fig4に示すように

$$0E=M(j\omega)G(j\omega)P(j\omega)N(j\omega) \quad (12)$$
$$0F=0E-1 \quad (13)$$
$$0J=\{1+\Delta(j\omega)\}G(j\omega)P(j\omega)N(j\omega) \quad (14)$$

とすると

$$EJ=\{(1+\Delta(j\omega))-M(j\omega)\} \times G(j\omega)P(j\omega)N(j\omega) \quad (15)$$

$$EF=-1 \quad (16)$$

であるので，安定であるための必要十分条件は，全ての周波数において，点 J が点 F の左側を回らないことである．モデル誤差は次の仮定を満たすとする．

<仮定2.1>

$$W_L(\omega)\le|1+\Delta(j\omega)|\le W_H(\omega),\forall\omega\ge 0 \quad (17)$$

ただし，$W_L(\omega),W_H(\omega)\in R(s)$

<仮定2.2>

$$\theta_L(\omega)\le\angle(1+\Delta(j\omega))\le\theta_H(\omega),\forall\omega\ge 0 \quad (18)$$

ただし，$\theta_L(\omega),\theta_H(\omega)\in R(s)$

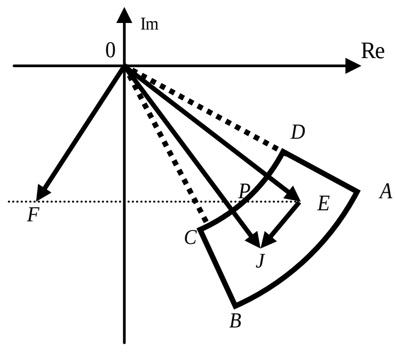


Fig4 Stability criterion

仮定から，点 J はFig4に示すベクトルと扇形の領域 $ABCD$ の中にある．ただし，各点は

$$0A=e^{j\theta_H(\omega)}W_H(j\omega)G(j\omega)P(j\omega)N(j\omega) \quad (19)$$
$$0B=e^{j\theta_L(\omega)}W_H(j\omega)G(j\omega)P(j\omega)N(j\omega) \quad (20)$$
$$0C=e^{j\theta_L(\omega)}W_L(j\omega)G(j\omega)P(j\omega)N(j\omega) \quad (21)$$
$$0D=e^{j\theta_H(\omega)}W_L(j\omega)G(j\omega)P(j\omega)N(j\omega) \quad (22)$$

従って，仮定を満たすモデル誤差に対しロバスト安定であるための必要十分条件は，領域が点 F の左側に入らないとなる．Fig4で半直線 EF と領域 $ABCD$ の縁との交点を P とし，$\eta(\omega)$ を次のように定義する．

$$\eta(\omega)=\begin{cases} EP\text{の最大の長さ} & \text{交点がある場合} \\ 0 & \text{交点が無い場合} \end{cases} \quad (23)$$

<定理1>

<仮定2.1> <仮定2.2>を満たす任意のモデル誤差に対しFig2が安定であるための必要十分条件は次式を満たすことである．

$$\eta(\omega)<1, \quad \forall\omega\ge 0 \quad (24)$$

上記の安定判別の元で式(4) 式(5)から，目標入力, 外乱に対する過渡特性をそれぞれ f，k で調整できる．定常特性は，目標入力 $r(s)$ の極 $s_i(i=1,2,\cdots,\gamma)$ に対し

$$M(s_i)G(s_i)P(s_i)=1 \quad (25)$$

を満たすように $Q_a(s)$ を選び，目標入力 $r(s)$ と外乱 $d(s)$ の極 $s_j(j=1,2,\cdots,\gamma)$ に対し

$$1-M(s_i)G(s_i)P(s_i)N(s_i)=0 \quad (26)$$

を満たすように $Q_b(s)$ を選ぶ．式(6) (7)から，モデル誤差があっても，目標入力，外乱に対する定常偏差を0にできる．これを元にした設計は次節に示す．

3 モデルブリッジ制御系設計

以下にモデルブリッジ制御の具体的な設計手法を述べる．全部で 4 ステップある．

[STEP1]　誤差補償器の設計

Fig4の第4，第3象限でベクトル $0E$ をベクトル $0B$ に近づけるために

$$-\omega L<\theta_L(\omega), \quad W_H(\omega)<g, \quad \forall\omega\ge 0 \quad (27)$$

を満たす L，$g>0$ を見積もり，誤差補償器を

$$M(s)=\frac{g}{\left(1+\dfrac{\bar{L}}{p}s\right)^p}, p=0,1,2,3 \quad (28)$$

あるいは，

$$M(s) = \frac{1 - 0.5\bar{L}s}{1 + 0.5\bar{L}s} \tag{29}$$

とする.

[STEP2] 目標制御器の設計

$$M(s)G(s) = G(s)_I G_O(s) \tag{30}$$

と分解する. ただし, $G(s)_I$ はインナで, $G_O(s)$ は不安定零点を持たない伝達関数である.

$$M(s)G(s) = c(sI - A)^{-1}b$$
$$= G_I(s)\bar{c}(sI - A)^{-1}b \tag{31}$$

とする. $(\bar{c}, A)$ は可観測とする. $M(s)G(s)$ の相対次数を v とし, 時定数 $\tau > 0$ を任意に選び

$$(1+\tau s)^v = a_v s^v + a_{v-1}s^{v-1} + \cdots + a_1 s + 1 \tag{32}$$

$$\Psi = a_v \bar{c}A^v + a_{v-1}\bar{c}A^{v-1} + \cdots + a_1\bar{c}A + \bar{c} \tag{33}$$

$$f = (a_q \bar{c}A^{v-1}b)^{-1}\Psi \tag{34}$$

$$Q_a(s) = (a_q \bar{c}A^{v-1}b)^{-1}Q_r(s) \tag{35}$$

とおく. $Q_r(s)$ は目標入力らの極 $s_i (i = 1,2,\cdots,\gamma)$ に対し

$$Q_r(s) = \frac{k_0 + k_1 s + \cdots + k_{r-1}s^{r-1}}{(1+\tau s)^{r-1}} \tag{36}$$

とする. k_i は, 次式を満たすように選んだ実数である.

$$G_I(s_i)\frac{1}{(1+\tau s)^v}Q_r(s_i) = 1, \quad (i = 1,\cdots,\gamma) \tag{37}$$

これらを式(5)に代入すると,

$$y(s) = \frac{1}{(1+\tau s)^v}Q_r(s)G_I(s)r(s) \tag{38}$$

となる. 時定数 τ を小さくすることで目標値応答を速め, $Q_r(s)$ で定常偏差を0にできる. なお, 上記の制御で $A - bf$ は安定であり, 制御系は安定である.

[STEP3] 外乱補償器の設計

$\alpha \geq 0$ を行列 $A + \alpha I$ が虚軸上に固有値を持たないように選び, リカッチ方程式

$$Y(A^T + \alpha I) + (A + \alpha I)Y - Yc^T cY = 0 \tag{39}$$

の安定可解を $Y = Y^T \geq 0$ を用いて

$$k = Yc^T \tag{40}$$

とする. このとき式(5)の $A - kc$ の固有値は安定となる. $\alpha \geq 0$ の値を変えることで外乱に対する過渡応答を調整できる. 定常偏差を0にするには, 式(5)の $1 + c(sI - A)^{-1}(k - bQ_a(s)Q_b(s))$ の零点で, 外乱の極を消去する. そのためには, 外乱 $d(s)$ と目標入力 $r(s)$ の極を $s_i (i = 1,2,\cdots,\gamma)$ としたとき,

$$Q_b(s) = \frac{c_0 + c_1 s + \cdots + c_{r-1}s^{\xi-1}}{(1+\tau s)^{\xi-1}} \tag{41}$$

とおき, 分子の係数 c_j を

$$1 + c(s_i I - A + bf)^{-1}(k - bQ_a(s_i)Q_b(s_i)) = 0 \tag{42}$$

と満たすように決める. これにより, 目標値入力 $r(s)$ の極 s_i に対して, $1 - M(s_j)G(s_j)P(s_j)N(s_j) = 0$ かつ, $M(s_j)G(s_j)P(s_j) = 1$ であるので, $N(s_j) = 1$ となる. このとき式(6)から $M(s) \neq 1 + \Delta(s)$ であっても目標値入力に対する定常偏差は0となる. また, 外乱の極に対して, $1 - M(s_j)G(s_j)P(s_j)N(s_j) = 0$ となるので式(16)より $M(s) \neq 1 + \Delta(s)$ でも外乱に対する定常偏差0が補償される.

[STEP4] 安定判別

定理1の条件を満たすかどうかを調べる. 全周波数で定理1を満たせば終了. 満たさない場合にはステップ2に戻り時定数 τ を少し大きくして計算する.

4 シミュレーション

4.1 制御対象

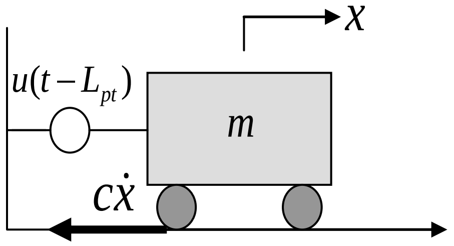


Fig5 Plant model

制御対象を台車とした. 台車のモデルをFig5に示す. 質量を m とし, 摩擦係数を c, モーターのトルク定数を T と定義する. 各パラメータの定義をTable.1に示す. 台車の運動方程式を導出すると次式となる.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) = Tu(t - L_{pt}) \tag{43}$$

Table.1: Definition of Parameter

m	Weight of Cart	$1.33[kg]$
c	Frictional coefficient	$212.8[Ns/m]$
T	Torque coefficient	$159.6[N \cdot m/V]$
L_{pt}	Time delay	$0.05[s]$

4.2 モデルブリッジ制御系の設計

目標入力と外乱を$r(s)=d(s)=1/s$とし，プラントのむだ時間L_{pt}は既知であるとする．mが変動し，最大で 5[kg]の重りが増えるとする．モデル誤差$1+\Delta(s)$はパラメータ変動とむだ時間を含んでいる．

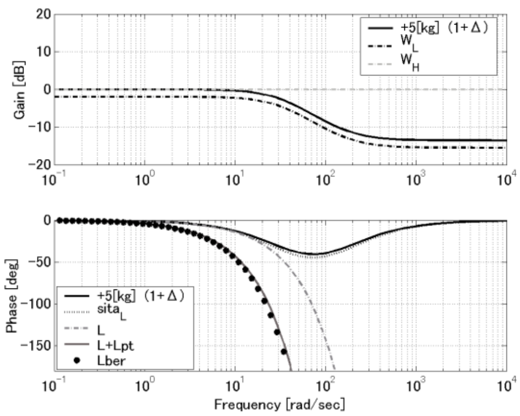


Fig6 Error estimates

Lと$\bar{L}$は Fig6 より導出した．ここで$L=0.025$，$\bar{L}=0.08$と求まった．また，$g=1$とする．これらの値は誤差補償器の設計に使用する．設計パラメータは$\alpha=10$とし，τは個別に設計した．

誤差補償器別にシミュレーションを行なった．τはシミュレーションを繰り返し行い良好な応答が得られる値を使用した．

これ以降, 式(28)を1次遅れ型誤差補償器, 式(29)をむだ時間型誤差補償器と呼ぶこととする．

4.3 シミュレーションによる検証

シミュレーションによって誤差補償器$M(s)$によって性能に違いが生じるか検証する．整定時間を 1 秒にした場合と，τの値をロバスト制御性能が劣化する直前の値を用いたシミュレーションを行なう．

ノミナルモデルとパラメータ変動ありの場合の目標値追従特性，外乱除去特性，安定性を調べる．

なお，今回はτの値をステップ応答から主観的に決定した．

4.3.1 パラメータ変動のみの場合

τの値はステップ応答の整定時間が 1 秒になるように定めた．パラメータ変動だけを有するシステムに対するステップ応答を Fig7, Fig8 に示す．1 次遅れ型誤差補償器とむだ時間型誤差補償器はどちらも同じ応答となることを確認した．

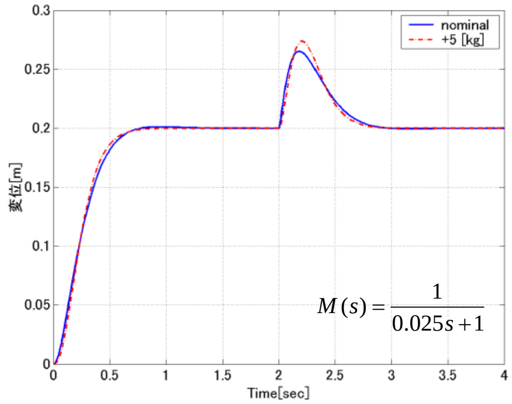


Fig7 Step response $\tau=0.085$

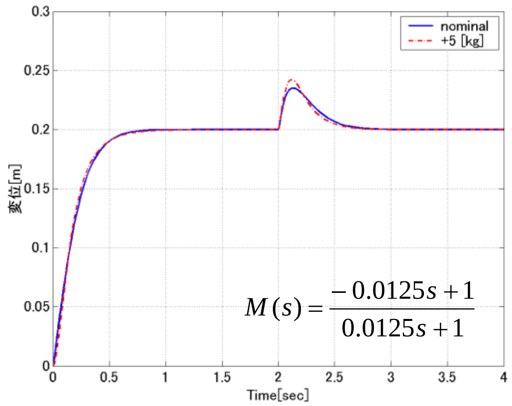
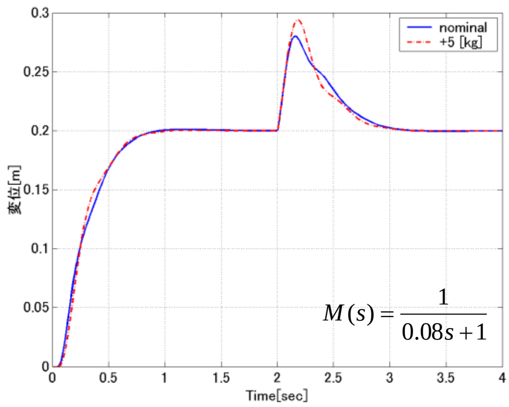


Fig8 Step response $\tau=0.018$

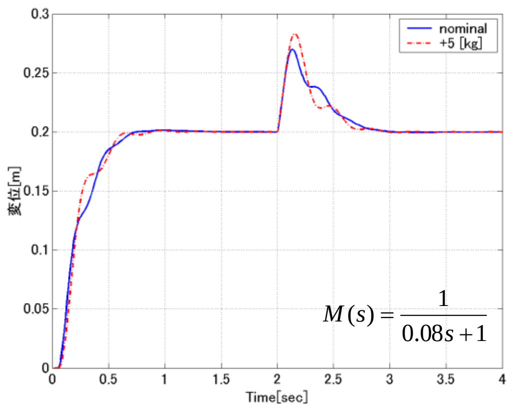
4.3.2 パラメータ変動とむだ時間がある場合

τの値をステップ応答の整定時間が 1 秒になるように定めた．このシミュレーションを Fig9(a)，Fig10(a)に示す．1 次遅れ型誤差補償器のボード線図を Fig10，むだ時間型誤差補償器のボード線図を Fig12 に示す．

τ をロバスト制御性能が劣化する直前の値を用いたシミュレーションを Fig9(b)，Fig11(b)に示す．Fig9(b)，Fig11(b)を比較すると，むだ時間型誤差補償器を用いた場合，より速い応答が得られた．



(a) $\tau=0.1$



(b) $\tau=0.08$

Fig9 Step response

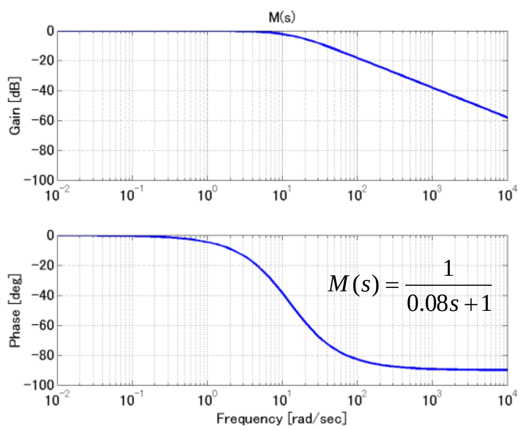
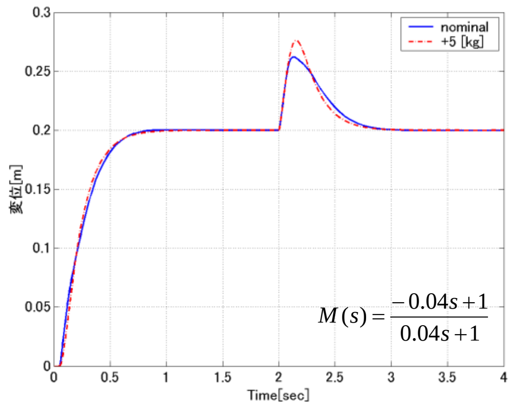
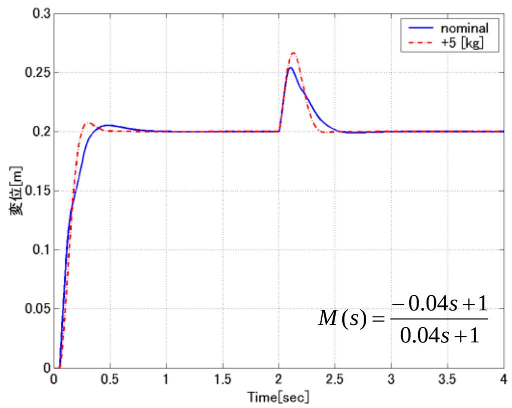


Fig10 M(s) bode plot



(a) $\tau=0.02$



(b) $\tau=0.014$

Fig11 Step response

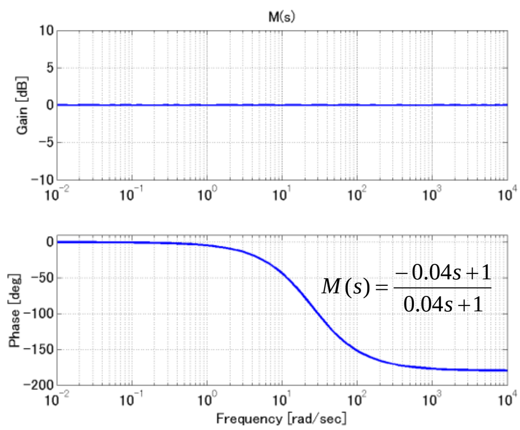
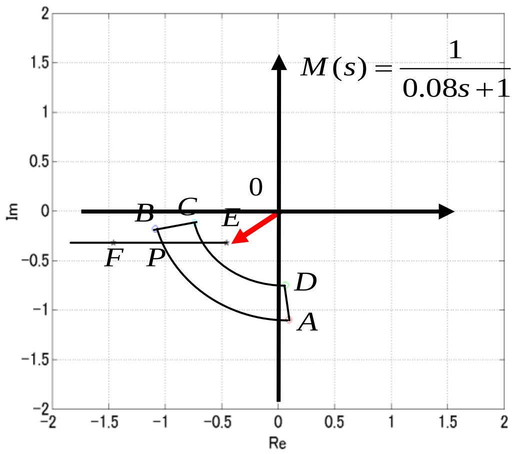
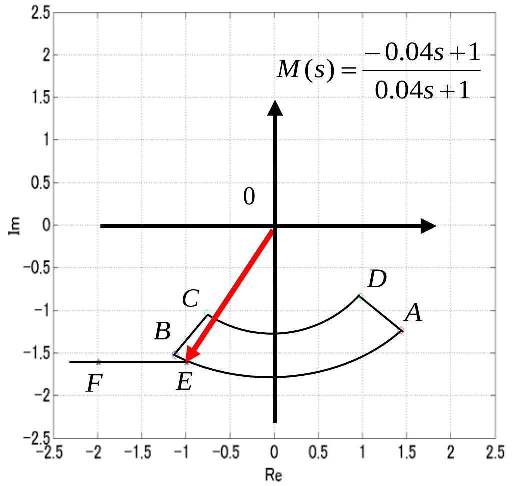


Fig12 M(s) bode plot



(a) First order lag type(21.2[rad/sec])



(b) Time delay type(21.2[rad/sec])

Fig13 Stability criterion

Fig13(a)は Fig9(b)，Fig13(b)は Fig11(b)の設計パラメータの場合の安定判別である．Fig13(a)と Fig13(b)は設計パラメータが異なるために領域 *ABCD* の位置が異なっている．

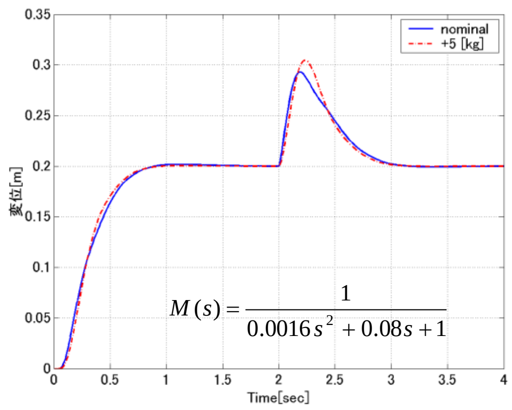
Fig13(a)(b)を比較すると同じ周波数のおいて 1 次遅れ型はベクトル $0E$ の大きさが 1 以下で領域 *ABCD* には入らないが，半直線 *EF* との交点が生じている．これに対しパデ近似型はベクトル $0E$ の大きさが 1 以上であり領域 *ABCD* よりも左側に回転している．

ここでベクトル $0E$ は式(12)より式(9)の相補感度関数と等しいため，ベクトル $0E$ によって制御系の制御帯域が決まり，ベクトル $0E$ が短くなることは制御系の制御帯域が狭まることと等しくなる．

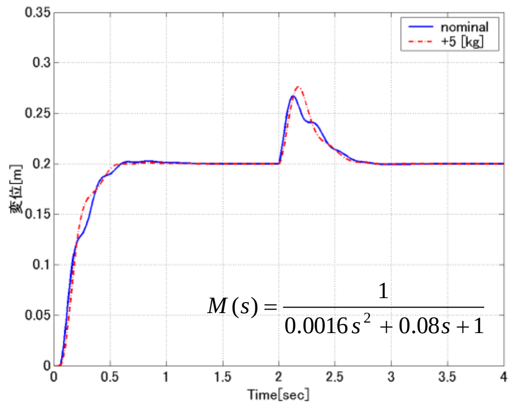
以上の理由から 1 次遅れ型誤差補償器よりもむだ時間型誤差補償器を用いた場合の制御性能が良かったと考えられる．

次に式(28)の 1 次遅れ型誤差補償器の次数を上げることでベクトル $0E$ の位相を遅らせることで制御性能が変化するか，次のシミュレーションを行なった．これを次項に示す．

4.3.3 誤差補償器が 2 次の場合



(a) $\tau=0.08$



(b) $\tau=0.053$

Fig14 Step response

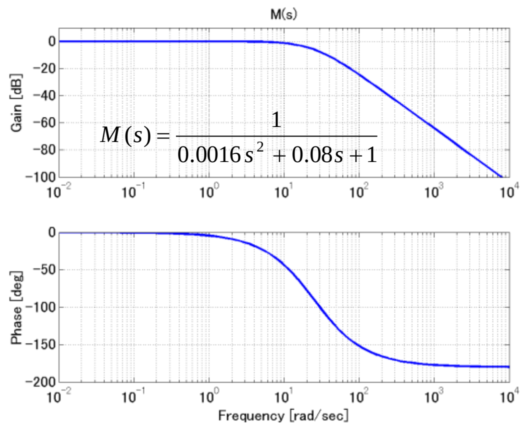


Fig15 Bode plot

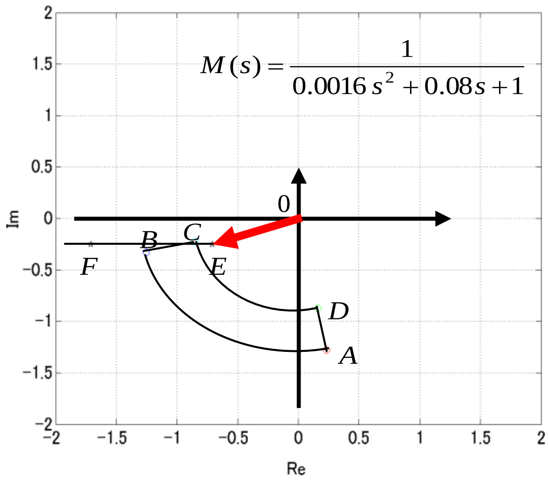


Fig16 Stability criterion of second order lag type (21.2[rad/sec])

式(28)の次数を $p=2$ とし，誤差補償器を 2 次遅れ型としてシミュレーションを行った．この結果を Fig14 に示す．2 次遅れ型誤差補償器のボード線図を Fig15，安定判別を Fig16 に示す．

Fig9(b)と Fig14(b)を比較する．2 次遅れ型のステップ応答は若干改善された．また，Fig16 は Fig13(a)と比較して，ベクトル $0E$ は若干ではあるが領域 $ABCD$ の左側に位置しているが，制御性能は改善されなかった．

以上のことから 1 次遅れ型誤差補償器を 2 次遅れ型にしても制御性能は改善しないことが分かった．

これより制御性能は誤差補償器の位相では無くゲインが関係していると考えられる．制御性能を改善するためには，ベクトル $0E$ は相補感度関数と等しので誤差補償器のゲインは制御帯域を上げるように調整すればよいと考えられる．また現段階で L はモデル誤差の下限を見積もり決定している．1 次遅れ型誤差補償器において L を積極的に調整することで制御性能が改善することができるのではないかと考えられる．

5　終わりに

本研究はパラメータ変動とむだ時間を含む制御対象に対してモデルブリッジ制御の有効性を検証するために行なった．パラメータ変動と既知のむだ時間を含む制御対象に対してモデルブリッジ制御が有効であることが分かった．相補感度関数とベクトル $0E$ の関係より、制御性能には誤差補償器の位相よりもゲインが大きく関係していると考えられる．

今後は，定量的な手法を用いて制御器の評価，他の制御手法との比較，実際の機械システムへの応用について検証していく．

参考文献

1)有我祐一，渡部慶二，澤田薫:パラメータ変動を有するシステムのモデルブリッジ制御，第 29 回日本シミュレーション学会大会公演論文集，(2010)
2)渡部慶二:モデルブリッジ制御とは，第 51 回自動制御連合講演会講演論文集 CD-ROM，No501
3)王蕊，渡部慶二，村松鋭一，有我祐一，遠藤茂:IMP の構造を用いた位相補償ロバスト制，計測自動制御学会論文集 Vol.42，No.2，147/155，(2006)
4)渡部慶二:位相情報を取り込んだ新しいロバスト制御理論体系と多自由度制御系の構築，科学研究費補助金研究成果報告書，17560385(2008-5)
5)渡部慶二:むだ時間システムの制御，コロナ社，(1993)
6)劉康志:線形ロバスト制御，コロナ社(2002)
7)野波健蔵:Matlab による制御系設計，東京電機大学出版局(1998)