計測自動制御学会東北支部　第267回研究集会 (2011.10.28)
資料番号 267-11

柔軟マルチボディシステムに対するANCFに基づく数学モデルを用いた制御系設計法とパラメータに関する考察

A Controller Design Method for Flexible Multibody System Which Is Expressed by ANCF and studies on controller parameters

○菅原　佳城*，小林　信之**
○Yoshiki Sugawara, Nobuyuki Kobayashi
*秋田大学，**青山学院大学
*Akita University,　**Aoyama Gakuin University

キーワード：マルチボディダイナミクス(Multibody dynamics)絶対節点座標法(Absolute Nodal Coordinate Formulation)，μ設計（μ-synthesis)，柔軟マルチボディシステム（Flexible Multibody System)

連絡先：〒010-8502 秋田市手形学園町 1-1 秋田大学大学院工学資源学部機械工学専攻　菅原研究室
菅原佳城，Tel 018-889-2346，Fax 018-837-0405(学科事務)，E-mail ysugawara@mech.akita-u.ac.jp

1. 緒言

近年，宇宙空間において巨大構造を実現するために極めて柔軟な材料を用いた展開機構が採用されることがある．2010 年に打ち上げられソーラーセイル「IKAROS [1]」は対角線長さが 20[m]で厚さが 0.0075[mm]の正方形の膜構造を有しており，折り畳んだ状態でロケットに搭載され，軌道上で展開された．また、観測ロケット実験「S310-36 [2]」では1辺が 10[m]以上もある三角形状の網を直径30[cm]程度のロケットフェアリングの中に搭載して打ち上げ，軌道上での展開実験に成功している．一般的に，このような極めて柔軟な巨大構造物の振動や姿勢などに関する挙動を地上の実証実験で確認することは非常に困難であり，数値解析が重要な手段として数多くの研究がなされている．また，柔軟な巨大構造物の振動や姿勢に関する解析に加えて，それらを制御することは実用上の観点から極めて重要であるが，大変形を有するような極めて柔軟な構造に対する制御系の設計手法は十分に確立されてはいない．

絶対節点座標法（ANCF 法）[3]は非増分型非線形有限要素法の一種であり，大変形を有する柔軟マルチボディシステムの解析のために1990年代後半にShabanaらによって提案されて以降，様々な研究がなされてきている．ANCF 法では変形の座標と勾配が絶対座標を用いて表現され，その結果従来の有限要素法に比べて剛体運動を正確に表現できるという特徴を持つ．また，得られた運動方程式において，質量行列は定数行列となり慣性項は線形になるものの，剛性項は極めて強い非線形性を示すため，ANCF 法は計算性が優れているとは言えず，時刻歴応答の計算は容易ではない．それゆえ，ANCF 法に基づくモデルで時刻歴応答を計算する際は注意を要する．

ANCF 法に関する研究は非常に数多くなされてきている．例えば，3次元梁の ANCF 法に基づいた表現法に関する研究 [4]，数値解析結果と実験結果の比較による ANCF 法の手法に関する妥当性の検証 [5]，効率的な計算を目的としたモデルの低次元化に関する研究 [6]など様々である．しかしながら，ANCF 法に関する研究のほぼすべては柔軟マルチ

ボディシステムの挙動解析の能力向上に関したものに集中しており，ANCF 法によって得られたモデルから制御系を設計するなどの研究は皆無であると言ってもよい．

本研究では ANCF 法に基づいて導出されたモデルから極めて柔軟な構造物についての制御則を導出する手法の提案を行う．根元に制御トルクを印加することができる柔軟な梁を制御対象として，その位置と振動の制御を試みる．本研究では制御系設計のために ANCF 法の一種である連続体力学に基づく定式化手法 [7] に注目し，その手法によって得られる数学モデルに対して幾つかの仮定を設けた上で変形を施すと，ロバスト制御系設計の一つである μ 設計 [8] の枠組みに適した表現が容易に得られることを示す．

本論文は次のような構成である．まず第 2 章では制御対象を導入し，制御目的を定義する．さらに，制御系設計のための数学モデルを導出し，そのモデルにいくつかの処理を施すことで μ 設計に適した形にすることができることを示し，最終的に μ 設計による制御則を導出する．第 3 章では提案する制御系設計法の有効性を示すために，第 2 章で導出した制御則に対し数値解析を行う．さらに第 4 章では，設計パラメータと制御性能に関する考察を行う．最後に，結言と今後の課題を第 5 章において示す．

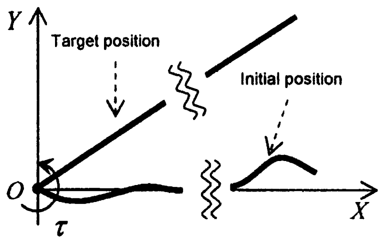

Fig. 1 Controlled object

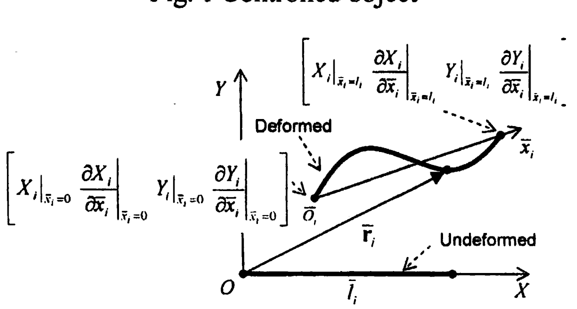

Fig. 2 The *i*-th element of mathematical expression for controller design

2. 制御系設計

2.1 制御対象と制御目的

Fig.1 に示すように，本研究における制御対象は一様な柔軟梁から構成され，一端はピン支持，もう一端は自由端となっている．制御トルクはピン支持された一端の周りに印加される．制御目的は柔軟梁を任意の初期状態から希望の位置まで動かし，残留振動を抑制することである．

2.2 制御系設計のための数学モデル

以降では Fig. 1 に示す柔軟梁を $\bar{N}$ 要素に分割し，それぞれの要素に L1-T1 [7] モデルを適用し，いくつかの処理を適用することで μ 設計法に対して適した形の数学モデルを導出する．

Fig.2 は i 番目 $(i=1,2,\cdots\bar{N})$ の要素に対する節点座標の定義を表しており，節点座標は両節点の絶対座標における変位と勾配から構成されている．ここで $\bar{\bullet}$ は制御系設計のための数学モデルに関する記号であることを示しており，後述の数値解析のためのモデルと区別するために導入していることに注意されたい．また，以降では便宜上，最初に第 1 要素以外の要素の運動方程式を導出し，その後に第 1 要素の運動方程式の導出を行う．

$\bar{e}_{ij}(i=2,\cdots\bar{N},j=1,\cdots8)$ を

$$\bar{e}_{i1}=X_i\big|_{\bar{x}_i=0},\ \bar{e}_{i2}=Y_i\big|_{\bar{x}_i=0},\ \bar{e}_{i3}=\frac{\partial X_i}{\partial\bar{x}_i}\bigg|_{\bar{x}_i=0},$$

$$\bar{e}_{i4}=\frac{\partial Y_i}{\partial\bar{x}_i}\bigg|_{\bar{x}_i=0},\ \bar{e}_{i5}=X_i\big|_{\bar{x}_i=\bar{l}_i},\ \bar{e}_{i6}=Y_i\big|_{\bar{x}_i=\bar{l}_i},$$

$$\bar{e}_{i7}=\frac{\partial X_i}{\partial\bar{x}_i}\bigg|_{\bar{x}_i=\bar{l}_i},\ \bar{e}_{i8}=\frac{\partial Y_i}{\partial\bar{x}_i}\bigg|_{\bar{x}_i=\bar{l}_i}$$

とし，節点ベクトルを

$$\bar{\mathbf{e}}_i=[\bar{\mathbf{e}}_{Xi}^T\,\bar{\mathbf{e}}_{Yi}^T]^T,$$

$$\bar{\mathbf{e}}_{Xi}=[\bar{e}_{i1}\,\bar{e}_{i3}\,\bar{e}_{i5}\,\bar{e}_{i7}]^T,\bar{\mathbf{e}}_{Yi}=[\bar{e}_{i2}\,\bar{e}_{i4}\,\bar{e}_{i6}\,\bar{e}_{i8}]^T$$

とすると，第 i 要素上の任意の点について絶対座標で表現した位置ベクトルは

$$\bar{\mathbf{r}}_i=\bar{\mathbf{S}}_i\bar{\mathbf{e}}_i \tag{1}$$

となる．ただし，$\bar{l}_i$ を第 i 要素の無変形時の長さとして $\bar{\xi}_i = \bar{x}_i / \bar{l}_i$ を導入すると $\bar{\mathbf{S}}_i$ は

$$\bar{\mathbf{S}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{Xi} & \mathbf{0}_{1\times 8} \\ \mathbf{0}_{1\times 8} & \bar{\mathbf{S}}_{Yi} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{Xi} = \bar{\mathbf{S}}_{Yi} = [1 - 3\bar{\xi}_i^2 + 2\bar{\xi}_i^3 \quad \bar{l}_i(\bar{\xi}_i - 2\bar{\xi}_i^2 + \bar{\xi}_i^3) \quad 3\bar{\xi}_i^2 - 2\bar{\xi}_i^3 \quad \bar{l}_i(\bar{\xi}_i^3 - \bar{\xi}_i^2)]$$

と表される．このとき，運動エネルギ，ポテンシャルエネルギおよび外力による仮想仕事を式（1）を用いて導出すると，第 i 要素 $(i = 2,3,\cdots \bar{N})$ に対する L1-T1 モデルによる運動方程式が

$$\bar{\mathbf{M}}_i \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_i + \bar{\mathbf{K}}_{Ti} \bar{\mathbf{e}}_i + \bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i) \bar{\mathbf{K}}_{Li} \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0} \qquad (2)$$

として与えられる [7]．ただし，$\bar{\mathbf{M}}_i$ は第 i 要素の慣性行列であり定数行列，$\bar{\mathbf{K}}_{Ti}$ は曲げ変形に関する剛性行列であり定数行列，$\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)\bar{\mathbf{K}}_{Li}$ は軸変形に対する剛性行列であり，$\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)$ は軸歪みで節点座標の関数，$\bar{\mathbf{K}}_{Li}$ は定数行列となっている．このとき $\bar{\mathbf{M}}_i$，$\bar{\mathbf{K}}_{Ti}$，$\bar{\mathbf{K}}_{Li}$ は次の形で表現される．

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \mathbf{blockdiag}\,(\bar{\mathbf{M}}_{Xi}, \bar{\mathbf{M}}_{Yi}) \qquad (3)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{Ti} = \mathbf{blockdiag}\,(\bar{\mathbf{K}}_{TXi}, \bar{\mathbf{K}}_{TYi}) \qquad (4)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{Li} = \mathbf{blockdiag}\,(\bar{\mathbf{K}}_{LXi}, \bar{\mathbf{K}}_{LYi}) \qquad (5)$$

ただし，$\bar{d}_i$ は梁の変形時の中心線の長さであり，$\bar{\mathbf{M}}_{Xi}, \bar{\mathbf{M}}_{Yi}, \bar{\mathbf{K}}_{TXi}, \bar{\mathbf{K}}_{TYi}, \bar{\mathbf{K}}_{LXi}$ および $\bar{\mathbf{K}}_{LYi}$ の詳細ついては紙面の制限から省略する．また，Berzeri らの提案した L1-T1 モデル [7] では，軸歪みは要素内において一定であるとの仮定のもと $\bar{d}_i = \sqrt{(\bar{e}_{i5} - \bar{e}_{i1})^2 + (\bar{e}_{i6} - \bar{e}_{i2})^2}$ を用いて $\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i) = (\bar{d}_i - \bar{l}_i)/\bar{l}_i$ として定義しているが，本研究では $\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)$ が非線形になることによる取り扱いの難しさを回避するために，以降において $\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)$ 自体を変動パラメータと置くため，$\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)$ で表現される軸歪みについては Berzeri らとは異なる取り扱いをしていることに注意されたい．

ここで，一般に制御対象の軸変形は曲げ変形に対して十分に小さいと考えることができ，$\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)$ は次の範囲

$$-\bar{\beta}_i \le \bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i) \le \bar{\beta}_i \qquad (6)$$

で変動するパラメータとみなすことができる．ただし，$\bar{\beta}_i$ は第 i 要素の軸歪みの変化の上限値と下限値を同じ値に設定した際の値（変動幅）であり，設計者が決定できるパラメータである．このとき，式(6)を

$$-1 \le \frac{\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)}{\bar{\beta}_i} \le 1 \qquad (7)$$

と変形できることを考慮すると，式（2）は次の形で表現される．

$$\bar{\mathbf{M}}_i \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_i + \bar{\mathbf{K}}_{Ti} \bar{\mathbf{e}}_i + \bar{\Delta}_i \bar{\beta}_i \bar{\mathbf{K}}_{Li} \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0} \qquad (8)$$

ただし，$\bar{\Delta}_i = \bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)/\bar{\beta}_i$ であり式（7）から明らかに $|\bar{\Delta}_i| < 1$ を満足する．さらに，式（3），（4）および（5）から明らかなように，式 (8) は次のように X 方向と Y 方向の二つの表現に分解することが可能である．

$$\bar{\mathbf{M}}_{Xi} \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_i + \bar{\mathbf{K}}_{TXi} \bar{\mathbf{e}}_i + \bar{\Delta}_i \bar{\beta}_i \bar{\mathbf{K}}_{LXi} \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0} \qquad (9)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{Yi} \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_i + \bar{\mathbf{K}}_{TYi} \bar{\mathbf{e}}_i + \bar{\Delta}_i \bar{\beta}_i \bar{\mathbf{K}}_{LYi} \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0} \qquad (10)$$

前述の $i = 2,3,\cdots,\bar{N}$ に対する運動方程式の導出過程を，境界条件を考慮しながら $i = 1$ について適用すると，第 1 要素に対する運動方程式を次のように得る．

$$\bar{\mathbf{M}}_1 \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_1 + \bar{\mathbf{K}}_{T1} \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\Delta}_1 \bar{\beta}_1 \bar{\mathbf{K}}_{L1} \bar{\mathbf{e}}_1 = \bar{\mathbf{Q}}_1 \qquad (11)$$

ただし，

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = [\bar{\mathbf{e}}_{X1}^T \, \bar{\mathbf{e}}_{Y1}^T]^T,$$
$$\bar{\mathbf{e}}_{X1} = [\bar{e}_{13} \; \bar{e}_{15} \; \bar{e}_{17}]^T, \quad \bar{\mathbf{e}}_{Y1} = [\bar{e}_{14} \; \bar{e}_{16} \; \bar{e}_{18}]^T$$

$$\bar{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{blockdiag}\,(\bar{\mathbf{M}}_{X1}, \bar{\mathbf{M}}_{Y1}),$$

となる．ただし，$\bar{l}_i$を第i要素の無変形時の長さとして$\bar{\xi}_i = \bar{x}_i / \bar{l}_i$を導入すると$\bar{\mathbf{S}}_i$は

$$\bar{\mathbf{S}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{Xi} & \mathbf{0}_{1\times 8} \\ \mathbf{0}_{1\times 8} & \bar{\mathbf{S}}_{Yi} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{Xi} = \bar{\mathbf{S}}_{Yi} = [1 - 3\bar{\xi}_i^2 + 2\bar{\xi}_i^3 \quad \bar{l}_i(\bar{\xi}_i - 2\bar{\xi}_i^2 + \bar{\xi}_i^3) \quad 3\bar{\xi}_i^2 - 2\bar{\xi}_i^3 \quad \bar{l}_i(\bar{\xi}_i^3 - \bar{\xi}_i^2)]$$

と表される．このとき，運動エネルギ，ポテンシャルエネルギおよび外力による仮想仕事を式（1）を用いて導出すると，第i要素$(i = 2,3,\cdots \bar{N})$に対するL1-T1モデルによる運動方程式が

$$\bar{\mathbf{M}}_i \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_i + \bar{\mathbf{K}}_{Ti} \bar{\mathbf{e}}_i + \bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i) \bar{\mathbf{K}}_{Li} \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0} \tag{2}$$

として与えられる[7]．ただし，$\bar{\mathbf{M}}_i$は第i要素の慣性行列であり定数行列，$\bar{\mathbf{K}}_{Ti}$は曲げ変形に関する剛性行列であり定数行列，$\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)\bar{\mathbf{K}}_{Li}$は軸変形に対する剛性行列であり，$\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)$は軸歪みで節点座標の関数，$\bar{\mathbf{K}}_{Li}$は定数行列となっている．このとき$\bar{\mathbf{M}}_i$，$\bar{\mathbf{K}}_{Ti}$，$\bar{\mathbf{K}}_{Li}$は次の形で表現される．

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \mathbf{blockdiag}\,(\bar{\mathbf{M}}_{Xi}, \bar{\mathbf{M}}_{Yi}) \tag{3}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{Ti} = \mathbf{blockdiag}\,(\bar{\mathbf{K}}_{TXi}, \bar{\mathbf{K}}_{TYi}) \tag{4}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{Li} = \mathbf{blockdiag}\,(\bar{\mathbf{K}}_{LXi}, \bar{\mathbf{K}}_{LYi}) \tag{5}$$

ただし，$\bar{d}_i$は梁の変形時の中心線の長さであり，$\bar{\mathbf{M}}_{Xi}, \bar{\mathbf{M}}_{Yi}, \bar{\mathbf{K}}_{TXi}, \bar{\mathbf{K}}_{TYi}, \bar{\mathbf{K}}_{LXi}$および$\bar{\mathbf{K}}_{LYi}$の詳細ついては紙面の制限から省略する．また，Berzeriらの提案したL1-T1モデル[7]では，軸歪みは要素内において一定であるとの仮定のもと$\bar{d}_i = \sqrt{(\bar{e}_{i5} - \bar{e}_{i1})^2 + (\bar{e}_{i6} - \bar{e}_{i2})^2}$を用いて$\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i) = (\bar{d}_i - \bar{l}_i)/\bar{l}_i$として定義しているが，本研究では$\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)$が非線形になることによる取り扱いの難しさを回避するために，以降において$\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)$自体を変動パラメータと置くため，$\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)$で表現される軸歪みについてはBerzeriらとは異なる取り扱いをしていることに注意されたい．

ここで，一般に制御対象の軸変形は曲げ変形に対して十分に小さいと考えることができ，$\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)$は次の範囲

$$-\bar{\beta}_i \le \bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i) \le \bar{\beta}_i \tag{6}$$

で変動するパラメータとみなすことができる．ただし，$\bar{\beta}_i$は第i要素の軸歪みの変化の上限値と下限値を同じ値に設定した際の値（変動幅）であり，設計者が決定できるパラメータである．このとき，式(6)を

$$-1 \le \frac{\bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)}{\bar{\beta}_i} \le 1 \tag{7}$$

と変形できることを考慮すると，式（2）は次の形で表現される．

$$\bar{\mathbf{M}}_i \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_i + \bar{\mathbf{K}}_{Ti} \bar{\mathbf{e}}_i + \bar{\Delta}_i \bar{\beta}_i \bar{\mathbf{K}}_{Li} \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0} \tag{8}$$

ただし，$\bar{\Delta}_i = \bar{\delta}_i(\bar{\mathbf{e}}_i)/\bar{\beta}_i$であり式（7）から明らかに$|\bar{\Delta}_i| < 1$を満足する．さらに，式（3），（4）および（5）から明らかなように，式(8)は次のようにX方向とY方向の二つの表現に分解することが可能である．

$$\bar{\mathbf{M}}_{Xi} \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_i + \bar{\mathbf{K}}_{TXi} \bar{\mathbf{e}}_i + \bar{\Delta}_i \bar{\beta}_i \bar{\mathbf{K}}_{LXi} \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0} \tag{9}$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{Yi} \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_i + \bar{\mathbf{K}}_{TYi} \bar{\mathbf{e}}_i + \bar{\Delta}_i \bar{\beta}_i \bar{\mathbf{K}}_{LYi} \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0} \tag{10}$$

前述の$i = 2,3,\cdots,\bar{N}$に対する運動方程式の導出過程を，境界条件を考慮しながら$i = 1$について適用すると，第1要素に対する運動方程式を次のように得る．

$$\bar{\mathbf{M}}_1 \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_1 + \bar{\mathbf{K}}_{T1} \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\Delta}_1 \bar{\beta}_1 \bar{\mathbf{K}}_{L1} \bar{\mathbf{e}}_1 = \bar{\mathbf{Q}}_1 \tag{11}$$

ただし，

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = [\bar{\mathbf{e}}_{X1}^T \, \bar{\mathbf{e}}_{Y1}^T]^T,$$
$$\bar{\mathbf{e}}_{X1} = [\bar{e}_{13} \; \bar{e}_{15} \; \bar{e}_{17}]^T, \quad \bar{\mathbf{e}}_{Y1} = [\bar{e}_{14} \; \bar{e}_{16} \; \bar{e}_{18}]^T$$

$$\bar{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{blockdiag}\,(\bar{\mathbf{M}}_{X1}, \bar{\mathbf{M}}_{Y1}),$$

$$\overline{\mathbf{K}}_{T1} = \mathbf{blockdiag}\,(\overline{\mathbf{K}}_{TX1}, \overline{\mathbf{K}}_{TY1}),$$

$$\overline{\mathbf{K}}_{L1} = \mathbf{blockdiag}\,(\overline{\mathbf{K}}_{LX1}, \overline{\mathbf{K}}_{LY1})$$

$$\overline{\Delta}_1 = \frac{\overline{\delta}_1(\overline{\mathbf{e}}_1)}{\overline{\beta}_1}, \qquad \overline{\mathbf{Q}}_1 = [\,\overline{\mathbf{B}}_{X1}{}^T\ \overline{\mathbf{B}}_{Y1}{}^T\,]^T \tau,$$

$$\overline{\mathbf{B}}_{X1} = \left[-\frac{\overline{e}_{14}}{\sqrt{\overline{e}_{13}^2 + \overline{e}_{14}^2}}\ 0\ 0 \right]^T,$$

$$\overline{\mathbf{B}}_{Y1} = \left[\frac{\overline{e}_{13}}{\sqrt{\overline{e}_{13}^2 + \overline{e}_{14}^2}}\ 0\ 0 \right]^T$$

であり，τ は柔軟梁の根元周りに印加される制御入力である．また，式 (9) および (10) と同様に式 (11) は X 方向と Y 方向の二つの表現に分割することができ，次のように表現される．

$$\overline{\mathbf{M}}_{X1}\ddot{\overline{\mathbf{e}}}_1 + \overline{\mathbf{K}}_{TX1}\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\Delta}_1\overline{\beta}_1\overline{\mathbf{K}}_{LX1}\overline{\mathbf{e}}_1 = \overline{\mathbf{B}}_{X1}\tau \tag{12}$$

$$\overline{\mathbf{M}}_{Y1}\ddot{\overline{\mathbf{e}}}_1 + \overline{\mathbf{K}}_{TY1}\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\Delta}_1\overline{\beta}_1\overline{\mathbf{K}}_{LY1}\overline{\mathbf{e}}_1 = \overline{\mathbf{B}}_{Y1}\tau \tag{13}$$

ここで，目標位置を正側の X 軸上に重なる位置と仮定すると，制御目的は任意の初期状態にある柔軟梁を残留振動を抑制させながら正側の X 軸上で安定化することになる．この仮定は柔軟梁の制御において一般性を失うことはない．なぜならば，座標変換によって様々な初期位置と目標位置の制御目的を上述の制御目的に帰着させることが可能だからである．以降では Fig.3 に示すような正側の X 軸上での安定化問題を前提に議論を展開する．

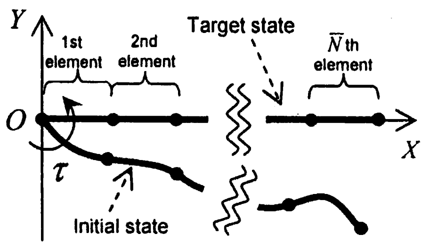

Fig. 3 Configuration of initial and target state for controller design

初期状態から目標位置に柔軟梁が近づくとき，根元の勾配も目標位置での勾配に近づく．その結果，次の仮定

$$\overline{\mathbf{B}}_{X1} \approx [0\ 0\ 0]^T \tag{14}$$

$$\overline{\mathbf{B}}_{Y1} \approx [1\ 0\ 0]^T \tag{15}$$

を設けることが可能である．式 (9)，(10)，(12)，(13)，(14) および (15) を考慮すると，目標状態付近では制御入力が X 方向の挙動に影響を及ぼさないとみなすことが可能であり，制御系設計は Y 方向の挙動に関する運動方程式に対してのみ適用する．式 (15) および隣り合う要素の間の節点についての以下の関係

$$\begin{cases} \overline{e}_{i6} = \overline{e}_{(i+1)2} \\ \overline{e}_{i8} = \overline{e}_{(i+1)4} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, \overline{N} - 1$$

を考慮して式 (10) および (13) で表される運動方程式を重ね合わせることにより，Y 方向についての全システムの数学モデルを次のように得る．

$$\overline{\mathbf{M}}_Y\,\ddot{\overline{\mathbf{e}}}_Y + \overline{\mathbf{K}}_A\,\overline{\mathbf{e}}_Y + \sum_{i=1}^{\overline{N}} \overline{\Delta}_i \overline{\mathbf{K}}_{Bi}\overline{\mathbf{e}}_Y = \overline{\mathbf{B}}_Y\tau \tag{16}$$

ただし，

$$\overline{\mathbf{e}}_Y = [\ \overline{e}_{14}\ \ \overline{e}_{22}\ \ \overline{e}_{24}\ \ \overline{e}_{32}\ \ \overline{e}_{34}\ \cdots$$
$$\overline{e}_{(\overline{N}-1)2}\ \ \overline{e}_{(\overline{N}-1)4}\ \ \overline{e}_{\overline{N}2}\ \ \overline{e}_{\overline{N}4}\ \ \overline{e}_{\overline{N}6}\ \ \overline{e}_{\overline{N}8}\ ]^T$$

$$\overline{\mathbf{M}}_Y = \mathbf{blockdiag}\,(\overline{\mathbf{M}}_{Y1}, \mathbf{0}_{2(\overline{N}-1)\times 2(\overline{N}-1)})$$
$$+ \sum_i^{\overline{N}} \mathbf{blockdiag}\,(\mathbf{0}_{(2i-3)\times(2i-3)}, \overline{\mathbf{M}}_{Yi}, \mathbf{0}_{2(\overline{N}-i)\times 2(\overline{N}-i)})$$

$$\overline{\mathbf{K}}_A = \mathbf{blockdiag}\,(\overline{\mathbf{K}}_{TY1}, \mathbf{0}_{2(\overline{N}-1)\times 2(\overline{N}-1)})$$
$$+ \sum_i^{\overline{N}} \mathbf{blockdiag}\,(\mathbf{0}_{(2i-3)\times(2i-3)}, \overline{\mathbf{K}}_{TYi}, \mathbf{0}_{2(\overline{N}-i)\times 2(\overline{N}-i)})$$

$$\overline{\mathbf{K}}_{B1} = \mathbf{blockdiag}\,(\overline{\mathbf{K}}_{LY1}, \mathbf{0}_{2(\overline{N}-1)\times 2(\overline{N}-1)}),$$

$$\overline{\mathbf{K}}_{Bi} = \mathbf{blockdiag}\,(\mathbf{0}_{(2i-3)\times(2i-3)}, \overline{\beta}_i \overline{\mathbf{K}}_{LYi}, \mathbf{0}_{2(\overline{N}-i)\times 2(\overline{N}-i)}) \quad for\ i = 2,3,\cdots \overline{N}$$

$$\overline{\mathbf{B}}_Y = [1 \ \ \mathbf{0}_{1\times 2\overline{N}}]^T$$

である．このとき，式（16）は状態空間表現で次のように表される．

$$\dot{\overline{\mathbf{q}}} = (\overline{\mathbf{A}}_0 + \sum_{i=1}^{\overline{N}} \overline{\Delta}_i \overline{\mathbf{A}}_i)\overline{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{B}}\tau \qquad (17)$$

$$\overline{\mathbf{q}} = [\overline{\mathbf{e}}_Y^T \ \ \dot{\overline{\mathbf{e}}}_Y^T]^T,$$

$$\overline{\mathbf{A}}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(2\overline{N}+1)\times(2\overline{N}+1)} & \mathbf{I}_{(2\overline{N}+1)} \\ -\overline{\mathbf{M}}_Y^{-1}\overline{\mathbf{K}}_A & \mathbf{0}_{(2\overline{N}+1)\times(2\overline{N}+1)} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(2\overline{N}+1)\times(2\overline{N}+1)} & \mathbf{0}_{(2\overline{N}+1)\times(2\overline{N}+1)} \\ -\overline{\mathbf{M}}_Y^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{Bi} & \mathbf{0}_{(2\overline{N}+1)\times(2\overline{N}+1)} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{B}} = [\overline{\mathbf{M}}_Y^{-1}\overline{\mathbf{B}}_Y{}^T \ \ \mathbf{0}_{1\times(2\overline{N}+1)}]^T$$

さらに m 個の節点座標が計測可能とし，$\overline{\mathbf{s}} \in \mathbf{R}^m$ を観測出力ベクトル，$\overline{\mathbf{C}} \in \mathbf{R}^{m\times(2\overline{N}+1)}$ および $\overline{\mathbf{D}} \in \mathbf{R}^{m\times(2\overline{N}+1)}$ を観測可能な節点によって決まる定数行列とすると，システムに対する観測方程式は次式で与えられる．

$$\overline{\mathbf{s}} = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{D}}\tau \qquad (18)$$

本研究では観測出力として，柔軟梁の Y 軸方向に関する根元の勾配，中心点の変位および勾配，先端の変位および勾配の合計 5 個の出力を用いる．このとき $\overline{\mathbf{C}}$ は要素数 $\overline{N}$ に応じて構造が決定し，$\overline{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$ である．式(17)は $|\overline{\Delta}_i| < 1$ を満たす不確かさを含んだ線形の状態方程式とみなすことができ，次節において μ 設計法を適用していく．

2.3 μ 設計法の適用

不確かさ $\overline{\Delta}_i$ に対する出力変数 $\tilde{z}_i$ および入力変数 $\tilde{w}_i$ を導入すると，式（17）で表される状態方程式と式（18）で表される観測方程式を考慮したシステムは Fig.4 のブロック線図のような構造で表現され，μ 設計法による制御系設計が適用可能[9, 10, 11]となる．ここで Fig.4 における $\mathbf{P}$ は式(17)および(18)で表されるモデルから，不確かさを取り除いたモデルである．さらに，制御性能を考慮するために新たに入出力，$\tilde{z}_1$，$\tilde{w}_1$，$\tilde{\mathbf{z}}_2 = [\tilde{z}_{21}\,\tilde{z}_{22} \cdots \tilde{z}_{2m}]^T$，$\tilde{\mathbf{w}}_2 = [\tilde{w}_{21}\,\tilde{w}_{22} \cdots \tilde{w}_{2m}]^T$ およびそれらの入出力に関連して重み関数 $\tilde{W}_{in1}$，$\tilde{W}_{out1}$，$\tilde{\mathbf{W}}_{in2}$，$\tilde{\mathbf{W}}_{out2}$ も導入することで，Fig.5 のように拡大したモデルを導入する[11]．Fig.5 のようなブロック線図で表されるモデルに対しては，MATLAB で提供されている制御系設計のツールボックスを用いることで，μ 設計法に基づく制御則を効率よく導出することが可能である．本研究では μ 設計法に関しては特別な処理を施しておらず，一般的な手法を適用しているため，紙面の制限の都合からも制御系設計の詳細については割愛する．

これまでの前述の式(17)および(18)までの導出過程からも明らかなように，ANCF 法の一種である L1-T1 モデルから μ 設計法に適した形の数学モデルを得ることは容易であり，ANCF 法は μ 設計法を含むロバスト制御系設計法の枠組みに相性の良い定式化手法であると言える．

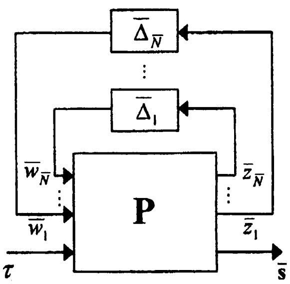

Fig. 4 System with uncertainties

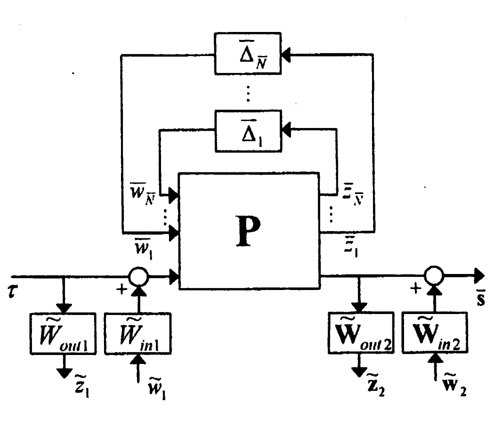

Fig. 5 Augmented system for performance evaluation

3. 数値解析

本章では数値解析によって提案する制御系設計手法の有効性を示す．前述のように制御目的は柔軟梁を初期状態から正側の X 軸上である目標位置まで動かし、同時に残留振動を抑制することである．つまり，観測出力である節点の Y軸方向に関する座標と勾配を0にするように制御を行う．

3.1 制御対象および制御系設計のためのパラメータ

表1は柔軟梁の物理パラメータを示し，制御系のための設計パラメータである重み関数（$\tilde{W}_{in1}$，$\tilde{W}_{out1}$，$\tilde{\mathbf{W}}_{in2}$ および $\tilde{\mathbf{W}}_{out2}$），数学モデルの要素数（$\bar{N}$）および軸歪みの変動幅に関するパラメータ（$\bar{\beta}_i$）は以下の通りである．

$$\tilde{\mathbf{W}}_{in2} = \mathbf{diag}(\tilde{W}_{in2}, \tilde{W}_{in2}, \tilde{W}_{in2}, \tilde{W}_{in2}, \tilde{W}_{in2}),$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_{out2} = \mathbf{diag}(\tilde{W}_{out2}, \tilde{W}_{out2}, \tilde{W}_{out2}, \tilde{W}_{out2}, \tilde{W}_{out2})$$

$$\tilde{W}_{in1} = \tilde{W}_{in2} = \frac{0.01(s+250)}{s+6000},$$

$$\tilde{W}_{out1} = \frac{96(4s+100)}{5(s+8000)},$$

$$\tilde{W}_{out2} = \frac{300000}{s^2+2000s+30000}$$

$$\bar{N}=4, \quad \bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\beta}_3 = \bar{\beta}_4 = 0.8\times10^{-7}$$

上述の設計パラメータは数値解析を繰り返しながら試行錯誤的に決定した．制御帯域ではない高い周波数成分の入力を小さくするために入力に関する重み関数は高い周波数で重みが大きくなるような関数にし，制御帯域である低い周波数の出力を十分に抑えるために，出力に関する重み関数は低い周波数で重みが大きくなるような関数に設定している．また，$\bar{N}$ および $\bar{\beta}_i$ については制御性能への影響が明確ではないため，第4章においてその影響を考察する．ここで，制御系設計のための数学モデルの要素数は多いとは言えないが，要素数が大きくなるにつれて制御則の次元も非常に大きくなることや，本研究では提案手法の可能性を探ることが目的であることからも $\bar{N}=4$ で十分であることに注意されたい．

Table 1 Dimensions and physical parameters of the flexible beam

Dimensions and physical parameters		Value
Length	[m]	1.0
Width	[m]	0.05
Thickness	[m]	0.002
Young's modulus	[Pa]	70e9
Mass density	[kg/m^3]	1400

前述のパラメータを用いて制御則を導出すると

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_K = \mathbf{A}_K\mathbf{X}_K + \mathbf{B}_K\bar{\mathbf{s}} \\ \tau = \mathbf{C}_K\mathbf{X}_K + \mathbf{D}_K\bar{\mathbf{s}} \end{cases} \tag{19}$$

を得る．ただし $\mathbf{X}_K \in \mathbf{R}^{95}$ であり，このときの μ は0.970であった．式（19）に現れる各行列の詳細は紙面の制限からここでは割愛する．

3.2 数値解析のための数学モデル

制御系設計に用いたL1-T1モデルは精度の良い結果を得るためには非常に多くの要素を必要とするため [7]，Berzeri らによって提案されているL2-T1モデル [7] を用いて数値解析を行うためのモデルを導出した．これは，他のモデルに比べて比較的少ない要素数で十分な精度が得られるからである．L2-T1モデルによる数学モデルは

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_e^T \\ \mathbf{C}_e & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{e}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \tag{20}$$

で与えられ，$\mathbf{e}$ は節点座標ベクトル，$\mathbf{M}$ は慣性行列，$\mathbf{C}_e$ は拘束方程式の $\mathbf{e}$ に関する微分，$\mathbf{Q}$ は外力および剛性力から構成される項，$\boldsymbol{\lambda}$ はラグランジュ定数，$\boldsymbol{\gamma}$ は $\ddot{\mathbf{e}}$ 以外の拘束方程式の時間微分に関するベクトルである．式（20）の導出は本論文の主題ではないため，導出過程および各行列に現れるパラメータについては割愛する．式（20）の導出にあたり要素数 N は $N=4$ としており，表1のパラ

メータを持つ対象を解析するためには十分な値であることを事前の数値解析から確認している.

3.3 数値解析結果

式 (20) のシステムに式 (19) で示される制御則を適用することで数値解析を行った. 初期状態は正の X 軸から反時計方向に 60 度回転させた位置に静止しているものとし, 制御性能を評価するために柔軟梁の先端および中点の Y 座標 Y_{tip} および Y_{mid} に注目した. Fig.6 に Y_{tip} および Y_{mid} の時刻歴応答を実線および点線で示す. また, Fig.7 にその際の制御入力の時刻歴応答を示す. さらに Fig.8 に 0.00[s]～0.40[s]の過渡応答付近での変形形状を示す. Fig.8 では分かりやすさのために, 左図に 0.00[s]～0.14[s]までの変形形状を 0.01[s]ごとに示し, 右図に 0.16[s]～0.40[s]までの変形形状を 0.02[s]ごとに示している. Fig.6 から明らかなように, 制御開始直後から梁の先端も中点も初期状態から目標状態である正の X 軸上に速やかに収束し始め 0.5[s]付近ではおおよその目標状態に収束しており, 極めて速応性の良い応答が得られている. また, Fig.7 から明らかなようにこれだけの速い応答を得るために, 梁の寸法に比べると比較的大きな制御入力が印加されていることが分かる. さらに, Fig.7 が示すように制御開始直後から 0.20[s]付近までは約 -10[Nm]～10[Nm] 程度の大きな制御入力が印加されており, その時間帯の変形形状を Fig.8 から読み取ると, 極めて大きな変形が発生していることがわかる. しかしながら, このような大きな変形にも関わらず, 0.5[s]以降には残留振動も抑制され, 制御目的も十分に達成されており, 提案する制御系設計手法が有効な方法であることが示されている.

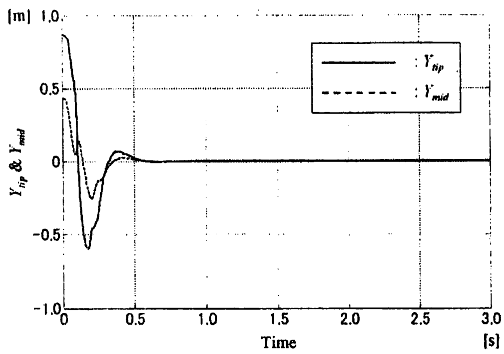

Fig. 6 Displacement of tip and mid point of the flexible beam in the direction of Y

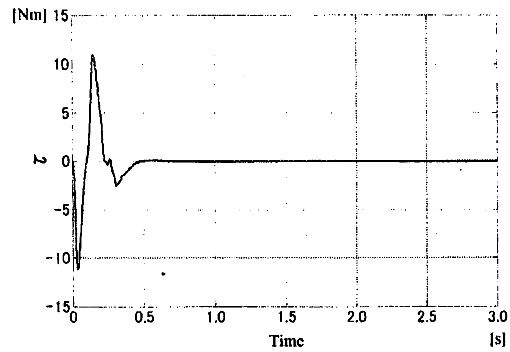

Fig. 7 Control input

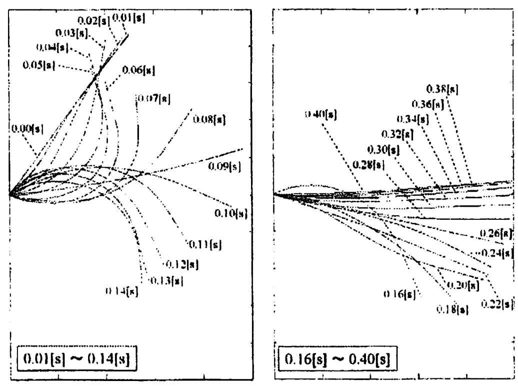

Fig. 8 Shape of deformation at transient state

4. 設計パラメータに関する考察

4.1 提案手法における設計パラメータ

重み関数 ($\tilde{W}_{in1}$, $\tilde{W}_{out1}$, $\tilde{\mathbf{W}}_{in2}$ および $\tilde{\mathbf{W}}_{out2}$) は所望の制御性能を実現するために導入されるものであり, 各重み関数の間でのトレードオフのために試行錯誤的に決定する必要はあるものの, 制御性能に与える影響はおおよそ予測することが可能である. 一方, 軸歪みの変動幅に関するパラメータ ($\bar{\beta}_i$) については本提案手法に固有のパラメータであり, 設計性能に対する影響は明確ではない. また制御系設計のための数学モデルの要素数 ($\bar{N}$) についても L1-T1 モデルの解析モデルとしての精度の要素数への依存性 [7] を考慮すると, そのモデルを用いて導出した制御則の制御性能への影響は興味があるところである. Fig.9 および Fig.10 に $\bar{\beta}_i$ および $\bar{N}$ を変化

させた際の先端のY座標Y_{tip}および制御入力τの時刻歴応答を示す．また，Fig.11 に Fig.9 における定常状態である 2.6[s]〜2.8[s]付近の応答の拡大図を示す．Fig.9〜11 における数値解析では柔軟梁は第3章のものと同じ寸法にしており，実線の時刻歴応答に対応する制御則は第3章のものと同じである．$\bar{\beta}_i$の制御性能への影響を評価するために，実線の場合よりも小さな値の$\bar{\beta}_i$（$\bar{\beta}_1=\bar{\beta}_2=\bar{\beta}_3=\bar{\beta}_4=1.0\times10^{-11}$）を設定し，他のパラメータについてはすべて同じ値に設定して導出した制御則による応答を一点鎖線で示す．また，$\bar{N}$の制御性能への影響を評価するために，実線の場合に対して小さな値の$\bar{N}$（$\bar{N}=2$）を設定し，他のパラメータについてはすべて同じ値にして導出した制御則による応答を点線で示す．それゆえ，以降では Fig.9〜11 の結果をもとに$\bar{\beta}_i$および$\bar{N}$の制御性能への影響を考察する．

4.2 $\bar{\beta}_i$の制御性能への影響について

$\bar{\beta}_i$の制御性能への影響を評価するために，Fig.9〜11 における実線と一点鎖線による時刻歴応答に注目する．Fig.9 および Fig.10 から明らかなように，$\bar{\beta}_i$の値が大きい場合（実線）の方が$\bar{\beta}_i$の値が小さい場合（一点鎖線）に比べより速く目標状態への収束している．また，Fig.11 から明らかなように，定常状態では$\bar{\beta}_i$の値が小さい場合の方に残留振動が発生しており，緩やかな減衰は確認できるものの，$\bar{\beta}_i$の値が大きい場合に比べるとより大きな振幅での振動となっている．これらの結果から，$\bar{\beta}_i$の値が大きい場合の方がより速応性の優れた応答となることが分かる．より大きな値の$\bar{\beta}_i$を設定するということは，制御対象に対してより大きな軸変形を許容するということに対応する．より速応性が優れた応答では梁が速い速度で回転を行うため，遠心力などに伴う軸方向への変形が大きくなる可能性が生じる．それゆえ，より大きな$\bar{\beta}_i$を設定することによって，軸方向の変化に対してより大きな変形を許容するような制御則が結果的に導出されるために，前述のような$\bar{\beta}_i$の大きさの差による応答の違いが発生したものと考えられる．また，紙面の都合により詳細は割愛するが，梁の寸法や$\bar{\beta}_i$以外の設計パラメータが異なる場合においても，$\bar{\beta}_i$を大きくすることでより速応性の優れた応答を実現できることが確認されている．

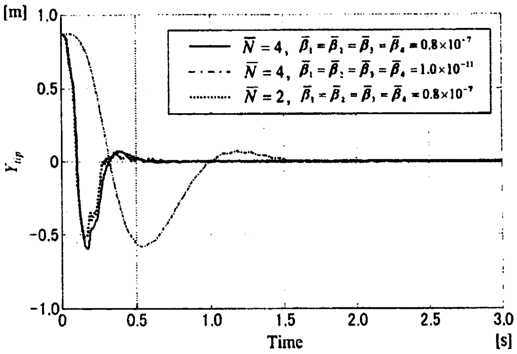

Fig. 9 Comparison of time histories of Y_{tip} by three kinds of controllers

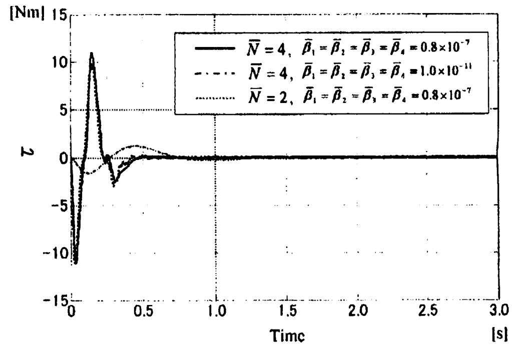

Fig. 10 Comparison of time histories of τ by three kinds of controllers

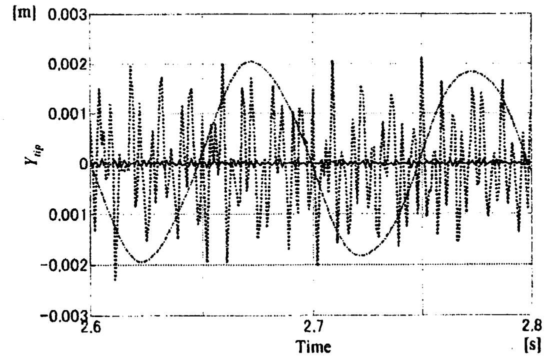

Fig. 11 Magnified figure of Figure 9 between 2.6[s] and 2.8[s]

4.3 $\bar{N}$の制御性能への影響について

$\bar{N}$の制御性能への影響を評価するために，Fig.9〜11 における実線と点線による時刻歴応答に注目する．Fig.9 および Fig.10 から明らかなように，4要素および2要素で設計した両制御則ではその応答に大きな差異を確認することはできない．しかしながら，Fig.11

に示すように，定常状態では2要素で設計した制御則による応答の方に大きな残留振動を確認することができ，より要素数の多い4要素で設計した制御則の方がより優れた制御性能を示している．これは要素数が少なくなることで制御対象の表現の精度が低下するために，重み関数などの制御性能を与えるための設計パラメータが制御則に十分に反映されなかったことが考えられる．また，紙面の都合により詳細は割愛するが，異なる寸法の柔軟梁などを用いた場合においても同様の現象が確認されている．

5. 結言と今後の課題

5.1 結言

本論文では ANCF 法における連続体力学に基づく手法によって導出された数学モデルが，μ設計法に適した形に容易に変形することができることを示し，さらにその数学モデルを用いてμ設計法によって制御則を導出し，数値解析によって有効性を示した．また，ANCF 法によって導出した数学モデルに起因して発生する設計パラメータに対しての考察を行い，制御系設計の際の知見を示した．これまでに皆無に近かった ANCF 法による数学モデルを活用した制御系設計を実現したことで，柔軟構造物に対する制御系設計の新たな可能性と展開が期待できるものと考えられる．

5.2 今後の課題

本研究の提案手法による制御則の次元は極めて大きく，要素数を増やすことでさらに次元が増加するため，実装の観点からも制御則の低次元化が必要である．また，提案手法では導出したすべての制御則で必ずしも制御目的が達成できるというわけではなく，少ない要素数で制御則を導出した場合には，制御目的を達成できないものが頻出するという現象を確認している．その結果，導出した制御則が制御目的を達成可能かどうかを数値解析によって確認する作業が必要となり，制御系設計に時間を要する．このように全ての制御則が制御目的を達成できない原因は，第4章における$\bar{N}$の制御性能への影響についての考察と同様の原因と考えられる．より効率の良い制御系設計のためにも，より大きい要素数のモデルによる制御系設計が必要であり，このような理由からも制御則の低次元化は極めて重要である．

参考文献

1) Mimasu, Y., Kitajima, A., Yamaguchi, T., Funase, R., Morimoto, M. Y., Sawada, H., Takeuchi, H., Mori, O., Tsuda Y. and Kawaguchi J. "Photon Acceleration Model of Flexible Spinning Solar Sail", Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology Japan, vol. 8, pp.Pk_1-Pk_6 (2010)
2) Nakasuka, S., Sahara, H., Nakamura, Y., Funase, R., Nagai, M., Miyamura, N., Enokuchi, A., Hatsutori, Y., Funane, T., Sasaki, F., Nojiri, Y., Komatsu, M., Sugawara, Y., and Kaya, N., "Sounding Rocket Experimental Results of Large Net Extension in Space to be Applied to Future Large Phased Array Antenna", SpaceTechnology - Space Engineering, Telecommunication, Systems Engineering and Control, Vol.26, No.3-4, pp165-170 (2006)
3) Shabana, A. A., Hussien, H. A. and Escalona, J. L., "Application of the absolute nodal formulation to large rotation and large deformation problems", Journal of Mechanical Design, Vol.120, pp. 188-195 (1998)
4) Yakoub, R. Y. and Shabana, A. A., "Three Dimensional Absolute Nodal Coordinate Formulation for Beam Elements", Journal of Mechanical Design, Vol.123, pp. 606-621 (2001)
5) Yoo, W. S., Lee, J. H., Park, S. J., Sohn, J. H., Dmitrochenko, O. and Pogorelov, D. Y., "Large Oscillation of a Thin

Cantilever Beam: Physical Experiments and Simulation Using the Absolute Nodal Coordinate Formulation", Nonlinear Dynamics, Vol.34, pp. 3-29 (2003)

6) Wago, T., Sugawara, Y. and Kobayashi, N., "Reduction of System Matrices of Planar Beam in ANCF by Component Mode Synthesis Method", Proceedings of the 1st Joint International Conference on Multibody System Dynamics (CD-ROM), Lappeenranta, Finland (2010)

7) Berzeri, M., and Shabana, A. A., "Development of Simple Models for the Elastic Forces in the Absolute Nodal Co-ordinate Formulation", Journal of Sound and Vibration, Vol.235. No.4, pp.539-565 (2000)

8) Doyle, J.C., "Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties", IEE Proceedings Part D, Vol.133, pp.45-56 (1982)

9) Morton, B., and McAfoos, R., "A Mu-test for a real parameter variations", Proceedings of the American Control Conference, pp.135-138 (1985)

10) Glover, K. and Doyle, J. C., "State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an norm bound and relations to risk sensitivity", System and Control Letters, Vol.11, pp167-172 (1988)

11) Balas, G., Doyle, J. C., Glover, K., Packard, A. and Smith, R., μ-Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide, MUSYN Inc. and The Mathworks Inc. (1994)

12) Shabana, A. A., Dynamics of Multibody Systems 3rd edition, Cambridge University Press (2005)