計測自動制御学会東北支部　第 267 回研究集会(2011.10.28)
資料番号　267-13

ロバストモデル追従形サーボ制御

Robust model following servo control

○遠藤　清志*，秋山　孝夫*，大久保　重範*
○Kiyoshi Endo*, Takao Akiyama*, Shigenori Okubo*

*山形大学
*Yamagata University

キーワード：ロバスト制御(Robust control),モデル追従形サーボ制御(Model following servo control)
構造化された不確かさ(Structured uncertainty)

連絡先：〒992-8510 山形県米沢市城南四丁目 3-16 山形大学工学部機械システム工学科 秋山研究室
遠藤　清志　E-mail: cop1908678437@yahoo.co.jp

１．緒言

私たちの身の回りには様々な不確かさに取り囲まれている．しかし，実際に私たちの身の回りにある工業製品などが，不確かさからくる要因によって正常な機能が阻害されたり，本来の目的が達成されなくなるようなことは避けなければならない．このように，制御系設計時に用いる制御対象のモデルと実システムの間には必ずギャップがあるという認識に立ち，これを考慮した制御系設計を行うことによって、実際に良好な性能を得る制御のことをロバスト制御という．

そこで本研究では，モデルの構造はわかっているが，その係数やモデルパラメータの値が不確かさを含む，構造化された不確かさに対してモデル追従形サーボ制御系の設計法を提案する．

２．問題設定

制御対象を式(1),(2)に，また参照モデルを式(3)~(4)に示す．

$$\dot{x}(t) = \{A + D\Delta(t)E_a\}x(t) + \{B + D\Delta(t)E_b\}u(t) + d(t) \quad (1)$$

$$y(t) = cx(t) + d_0(t) \quad (2)$$

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + r_m(t) \quad (3)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t) \quad (4)$$

ここで，$x(t) \in R^n$ は状態変数,$u(t) \in R^m$ は制御入力，$y(t)$ は制御対象の出力，$d(t)$，$d_0(t)$ は有界な外乱($\dot{d}(t) = \dot{d}_0(t) = 0$)，$D\Delta(t)E_a, D\Delta(t)E_b$ は不確かさを表す有界な摂動，$x_m(t)$ は参照モデルの状態変数，$r_m(t)$ は参照入力($\dot{r}(t) = 0$)，$y_m(t)$ は，参照出力である．また，制御対象と参照モデルの出力誤差 $e(t)$ を式(5)に示す．

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (5)$$

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0 \quad (6)$$

３．制御系の設計

式(1),(3)を微分した式を式(7),(8)に示す.

$$\ddot{x}(t)=\left\{D\dot{\Delta}(t)E_a\right\}x(t)+\{A+D\Delta(t)E_a\}\dot{x}(t)$$
$$+\left\{D\dot{\Delta}(t)E_b\right\}u(t)+\{B+D\Delta(t)E_b\}\dot{u}(t) \quad (7)$$

$$\ddot{x}_m=A_m\dot{x}_m(t) \quad (8)$$

式(5)に式(2),(4)を代入し，微分した式を式(9)に示す.

$$\dot{e}(t)=\dot{y}(t)-\dot{y}_m(t)$$
$$=C\dot{x}(t)-C_m\dot{x}_m(t) \quad (9)$$

t→∞において，$x(t)$をx_s，$u(t)$をu_sとした式を式(10)に示す.

$$0=\left\{D\dot{\Delta}(t)E_a\right\}x_s+\left\{D\dot{\Delta}(t)E_b\right\}u_s \quad (10)$$

式(7)で$\tilde{x}(t)=x(t)-x_s,\tilde{u}(t)=u(t)-u_s$ (11)

とした式を式(12)に示す.

$$\ddot{x}(t)=\left\{D\dot{\Delta}(t)E_a\right\}\tilde{x}(t)+\{A+D\Delta(t)E_a\}\dot{x}(t)$$
$$+\left\{D\dot{\Delta}(t)E_b\right\}\tilde{u}(t)+\{B+D\Delta(t)E_b\}\dot{u}(t) \quad (12)$$

ここで, 式(8),(9),(11),(12)より拡大系を構成し，式(13)に示す.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \tilde{x}(t)\\ e(t)\\ \dot{x}_m(t)\\ \tilde{u}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\{A+D\Delta(t)E_a\} & D\dot{\Delta}(t)E_a & 0 & 0 & D\dot{\Delta}(t)E_b\\ I & 0 & 0 & 0 & 0\\ C & 0 & 0 & -C_m & 0\\ 0 & 0 & 0 & A_m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \tilde{x}(t)\\ e(t)\\ \dot{x}_m(t)\\ \tilde{u}(t)\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}\{B+D\Delta(t)E_b\}\\ 0\\ 0\\ 0\\ I\end{bmatrix}\dot{u}(t)$$
$$=\bar{A}_e(t)\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \tilde{x}(t)\\ e(t)\\ \dot{x}_m(t)\\ \tilde{u}(t)\end{bmatrix}+\bar{B}_e(t)\dot{u}(t) \quad (13)$$

ここで，$\bar{A}_e(t)$を式(14)に，$\bar{B}_e(t)$を式(15)に書き換える.

$$\bar{A}_e(t)=\begin{bmatrix}A & 0 & 0 & 0 & 0\\ I & 0 & 0 & 0 & 0\\ C & 0 & 0 & -C_m & 0\\ 0 & 0 & 0 & A_m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}D\Delta(t)E_a & D\dot{\Delta}(t)E_a & 0 & 0 & D\dot{\Delta}(t)E_b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= A_e + \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta(t) & \dot{\Delta}(t) & 0 & 0 & \dot{\Delta}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_b \end{bmatrix}$$

$$= A_e + D_e \Delta_e(t) E_{ea} \tag{14}$$

$$\bar{B}_e(t) = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta(t) & \dot{\Delta}(t) & 0 & 0 & \dot{\Delta}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= B_e + D_e \Delta_e(t) E_{eb} \tag{15}$$

また, $\xi_e(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t)^T & \tilde{x}(t)^T & e(t)^T & \dot{x}_m(t)^T & \tilde{u}(t)^T \end{bmatrix}^T$ (16)

とおけば,拡大系は式(17)に表される.

$$\dot{\xi}_e(t) = \{A_e + D_e \Delta_e(t) E_{ea}\} \xi_e(t) + \{B_e + D_e \Delta_e(t) E_{eb}\} \dot{u}(t) \tag{17}$$

$$\|\Delta_e(t)\| \le 1$$

また, $E_{eb}^T E_{eb} = E_b^2, \left|E_{eb}^T E_{eb}\right| = \left|E_b\right|^2 \ne 0$より,
二次安定化制御は,式(18)で表される.

$$\dot{u}(t) = -(E_b^2)^{-1}(B_e^T P + E_{eb}^T E_{ea}) \xi_e(t)$$

$$= -(E_b^2)^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} E_b^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_b \end{bmatrix} \right\} \xi_e(t)$$

$$= -(E_b^2)^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} E_b^T E_a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \xi_e(t) \tag{18}$$

ここで, Pは次の$Riccati$方程式を
満たす正定解である
$Riccati$方程式を式(19)に示す.

$$\{A_e - B_e (E_b^2)^{-1} E_{eb}^T E_{ea}\}^T P + P\{A_e - B_e (E_b^2)^{-1} E_{eb}^T E_{ea}\} + P D_e D_e^T P - P B_e (E_b^2)^{-1} B_e^T P + E_{ea}^T \{I - E_{eb}(E_b^2)^{-1} E_{eb}^T\} E_{ea} + \varepsilon Q = 0$$

ここで, $\varepsilon > 0, Q > 0$ (19)

式(19)を$,A,B,C,D,A_m,C_m,E_a,E_b$で表すと式(20)で表される.

$$
\begin{bmatrix} A-B(E_b^2)^{-1}E_b^TE_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & -C_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_m & 0 \\ -(E_b^2)^{-1}E_b^TE_a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T P
+P\begin{bmatrix} A-B(E_b^2)^{-1}E_b^TE_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & -C_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_m & 0 \\ -(E_b^2)^{-1}E_b^TE_a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
-P\begin{bmatrix} B(E_b^2)^{-1}B^T-D^2 & 0 & 0 & 0 & B(E_b^2)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (E_b^2)^{-1}B^T & 0 & 0 & 0 & (E_b^2)^{-1} \end{bmatrix}
\cdot P+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_b^2 \end{bmatrix}+\varepsilon Q=0 \tag{20}
$$

制御入力$u(t)$は式(22)で表される.

$$
\dot{u}(t)=-(E_b^2)^{-1}\{[B^T\quad 0\quad 0\quad 0\quad I]P
+[E_b^2E_a\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]\}\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \tilde{x}(t) \\ e(t) \\ \dot{x}_m(t) \\ \tilde{u}(t) \end{bmatrix}
$$

ここで, K_eを式(21)とする.

$$
K_e=-(E_b^2)^{-1}\{[B^T\quad 0\quad 0\quad 0\quad I]P
+[E_b^2E_a\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]\} \tag{21}
$$

$$
=-K_e\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \tilde{x}(t) \\ e(t) \\ \dot{x}(t) \\ \tilde{u}(t) \end{bmatrix} \tag{22}
$$

式(22)をtで積分すると式(23),(24)で表される.

$$
u(t)=-K_e\zeta_e(t) \tag{23}
$$

$$
\zeta_e(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ \int_0^t\{x(t)-x_s\}dt \\ \int_0^t e(t)dt \\ x_m(t) \\ \int_0^t\{u(t)-u_s\}dt \end{bmatrix} \tag{24}
$$

定常値x_s,u_sの求め方

$t\to\infty$において,状態方程式は式(25)のように表される.

$$
0=\{A+D\Delta(t)E_a\}x_s
+\{B+D\Delta(t)E_b\}u_s+d(t) \tag{25}
$$

また、式(10)より

$$
0=\left\{D\dot{\Delta}(t)E_a\right\}x_s+\left\{D\dot{\Delta}(t)E_b\right\}u_s \tag{10}
$$

式(25),式(10)の拡大系を式(26)に示す.

$$
\begin{bmatrix} \{A+D\Delta(t)E_a\} & \{B+D\Delta(t)E_b\} \\ D\dot{\Delta}(t)E_a & D\dot{\Delta}(t)E_b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix}
=-\begin{bmatrix} d(t) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
A_s(t)\begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} d(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}
$$

$$
A_s(t)\in R^{2n(n+m)}
$$

また，$\left| A_s(t)^T A_s(t) \right| \neq 0$とすると

$[x_s \quad u_s]^T$は式(27)で表せる．

$$\begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix} = -\left\{ A_s(t)^T A_s(t) \right\}^{-1} A_s(t)^T \begin{bmatrix} d(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

4．数値例

数値例を以下に示す．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \quad C_m = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_a = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad E_b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$r_m = 5 \quad \Delta(t) = 0.4\sin(0.5t)$$

$$d(t) = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0 \end{bmatrix}, (15 \le t \le 28)$$

$$d_0(t) = 0.7, (38 \le t \le 55)$$

式(1)~(4)に数値を代入し，式(28)~式(31)とする．また，以下の数値例で MATX を使用して数値シミュレーションを行う．

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.8\sin(0.5t) & 1.2\sin(0.5t) - 1 \\ -2.4\sin(0.5t) + 2 & 4.4\sin(0.5t) + 3 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} -0.4\cos(0.5t) \\ -2.4\cos(0.5t) + 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.7 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\dot{x}_m(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x_m(t) + 5 \quad (30)$$

$$y_m = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x_m(t) \quad (31)$$

式(20)の Riccati 方程式を MATX で計算した結果を以下に示す．

$$P = \begin{bmatrix}
1.24\times10^{2} & -1.60\times10^{2} & 1.09\times10^{2} & -1.85\times10^{2} & 2.10\times10^{1} & -9.65\times10^{0} & -4.83\times10^{0} & -1.85\times10^{2} \\
1.51\times10^{2} & -1.96\times10^{2} & 1.33\times10^{2} & -2.25\times10^{2} & 2.54\times10^{1} & -1.18\times10^{1} & -5.88\times10^{0} & -1.45\times10^{2} \\
-1.08\times10^{0} & 1.37\times10^{0} & 1.60\times10^{8} & 7.53\times10^{7} & -5.90\times10^{7} & 3.93\times10^{7} & 1.96\times10^{7} & -1.64\times10^{7} \\
7.99\times10^{1} & -1.01\times10^{2} & -6.43\times10^{7} & -3.02\times10^{7} & 2.37\times10^{7} & -1.58\times10^{8} & -7.89\times10^{6} & 6.59\times10^{6} \\
5.07\times10^{1} & -6.44\times10^{1} & -2.40\times10^{7} & -1.13\times10^{7} & 8.81\times10^{6} & -5.87\times10^{6} & -2.94\times10^{6} & 2.45\times10^{6} \\
-3.02\times10^{1} & 3.84\times10^{1} & 1.60\times10^{7} & 7.51\times10^{6} & -5.87\times10^{6} & 3.91\times10^{6} & 1.94\times10^{6} & -1.64\times10^{6} \\
-1.51\times10^{1} & 1.92\times10^{1} & 7.99\times10^{6} & 3.75\times10^{6} & -2.94\times10^{6} & 1.96\times10^{6} & 9.79\times10^{5} & -8.18\times10^{5} \\
1.81\times10^{0} & -2.28\times10^{0} & 8.83\times10^{7} & 4.15\times10^{7} & -3.25\times10^{7} & 2.16\times10^{7} & 1.08\times10^{7} & -9.05\times10^{6}
\end{bmatrix}$$

求めたリカッチ方程式の解から，式(21)で示した制御入力$u(t)$のK_eを求めた結果を以下に示す．

$$K_e = [3.94\times10^{1} \quad -5.11\times10^{1} \quad 2.21\times10^{7} \quad 1.04\times10^{7} \quad -8.12\times10^{6} \quad 5.41\times10^{6} \quad 2.71\times10^{6} \quad 2.26\times10^{6}]$$

よって，式(22)で示した制御入力 は以下のようになる．

$$u(t) = -[3.94\times10^{1} \quad -5.11\times10^{1} \quad 2.21\times10^{7} \quad 1.04\times10^{7} \quad -8.12\times10^{6} \quad 5.41\times10^{6} \quad 2.71\times10^{6} \quad 2.26\times10^{6}]\zeta_e(t)$$

以上の数値例で MATX を使用して，数値シミュレーションを行う．

５．結言

本稿では，状態方程式に構造化された不確かさが存在するときのモデル追従形サーボ制御系の設計法を提案した．現段階の数値シミュレーションでは，何らかの原因により制御対象の出力が発散している．今後は制御対象の出力が，参照モデルの出力に漸近的に追従すること数値シミュレーションで確認したいと思う．

参考文献

(1) 藤森　篤 :「ロバスト制御」，コロナ社(2001)

(2) 古賀　雅伸 :「Linux・Windows でできる MATX による数値計算」，東京電機大学出版局(2000)

(3) 木村　英紀 :「ロバスト制御」，コロナ社(1994)