

## 積分型状態方程式表現によるむだ時間系のモデル追従形制御 Model Following Control for the Delay System by Integral-type State Equation

○奥山 工\*, 秋山 孝夫\*, 大久保 重範\*  
○Takumi Okuyama\*, Takao Akiyama\*, Shigenori Okubo\*

\*山形大学  
\*Yamagata University

キーワード：積分型状態方程式(Integral-type State Equation), モデル追従形制御(Model Following Control System),  
むだ時間(Time Delay), 定積分演算子(Definite Integral Operator), 微分演算子(Differential Operator)

連絡先：〒992-8510 山形県米沢市城南四丁目3-16 山形大学工学部機械システム工学科 秋山研究室  
奥山工, E-mail: okuyama\_ta93@yahoo.co.jp

### 1. 緒言

現代制御理論では、実システムを状態方程式で表現する。しかし状態方程式表現では、実システムにおける物理的・工学的現象と整合しない場合がある。それはつまり、状態方程式が実システムを表現するのに不十分であり、実際の物理的・工学的現象と整合性のよい数式表現が必要であると考えられる。

実際の物理的・工学的現象と整合性のよい数式表現の一つとして積分型状態方程式がある。通常の状態方程式では状態の時間微分によって状態の時間的変化を表現するのに対し、積分型状態方程式では状態の時間に関する積分を用いて状態の時間的変化を表現する。現代制御理論における制御系設計や特性の解析などは通常の状態方程式を用いて行われており、積分型状態方程式を用いたものは少ない。

そこで本稿では、積分型状態方程式で表現されたむだ時間系に対するモデル追従形制御系の設計法を提案する。まず、積分型状態方程式で表現されたむだ時間系の制御対象及び参照モデルを設定し、制御則の詳細な構成手順を示す。そして、外乱を考慮した具体的な数値例に対しシミュレーションを行い、制御対象の出力が参照モデルの出力に追従することを確認する。

### 2. 問題の設定

入出力と状態に任意のむだ時間を含む制御対象及び参照モデルをそれぞれ次式(1), (2)で表す。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t x(\tau) d\tau &= \sum_{i=0}^k A_i x(t-h_i) + \sum_{i=0}^k B_i u(t-h_i) \\ &\quad - \sum_{i=0}^k A_i x(-h_i) - \sum_{i=0}^k B_i u(-h_i) + d(t), \\ y(t) &= \sum_{i=0}^k C_i x(t-h_i) + \sum_{i=0}^k D_i u(t-h_i) + d_o(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m r_m(t), \\ y_m(t) &= C_m x_m(t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 $x(t) \in R^n$  は状態変数、 $u(t) \in R^l$  は制御入力、 $y(t) \in R^l$  は制御対象の出力、 $d(t) \in R^n$ 、 $d_o(t) \in R^l$  は有界な外乱、 $h_i (0 = h_0 < h_1 < \dots < h_k)$  はむだ時間、 $x_m(t) \in R^{n_m}$ 、 $r_m(t) \in R^{l_m}$ 、 $y_m(t) \in R^l$  はそれぞれ参照モデルに関する状態変数、参照入力、出力である。 $A_i, B_i, C_i, D_i, A_m, B_m, C_m$  はそれぞれ適合する次元の定数行列であり、 $(A_m, B_m)$  可制御、 $(C_m, A_m)$  可観測、 $A_m$  は安定行列とする。制御対象で利用可能な状態は $y(t)$ のみであり、内部状態は直接入手できないものとする。また、 $d(0) = 0$  とし、制御対象と参照モデルの出力誤差 $e(t)$ は次式で与えられる。

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (3)$$

寺され、  
三形制

### 3. 制御系の設計

制御対象(1)式の記述を簡単にするために、次式で定義されるむだ時間作用素ベクトル $\sigma$ を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= [\sigma_0 \ \sigma_1 \ \cdots \ \sigma_k]^T, \\ \sigma_i &= e^{-ph_i}, \\ \sigma_i z(t) &= z(t-h_i) \end{aligned} \right\} (i=0,1,\dots,k) \quad (4)$$

ただし、 $h_0=0$ より $\sigma_0=1$ であり、実際のむだ時間作用素は $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ である。(4)式を利用して制御対象(1)式を書き換えれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t x(\tau) d\tau &= A(\sigma)x(t) + B(\sigma)u(t) + \tilde{d}(t), \\ \left( \tilde{d}(t) &= -A(\sigma)x(0) - B(\sigma)u(0) + d(t) \right), \\ y(t) &= C(\sigma)x(t) + D(\sigma)u(t) + d_o(t) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} A(\sigma) &= \sum_{i=0}^k A_i \sigma_i, \quad B(\sigma) = \sum_{i=0}^k B_i \sigma_i, \\ C(\sigma) &= \sum_{i=0}^k C_i \sigma_i, \quad D(\sigma) = \sum_{i=0}^k D_i \sigma_i \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

である。

(5)式において定積分演算子を $p^{-1}(=\int_0^t dt)$ とおくと制御対象の出力 $y(t)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} y(t) &= \left\{ C(\sigma)[p^{-1}I - A(\sigma)]^{-1}B(\sigma) + D(\sigma) \right\} u(t) \\ &\quad + C(\sigma)[p^{-1}I - A(\sigma)]^{-1}\tilde{d}(t) + d_o(t) \end{aligned} \quad (7)$$

また、(2)式において微分演算子を $p(=d/dt)$ とおくと参照モデルの出力 $y_m(t)$ は次のようになる。

$$y_m(t) = C_m[pI - A_m]^{-1}B_m r_m(t) \quad (8)$$

(7)、(8)式において、

$$\left. \begin{aligned} C(\sigma)[p^{-1}I - A(\sigma)]^{-1}B(\sigma) + D(\sigma) &= N_L(\sigma, p^{-1})/D_L(\sigma, p^{-1}), \\ N_L(\sigma, p^{-1}) &= C(\sigma)\text{adj}[p^{-1}I - A(\sigma)]B(\sigma) + [p^{-1}I - A(\sigma)]D(\sigma), \\ D_L(\sigma, p^{-1}) &= [p^{-1}I - A(\sigma)] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} C_m[pI - A_m]^{-1}B_m &= N_m(p)/D_m(p), \\ N_m(p) &= C_m \text{adj}[pI - A_m]B_m, \\ D_m(p) &= [pI - A_m] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

とおくと、それぞれ(11)、(12)式のようになる。また、外乱はまとめて(13)式のようになる。

$$D_L(\sigma, p^{-1})y(t) = N_L(\sigma, p^{-1})u(t) + w(t) \quad (11)$$

$$D_m(p)y_m(t) = N_m(p)r_m(t) \quad (12)$$

$$w(t) = C(\sigma)\text{adj}[p^{-1}I - A(\sigma)]\tilde{d}(t) + D_L(\sigma, p^{-1})d_o(t) \quad (13)$$

設計の都合上、 $N_L(\sigma, p^{-1})$ 、 $N_m(p)$ を次式の形式で表す。

$$\left. \begin{aligned} N_L(\sigma, p^{-1}) &= \text{diag}[p^{-\eta_i}]N_{L_r}(\sigma) \\ &\quad + \tilde{N}_L(\sigma, p^{-1}), \\ N_{L_r}(\sigma) &= \bar{N}_{L_r}(\sigma) + \check{N}_{L_r} \end{aligned} \right\} (i=1,2,\dots,l) \quad (14)$$

$$N_m(p) = \text{diag}[p^{\eta_{m_i}}]N_{m_r} + \tilde{N}_m(p), (i=1,2,\dots,l) \quad (15)$$

$-\eta_i$ は $N_L(\sigma, p^{-1})$ の $p$ に関する行次数で $\eta_{m_i}$ は $N_m(p)$ の行次数である。また、 $\partial_{r_i}\tilde{N}_L(\sigma, p^{-1}) < \eta_i$ 、 $\partial_{r_i}\tilde{N}_m(p) < \eta_{m_i}$ ( $\partial_{r_i}(\ast)$ は $(\ast)$ の $p$ に関する行次数を表す)である。 $\check{N}_{L_r}$ は $l \times l$ の定数行列であり、 $|\check{N}_{L_r}| \neq 0$ である。また、外乱 $\tilde{d}(t)$ 、 $d_o(t)$ は次式を満たすものとする。

$$\left. \begin{aligned} D_d(p)\tilde{d}(t) &= 0, \\ D_d(p)d_o(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$D_d(p)$ は既知でモニクな多項式であり、外乱のモードを与える。したがって、 $w(t)$ は次式を満たす。

$$D_d(p)w(t) = 0 \quad (17)$$

次に、以下の2つの条件を満たすような $T(\sigma, p)$ を選び、(18)式より $R(p)$ 、 $S(\sigma, p)$ を求める。

これと同じである

$$T(\sigma, p)D_m(p) = D_d(p)D_L(\sigma, p^{-1})R(p) + S(\sigma, p) \quad (18)$$

ここで、 $p$ に関する各多項式の次数は、

$$\begin{aligned} \partial T(\sigma, p) &= \rho, \\ \partial D_m(p) &= n_m, \\ \partial D_d(p) &= n_d, \\ \partial D_L(\sigma, p) &= -n_L, \\ \partial R(p) &= \rho + n_m - n_d + n_L, \\ \partial S(\sigma, p) &< n_d - n_L \end{aligned}$$

である。

(3), (11), (12), (14), (17), (18)式より出力誤差 $e(t)$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} T(\sigma, p)D_m(p)e(t) &= \{D_d(p)R(p)N_L(\sigma, p^{-1}) \\ &\quad - Q(p)N_{L_r}(\sigma)\}u(t) \\ &\quad + Q(p)\{\bar{N}_{L_r}(\sigma) + \dot{N}_{L_r}\}u(t) \\ &\quad + S(\sigma, p)y(t) \\ &\quad - T(\sigma, p)N_m(p)r_m(t) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $Q(p)$ は $|Q(p)|$ が安定多項式であるような多項式行列であり、次式のように表す。

$$Q(p) = \text{diag}[p^{\rho+n_m+n_L-\eta_i}] + \tilde{Q}(p), \quad (i=1,2,\dots,l) \quad (20)$$

ただし、 $\partial_{r_i}\tilde{Q}(p) < \rho + n_m + n_L - \eta_i$  である。

(19)式において $T(\sigma, p)D_m(p)e(t) = 0$ となるように(19)式の右辺を0とおけば $u(t)$ は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} u(t) &= -\dot{N}_{L_r}^{-1}\bar{N}_{L_r}(\sigma)u(t) \\ &\quad - \dot{N}_{L_r}^{-1}Q(p)^{-1}\{D_d(p)R(p)N_L(\sigma, p^{-1}) \\ &\quad \quad - Q(p)N_{L_r}(\sigma)\}u(t) \\ &\quad - \dot{N}_{L_r}^{-1}Q(p)^{-1}S(\sigma, p)y(t) \\ &\quad + \dot{N}_{L_r}^{-1}Q(p)^{-1}T(\sigma, p)N_m(p)r_m(t) \end{aligned} \quad (21)$$

(21)式の各行列要素の分数式がプロパーであるためには次の2つの条件を満たさなければならない。

- ①  $\rho \geq n_d - 2n_L - n_m + \eta_i - 1, (i=1,2,\dots,l)$
- ②  $n_m - \eta_{m_i} \geq \eta_i - n_L, (i=1,2,\dots,l)$

さらに、次の関係式

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_{L_r}^{-1}\bar{N}_{L_r}(\sigma) &= J_0(\sigma), \\ \dot{N}_{L_r}^{-1}Q(p)^{-1}\{D_d(p)R(p)N_L(\sigma, p^{-1}) - Q(p)N_{L_r}(\sigma)\} \\ &= H_1(\sigma)[pI - F_1]^{-1}G_1, \\ \dot{N}_{L_r}^{-1}Q(p)^{-1}S(\sigma, p) \\ &= J_2(\sigma) + H_2(\sigma)[pI - F_2]^{-1}G_2, \\ \dot{N}_{L_r}^{-1}Q(p)^{-1}T(\sigma, p)N_m(p) \\ &= J_3(\sigma) + H_3(\sigma)[pI - F_3]^{-1}G_3 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= F_1\xi_1(t) + G_1u(t), \\ \dot{\xi}_2(t) &= F_2\xi_2(t) + G_2y(t), \\ \dot{\xi}_3(t) &= F_3\xi_3(t) + G_3r_m(t), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$|pI - F_i| = |Q(p)|, \quad (i=1,2,3) \quad (24)$$

を利用すれば、(21)式は次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} u(t) &= -J_0(\sigma)u(t) - H_1(\sigma)\xi_1(t) \\ &\quad - J_2(\sigma)y(t) - H_2(\sigma)\xi_2(t) + u_m(t) \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、外生信号 $u_m(t)$ は

$$u_m(t) = J_3(\sigma)r_m(t) + H_3(\sigma)\xi_3(t) \quad (26)$$

である。

(25)式の $u(t)$ は $e(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ を満足するから、制御系を構成する内部状態が有界であればモデル追従形制御系が実現できる。

#### 4. 数値例

数値例として、次のような入力と出力にむだ時間を含む簡単なシステムに対してモデル追従形制御系を設計する。

$$\left. \begin{aligned} & + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t-h_1) - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(0) \\ & - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(0) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(-h_1) + d(t), \\ \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-h_2) \\ & + 2u(t) + u(t-h_3) + d_o(t) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

制御対象(27)式をむだ時間作用素ベクトルを用いて表すと,

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t x(\tau) d\tau &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2+\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ & - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(0) - \begin{bmatrix} 2+\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(0) + d(t), \\ \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 5+\sigma_2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2+\sigma_3 \end{bmatrix} u(t) + d_o(t) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

となる. 初期値関数は

$$\left. \begin{aligned} x_0(t) &= [0.1 \quad 0.5]^T, (t \leq 0), \\ u_0(t) &= 0, (t < 0), \\ \xi_i^0(t) &= [0 \quad 0 \quad 0]^T, (i=1,2), (t \leq 0) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

であり, 外乱はステップ外乱で,

$$\left. \begin{aligned} d(t) &= [0.9 \quad 0]^T, (11 \leq t \leq 24), \\ d_o(t) &= 0.7, (35 \leq t \leq 51) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

とする. また, 参照モデルは

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x_m(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_m(t), \\ y_m(t) &= [2 \quad 1] x_m(t) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

であり, 参照入力

$$r_m(t) = 4 \sin 0.5t + 8 \quad (32)$$

である. 初期値は

$$x_m(0) = \xi_3(0) = 0 \quad (33)$$

とする.

まず, (9), (10)式より  $N_L(\sigma, p^{-1}), D_L(\sigma, p^{-1}), N_m(p), D_m(p)$  を求める.

$$\left. \begin{aligned} N_L(\sigma, p^{-1}) &= (4 + \sigma_1 + \sigma_3) \\ & + (14 + 5\sigma_1 + 2\sigma_2 + 2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2) p^{-1} \\ & + (2 + \sigma_3) p^{-2}, (\eta_1 = 0), \\ \\ \left. \begin{aligned} N_{L_r}(\sigma) &= 4 + \sigma_1 + \sigma_3, \\ \bar{N}_{L_r}(\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_3, \\ \dot{N}_{L_r} &= 4 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$D_L(\sigma, p^{-1}) = 1 + 2p^{-1} + p^{-2}, (n_L = 0) \quad (35)$$

$$N_m(p) = p + 2, (\eta_{m1} = 1) \quad (36)$$

$$D_m(p) = p^2 + 5p + 6, (n_m = 2) \quad (37)$$

次に, 条件に合うように

$$D_d(p) = p^3, (n_d = 3) \quad (38)$$

$$T(\sigma, p) = p + 5, (\rho = 1) \quad (39)$$

と選び, (18)式より  $R(p), S(\sigma, p)$  を求めると次のようになる.

$$R(p) = 1 \quad (40)$$

$$S(\sigma, p) = 8p^2 + 30p + 30 \quad (41)$$

さらに,  $\rho + n_m + n_L - \eta_1 = 3$  であるから

$$Q(p) = (p + 2)^3 \quad (42)$$

と選び, (22)式より  $J_0(\sigma), J_2(\sigma), J_3(\sigma)$  および  $H_i(\sigma), (i=1,2,3)$  を求めると次のようになる.

$$J_0(\sigma) = 0.25(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (43)$$

$$H_1(\sigma) = \begin{bmatrix} -8 - 2\sigma_1 - 2\sigma_3 \\ -11.5 - 3\sigma_1 - 2.75\sigma_3 \\ -2.5 - 0.25\sigma_1 + 0.5\sigma_2 - \sigma_3 + 0.25\sigma_1\sigma_2 \end{bmatrix}^T \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} J_2(\sigma) &= 0, \\ H_2(\sigma) &= [7.5 \quad 7.5 \quad 2] \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} J_3(\sigma) &= 0, \\ H_3(\sigma) &= [2.5 \quad 1.75 \quad 0.25] \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

したがって制御入力

$$\begin{cases}
 -\begin{bmatrix} -11.5 - 3\sigma_1 - 2.75\sigma_3 \\ -2.5 - 0.25\sigma_1 + 0.5\sigma_2 - \sigma_3 + 0.25\sigma_1\sigma_2 \end{bmatrix} \xi_1(t) \\
 -\begin{bmatrix} 7.5 & 7.5 & 2 \end{bmatrix} \xi_2(t) + u_m(t), \\
 u_m(t) = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.75 & 0.25 \end{bmatrix} \xi_3(t)
 \end{cases} \quad (47)$$

あるいは,

$$\begin{cases}
 u(t) = -0.25\{u(t-h_1) + u(t-h_3)\} \\
 \quad + \begin{bmatrix} 8 & 11.5 & 2.5 \end{bmatrix} \xi_1(t) \\
 \quad + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0.25 \end{bmatrix} \xi_1(t-h_1) \\
 \quad - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \xi_1(t-h_2) \\
 \quad + \begin{bmatrix} 2 & 2.75 & 1 \end{bmatrix} \xi_1(t-h_3) \\
 \quad - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \xi_1(t-h_1-h_2) \\
 \quad - \begin{bmatrix} 7.5 & 7.5 & 2 \end{bmatrix} \xi_2(t) + u_m(t), \\
 u_m(t) = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.75 & 0.25 \end{bmatrix} \xi_3(t)
 \end{cases} \quad (48)$$

となる. この数値シミュレーション結果を図1に示す.

図1から, 制御対象の出力  $y(t)$  は参照モデルの出力  $y_m(t)$  に追従し, 出力誤差  $e(t)$  は漸近的に0に収束していることが確認できる. ステップ外乱が加わっている区間でも出力誤差は0に収束していることがわかる.

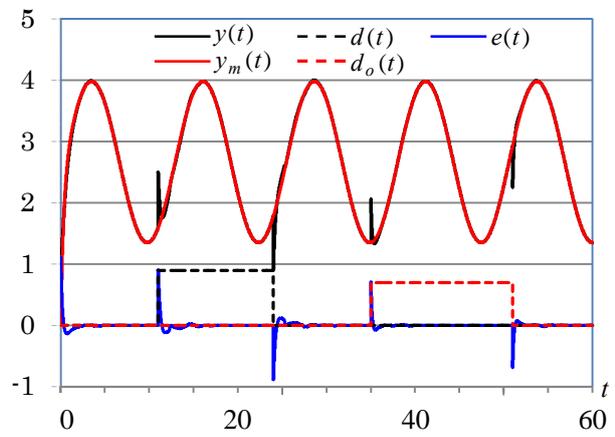


Fig.1 Responses of the system with time delays

### 5. 結言

本稿では, 積分型状態方程式で表現されたむだ時間システムに対してモデル追従形制御系の設計法を提案した. そして, 具体的な数値例に対して本設計法を適用し制御入力を求めた. その制御入力を用いて数値シミュレーションを行い, 外乱が加わっている区間でも制御対象の出力は参照モデルの出力に追従し, 出力誤差は漸近的に0に収束すること確認した.

### 参考文献

- [1] 小林 孝一 “物理的・工学的実情との整合性を考慮した新しい状態方程式” システム制御情報学会誌, Vol.52, No.11, pp.435-436, (2008)
- [2] 北森 俊行 “物理的・工学的実情と整合性のとれたモデリングの研究” 法政大学工学部研究集報, Vol.34, pp.19-25, (1998)
- [3] 秋山, 服部, 大久保 “むだ時間を含む系に関するモデル追従形制御系の設計” 電気学会論文誌, Vol.118-C, No.4, pp.497-502, (1998)
- [4] 渡辺 慶二 “むだ時間システムの制御” 計測自動制御学会, (1993)