

オブザーバ/カルマンフィルタ同定法による ヘリコプターシステムの同定実験

Identification experiment of helicopter system by observer/Kalman filter identification

○稲葉 健太, 佐藤 淳

○ Kenta Inaba, Atsushi Satoh

岩手大学

Iwate University

キーワード： システム同定 (system identification), オブザーバ (observer),
離散時間システム (discrete-time system), マルコフパラメータ (Malkov paramater)

連絡先： 〒 020-8551 岩手県盛岡市上田 4-3-5 岩手大学大学院 工学研究科 機械システム工学専攻
佐藤 淳, Tel: 019-621-6404, E-mail: satsushi@iwate-u.ac.jp

1. 諸言

システム同定とは、実システムの入出力データに基づき、そのシステムに最も近い数理モデルを推定する作業である。本研究で利用したオブザーバ/カルマンフィルタ同定法¹⁾(observer/Kalman filter identification:OKID 法)は、システム同定の手法のひとつであり、離散時間領域でシステムを同定するものである。OKID 法では、減衰率の小さなシステムに対して仮想的にデッドビート応答を持つオブザーバを構成し、計測データからオブザーバのマルコフパラメータを決定し、これを用いて本来の同定対象のマルコフパラメータを決定する。仮想的オブザーバのインパルス応答は、同定対象と比べ減衰が速いため、同定のために必要とするデータ量を少なくすることが可能になり、計算時間を大幅に減らすことができるという特徴がある。そのため、この手法

はシステムのリアルタイム同定や自動制御、航空機などの効率的なシステム同定のために発展してきた。

本研究ではこの OKID 法を将来的に UAV のシステム同定に応用することを目指し、実システムであるヘリコプター実験装置のシステム同定実験を行い、その有効性を確認することを目的とする。

2. 導入

2.1 連続時間システムの離散化

同定対象のシステムが物理系である場合、そのダイナミクスは連続時間システムで表されることが多い。連続時間システムは状態方程式で

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = C_c x(t) + D_c u(t) \quad (1b)$$

と表される。OKID法は対象システムを一定のサンプリング周期で離散化した離散時間システムを同定する手法である。式(1)のシステムに対し、0次ホールド入力 $u(t) = u_k, kT \leq t \leq (k+1)T$ を仮定し、サンプリング周期 T で離散化²⁾すると、

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2a)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (2b)$$

ただし

$$[A \ B] = [I \ 0] \exp \left\{ \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T \right\}$$

$$C = C_c, \quad D = D_c$$

2.2 オブザーバ/カルマンフィルタ同定法

式(2)の離散時間システムについて考える。ここで、 $x(k), y(k), u(k)$ はそれぞれ n, m, r の次元をもつ状態量、出力、入力ベクトルの時刻 $t = kT$ における値を表す。これは(2)式のシステムの解(3)式を用いて次のように書くことができる。

$$x(0) = 0$$

$$x(k) = \sum_{i=1}^k A^{i-1} Bu(k-i) \quad (3)$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^k CA^{i-1} Bu(k-i) + Du(k) \quad (4)$$

式(4)の $y(k)$ を行列形式で書くと

$$y := [y(0) \ y(1) \ y(2) \ \dots \ y(l-1)]$$

$$= YU \quad (5)$$

ただし、 Y と U はそれぞれ次のような行列である。

$$Y = [D \ CB \ CAB \ \dots \ CA^{l-2}B] \quad (6)$$

$$U = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & u(2) & \dots & u(l-1) \\ & u(0) & u(1) & \dots & u(l-2) \\ & & u(0) & \dots & u(l-3) \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & u(0) \end{bmatrix}$$

D, CB, CAB, \dots はマルコフパラメータであり、線形動的システムのすべてのダイナミクスの情報を含む行列である。

システム同定には、対象システムのモードのインパルス応答を十分に取得する必要があるが、減衰率が小さなシステムでは必要とするデータ数 l が多くなる。そのため行列のサイズが大きくなり、計算量が増加する。これを改善するために、OKID法では(2)式のシステムに対する仮想的オブザーバを構成し、入出力データに基づく仮想的オブザーバの同定を考える。

式(2a)の右辺にオブザーバの項 $Gy(k)$ を加減算することにより、仮想的オブザーバ((7)式)を構成する。

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Gy(k) - Gy(k)$$

$$= (A + GC)x(k)$$

$$+ (B + GD)u(k) - Gy(k)$$

$$= \bar{A}x(k) + \bar{B}v(k) \quad (7)$$

$$\bar{A} = A + GC, \quad \bar{B} = [B + GD \ -G], \quad v(k) = \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

G は $n \times m$ の任意の行列で、(2)式のシステムが可観測ならば、 \bar{A} の固有値は自由に配置できる。そこで、 \bar{A} を求めたいシステムの次数に応じたべき零行列とすればデッドビート応答が作られ、 $C\bar{A}^k\bar{B} = 0 \ (k \geq p)$ (p は求めるシステムの次数) となることが保証される。これにより $C\bar{A}^p\bar{B}$ 以降のマルコフパラメータは全て0となり、それ以降のデータは不要になるため計算量を軽減することができる。

また実際のシステム同定では、一般に初期値はゼロでないため、式(7)は次のように拡張される。

$$x(k+p) = \bar{A}x(k+p-1) + \bar{B}v(k+p-1) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &= \bar{A}^p x(k) + \bar{A}^{p-1} \bar{B}v(k) \\ &\quad + \bar{A}^{p-2} \bar{B}v(k+1) + \dots \\ &\quad \dots + \bar{B}v(k+p-1) \end{aligned}$$

$$y(k+p) = Cx(k+p) + Du(k+p) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &= C\bar{A}^p x(k) + C\bar{A}^{p-1} \bar{B}v(k) \\ &\quad + C\bar{A}^{p-2} \bar{B}v(k+1) + \dots \\ &\quad \dots + C\bar{B}v(k+p-1) + Du(k+p) \end{aligned}$$

(9) 式は、 $k = 0, \dots, l-1$ について以下のように書ける。

$$\bar{y} = C\bar{A}^p \bar{x} + \bar{Y}\bar{V} \quad (10)$$

$$\bar{y} = [y(p) \ y(p+1) \ \dots \ y(l-1)]$$

$$\bar{x} = [x(0) \ x(1) \ \dots \ x(l-p-1)]$$

$$\bar{Y} = [D \ C\bar{B} \ C\bar{A}\bar{B} \ \dots \ C\bar{A}^{(p-1)}\bar{B}]$$

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} u(p) & u(p+1) & \dots & u(l-1) \\ v(p-1) & v(p) & \dots & v(l-2) \\ v(p-2) & v(p-1) & \dots & v(l-3) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v(0) & v(1) & \dots & v(l-p-1) \end{bmatrix}$$

$D, C\bar{B}, C\bar{A}\bar{B}, \dots, C\bar{A}^{(p-1)}\bar{B}$ は仮想的オブザーバのマルコフパラメータ、 \bar{V} はシステム (2) の入出力から作られる行列である。式 (10) の右辺第一項について、 \bar{A}^p が十分に小さく x の全ての状態量が有界ならば、この項を無視して次のように近似することができる。

$$\bar{y} = \bar{Y}\bar{V} \quad (11)$$

実験データに基づき \bar{y} 、 \bar{V} は決まるので、(11) 式が解を持たない場合には最小二乗解 (12) を利用することにすれば、

$$\bar{Y} = \bar{y}\bar{V}^+ \quad (12)$$

ここで、 \bar{V}^+ は \bar{V} の擬似逆行列である。

オブザーバのマルコフパラメータ \bar{Y} の分割より、

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= [D \ C\bar{B} \ C\bar{A}\bar{B} \ \dots \ C\bar{A}^{(p-1)}\bar{B}] \\ &= [\bar{Y}_0 \ \bar{Y}_1 \ \bar{Y}_2 \ \dots \ \bar{Y}_p] \end{aligned}$$

$$\bar{Y}_0 = D$$

$$\bar{Y}_k = C\bar{A}^{(k-1)}\bar{B}$$

$$\begin{aligned} &= [C(A+GC)^{k-1}(B+GD) \\ &\quad - C(A+GC)^{k-1}G] \end{aligned}$$

$$= [\bar{Y}_k^{(1)} \quad -\bar{Y}_k^{(2)}] \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

(13) 式より、(2) 式のシステムと (7) 式のオブザーバのマルコフパラメータの間には次の関係性が成立する。

$$D = Y_0 = \bar{Y}_0 \quad (14)$$

$$Y_k = \bar{Y}_k^{(1)} - \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i^{(2)} Y_{(k-i)} \quad (k = 1, \dots, p) \quad (15)$$

$$Y_k = - \sum_{i=1}^p \bar{Y}_i^{(2)} Y_{(k-i)} \quad (k = p+1, \dots, \infty) \quad (16)$$

そこで (2) 式のシステムのマルコフパラメータを (14)~(16) 式に従い決定し、次のハンケル行列 H

$$H(k-1) = \begin{bmatrix} Y_k & Y_{k+1} & \dots & Y_{k+\beta-1} \\ Y_{k+1} & Y_{k+2} & \dots & Y_{k+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{k+\alpha-1} & Y_{k+\alpha} & \dots & Y_{k+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix} \quad (\alpha = \beta = p) \quad (17)$$

の特異値分解を利用すれば、(2) 式のシステムのパラメータは以下のように求まる。

$$\begin{aligned} H(0) &= R_n \Sigma_n S_n^T \\ \hat{A} &= \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} R_n^T H(1) S_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \\ \hat{B} &= \Sigma_n^{\frac{1}{2}} S_n^T E_r, \quad \hat{C} = E_m^T R_n \Sigma_n^{\frac{1}{2}} \\ E_m^T &= [I_m \quad O_m \quad \dots \quad O_m], \\ E_r^T &= [I_r \quad O_r \quad \dots \quad O_r] \end{aligned} \quad (18)$$

3. OKID 法によるシステム同定実験

3.1 実験装置

実験には図 1 の Quanser 社 2DOF ヘリコプターを使用した。これはピッチ軸とヨー軸の 2

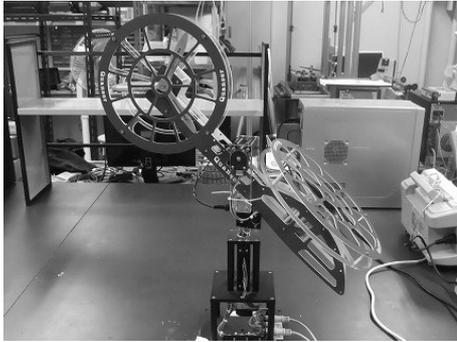


Fig. 1 Quanser 社 2DOF ヘリコプター

自由度を持った実験用ヘリコプター模型である。今回は一方の軸を固定し、ピッチ軸・ヨー軸それぞれ 1 入出力システムとして考えた。ピッチ軸まわりについて、入力ピッチモータへの入力電圧 V_θ 、出力はピッチ角 θ 、ヨー軸まわりについて入力ヨーモータへの入力電圧 V_λ 、出力はヨー角 λ とする (図 2)。

機体の剛体運動のダイナミクスは

$$(J_a + ml_g^2)\ddot{\varphi} + B_a\dot{\varphi} = T \quad (19)$$

(φ : 機体の回転角度、 T : 推進トルク、 J_a : 慣性モーメント、 m : 機体重量、 l_g : 重心から軸までの距離、 B_a : 粘性減衰係数) と表せる³⁾。モーターを含むアクチュエータのダイナミクスは

$$J_b\dot{\omega} + B_b\omega = \frac{K}{R}V \quad (20)$$

(ω : モーターの角速度、 V : モーターへの入力電圧、 J_b : 慣性モーメント、 B_b : 粘性減衰係数、 K : モーター定数、 R : モーターの内部抵抗) と表せる。また、プロペラから発生する推力はモーターの角速度 ω に比例するため、機体に働くトルク T との間に次の関係が成り立つ。

$$T = l_m K_\omega \omega \quad (21)$$

(l_m : モーターから機体軸までの距離、 K_ω : 比例定数)

よって同定対象のシステムを 4 次と仮定した。

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du \quad (22)$$

$$x = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \omega \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}, y = \varphi, u = V$$

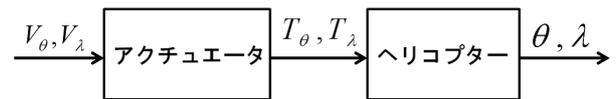


Fig. 2 実験装置の入出力

ここで、ピッチ軸まわりについては $\varphi = \theta, V = V_\theta$ 、ヨー軸まわりについては $\varphi = \lambda, V = V_\lambda$ である。

3.2 同定実験

3.2.1 ヨー軸まわりの同定

ヘリコプター実験装置のヨー軸まわりのダイナミクスについて同定実験を行った。入力 0 で機体が静止した状態からの入力電圧 V_λ とヨー角 λ を計測した。また、ヨー角は反時計まわりを正とする。サンプリング周期は 10/2048[s] とし計測し、その入力と応答を図 3(a)、3(b) に示す。計算には 5-40[s] の約 35[s] 間のデータを使用した。

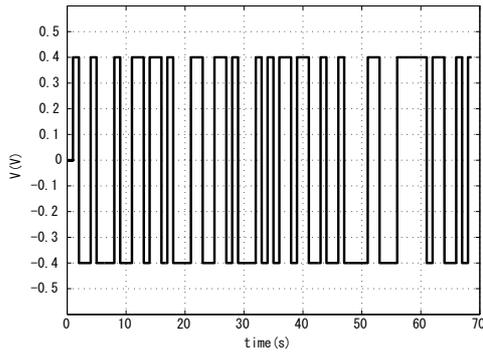
ハンケル行列の特異値は 0.0026, 0.0006, 0.0005, 0.0004 であった。4 次のモデルは以下のように同定される。

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4980 & 0.0336 & 0.4712 & 0.9932 \end{bmatrix}$$

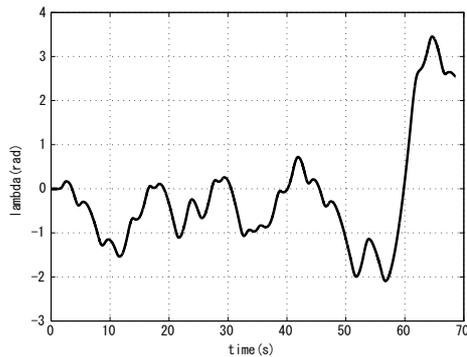
$$\hat{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.4501 & -0.1728 & -0.2918 & 0.1292 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D} = 0.0005$$



(a) 入力電圧



(b) ヨー角

Fig. 3 ヨーモーターへの入力電圧とヨー角の応答

また、 \hat{A} の固有値は $0.9999, 0.9823, -0.4945 \pm 0.5123i$ であった。

さらに、同定したモデルと実機に同じ入力を入れたときの応答の比較を図4に示す。

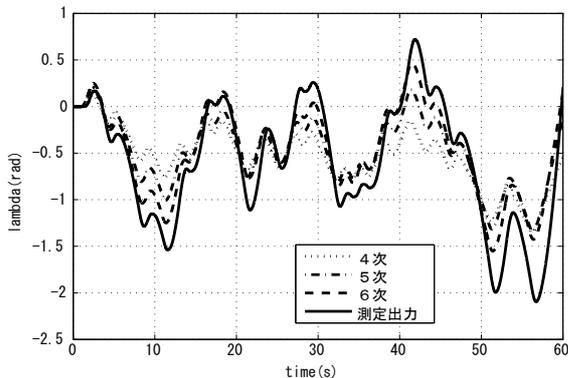
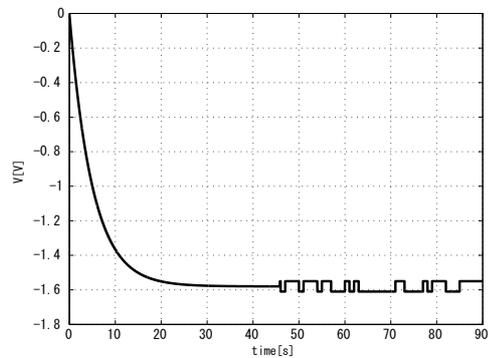


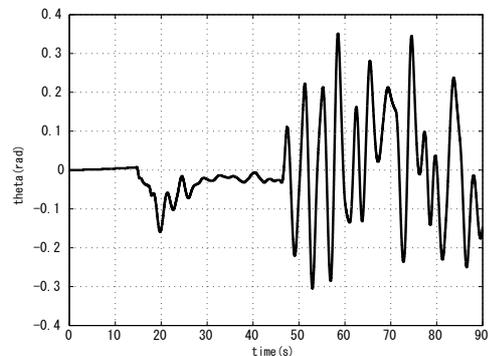
Fig. 4 測定出力と同定モデルの応答の比較

3.2.2 ピッチ軸まわりの同定

また、ヨー軸同様ピッチ軸まわりのダイナミクスについても同定実験を行った。あらかじめ水平のつり合い状態を作るため、ピッチモーターに一定入力を加えておく。つり合い静止状態を基準とし、そこからの入力電圧の差 V_θ とピッチ角の差 θ を計測した。また、ピッチ角は機首上向きを正とする。サンプリング周期は $10/2048[s]$ として計測し、その入力と出力を図5に示す。計算には $50-75[s]$ の約 $25[s]$ 間のデータを使用した。



(a) 入力電圧



(b) ピッチ角

Fig. 5 ピッチモーターへの入力電圧とピッチ角の応答

ハンケル行列の特異値は $0.0583, 0.0074, 0.0050, 0.0032$ であった。4次のモデルは以下のように同定される。

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4646 & 0.024 & 0.4223 & 1.018 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -0.0037 & 0.0005 & 0.0077 & -0.0063 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D} = 0.0078$$

また、 \hat{A} の固有値は $0.9959, 0.9724, -0.4725 \pm 0.504i$ であった。

実機と同定モデルに $-0.03[V]$ のステップ入力を加えた場合の応答の比較を図 6 に示す。

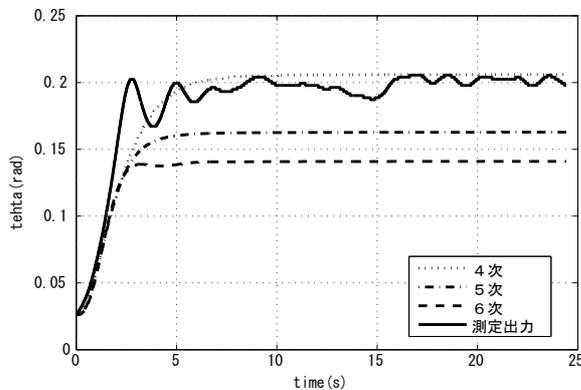


Fig. 6 測定出力と同定モデルの応答の比較

4. 結言

本研究では OKID 法の実システム同定における有効性を確認するために、ヘリコプター実験装置のシステム同定に適用した。OKID 法は離散時間システム同定のための手法の一つであるが、仮想的なデッドビートオブザーバを考慮することにより、減衰の小さなシステムの同定においても計算量を小さくできる特徴がある。同定対象はヘリコプター本体の剛体運動のダイナミクスにアクチュエータのダイナミクスを加えて 4 次以上のシステムと仮定して同定を行った。応答の比較より、ヨーでは 6 次、ピッチは 4 次のモデルが比較的良い一致を示した。

今後、多入出力系である 2 軸まわりの運動モデルについても同定を行う。また、同定モデル

を利用した姿勢安定化制御系の設計を行い、モデルの有効性について検討する。

参考文献

- 1) John Valasek and Wei Chen : Observer/Kalman Filter Identification for Online System Identification of Aircraft , Journal of Guidance, Control, and Dynamics Vol.26,No.2, March-April (2003)
- 2) K. Sugimoto : The Inverse Problem of Sampled-data LQ Control: An LMI Approach , The International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems (1996)
- 3) Quanser 2-DOF Helicopter Reference Manual