

除算法による逆システム同定の性能

Performance of the Inverse System Identification by the Long Division Method

○小松 洋貴 (岩手大・院), 西山 清 (岩手大)

○Hiroki Komatsu, Kiyoshi Nishiyama

岩手大学, Iwate University

キーワード: 逆システム (inverse system), 除算法 (long division method), 等化器 (equalizer)

連絡先: 〒020-8551 盛岡市上田4-3-5 岩手大学 工学部 情報システム工学科 西山研究室
西山清, Tel.: (019)621-6475, Fax.: (019)621-6475, E-mail: nishiyama@cis.iwate-u.ac.jp

1. はじめに

最近、メガネの有無によらない立体映像に関する発表が盛んになってきた。音響の分野でも古くから立体音響に関する試みが様々になされている。

立体音響のための録音方法の一つにバイノーラル録音がある。これは小型のマイクロホンにダミーヘッドやリアルヘッドの耳元に装着して録音する方法である。バイノーラル録音された音源をヘッドホンで聴取することにより、音源から両耳へ到達する方向情報、距離情報が録音時と同じように耳元に再現されるため、臨場感がそのまま再現できる。

バイノーラル録音した音源をスピーカで聴取する方法も考案されており、トランスオーラル再生と呼ばれている。録音信号を聴取者の両耳に再現するために、スピーカと聴取者の耳元との間の伝達系を補正する必要がある。具体的にはスピーカと両耳の伝達系の逆システムを求めることによりクロストークをキャンセルし、伝達特性を平坦に

する。これはスピーカ再生でもヘッドホンと同じ再生環境を構築することに相当する。トランスオーラル再生を実現するためには求める逆システムが正確なものである必要がある。

伝達特性が有限インパルス応答(FIR)フィルタで与えられた場合、その逆システムは無有限インパルス応答(IIR)フィルタであり不安定となることがある。そのため安定性を十分に考慮して設計しなければならない。

FIRフィルタはIIRフィルタに比べ次数は高くなるが常に安定であるという利点がある。FIRフィルタとして逆システムを近似するための手法として、デジタル通信の分野における等化器の設計法の一つである除算法を利用できる。等化器は伝送路による信号の歪みを補正するものであるから、等化器はすなわち伝送路の逆システムであると考えられる。

本発表では除算法による逆システム同定法について述べ、その性能を検証する。

2. FIRシステムの零点と逆システムの近似

いまFig. 1に示すインパルス応答をもつ順システム $H(z)$ が N 次FIRシステムとして与えられているとする。

$$H(z) = \sum_{i=0}^N h_i z^{-i} \quad (1)$$

N_0 をタップ係数が0でない最初のタップ位置、 N_p をピークの位置とする。また、この順システムの零点のうち単位円内に存在する零点の数を N_{zI} 、単位円外に存在する零点の数を N_{zO} とする。 $H(z)$ はテイラー展開、部分分数展開を用いて以下のように表せる。

$$H(z) = z^{-N_0} (1 + \tilde{a}_1 z^{-1}) \cdots (1 + \tilde{a}_{N_{zO}} z^{-1}) \times (1 + a_1 z^{-1}) \cdots (1 + a_{N_{zI}} z^{-1}) \quad (2)$$

$$= z^{-(N_0 + N_{zO})} \cdot \frac{(\tilde{a}_1^{-1} z + 1) \cdots (\tilde{a}_{N_{zO}}^{-1} z + 1)}{(\tilde{a}_1 \cdots \tilde{a}_{N_{zO}})^{-N_{zO}}} \times (1 + a_1 z^{-1}) \cdots (1 + a_{N_{zI}} z^{-1}) \quad (3)$$

$$= z^{-N_p} \cdot (h_{-N_{zO}} z^{N_{zO}} + \cdots + h_{-1} z + h_0 + h_1 z^{-1} + \cdots + h_{N_{zI}} z^{-N_{zI}}) \quad (4)$$

ただし、 $N_p = N_0 + N_{zO}$ である。ピーク位置を境に前半の発散成分と後半の収束成分に分けて表すことができる。

入力の加わった時刻から応答の現れるまでの時間が、サンプリング周期に比べて十分小さい場合には、 $N_0 = 0$ つまり $h_0 \neq 0$ として扱うことが適切である。

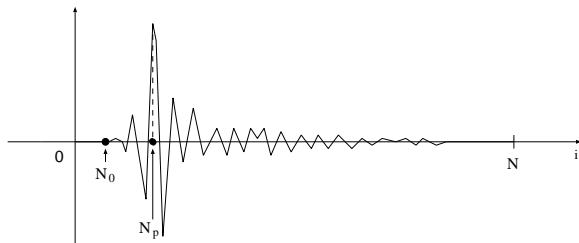


Fig. 1 順システムのインパルス応答

この順システムの逆システム $G(z)$ を考えると、以下の式で表されるように非因果的なIIRシステムとなる。Fig. 2に逆システムのインパルス応答を示す。

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{H(z)} \\ &= z^{N_p} \cdot \frac{(\tilde{a}_1 \cdots \tilde{a}_{N_{zO}})^{-N_{zO}}}{(\tilde{a}_1^{-1} z + 1) \cdots (\tilde{a}_{N_{zO}}^{-1} z + 1)} \\ &\quad \times \frac{1}{(1 + a_1 z^{-1}) \cdots (1 + a_{N_{zI}} z^{-1})} \quad (5) \\ &= z^{N_p} \cdot (\cdots + g_{-1} z + g_0 + g_1 z^{-1} + \cdots) \quad (6) \end{aligned}$$

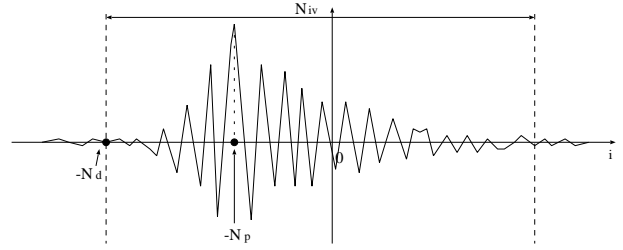


Fig. 2 逆システムのインパルス応答

この逆システムがFIRシステムとして近似されるためには、タップ数 N_{iv} を両端の係数値が無視できるほどまで正負両方向に十分大きくとり、さらに因果性のためにその負方向の時間分だけ遅延時間 N_d を与える必要がある。

説明のためFig. 3に示されるデジタル信号系を考える。図より

$$X(z) = H(z)U(z) \quad (7)$$

$$Y(z) = G(z)X(z) = G(z)H(z)U(z) \quad (8)$$

であり、遅延時間 $N_d \geq 0$ を適当な整数として与え、 $G(z)H(z) = z^{-N_d}$ が成り立つならば、 $Y(z) = z^{-N_d}U(z)$ から $y(t) = u(t - N_d)$ が得られる。すなわ

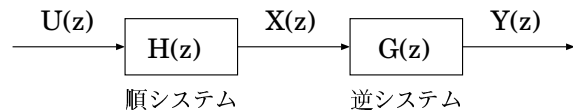


Fig. 3 デジタル信号系

ち、逆システム $G(z)$ 通過後には送信信号 $u(t)$ が遅延時間 N_d だけ遅れて完全に再現される。したがって、雑音が無視できる場合には

$$G(z) = \frac{z^{-N_d}}{H(z)} \quad (9)$$

によって $G(z)$ を与えれば、望ましい結果が得られることが期待される。

N_d を適当に選べば式(9)の $G(z)$ は因果的となるが、 $H(z)$ が単位円外に零点をもつときには式(5)から $G(z)$ は単位円外の極をもち不安定である。この場合は逆システムを使用することができないので、安定な近似逆システムを求めることとなる。

$H(z)$ の零点が単位円内にあり $G(z)$ が因果的である場合でも、式(9)の逆システムはIIRフィルタである。FIRフィルタとしたい場合には、式(9)をなんらかの方法で近似する必要がある。

3. 除算法

3.1 概要

デジタル通信用等化器の設計法の一つに除算法がある。Fig. 3をデジタル通信系とするならば、図中の順システムを伝送路、逆システムを等化器と置き換えて考えられる。除算法を利用することにより式(9)を近似的に非再帰型すなわちFIRフィルタとして求めることができる。以下、 N_d 遅れ非再帰型近似逆システムを求める方法を述べる。

逆システムの因果性を明確にするために、 $t < 0$ のときには $u(t) = x(t) = y(t) = 0$ であるとして

$$G(z) = \sum_{i=0}^m g_i z^{-i}, \quad H(z) = \sum_{j=0}^n h_j z^{-j} \quad (10)$$

と置く。

$N_d = 0$ のときを考え、合成システム $G(z)H(z) = 1$ を満たす $G(z)$ を求める。

$$\begin{aligned} G(z)H(z) &= (g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots) \\ &\quad \times (h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} g_0 h_0 &= 1 \\ g_0 h_1 + g_1 h_0 &= 0 \\ g_0 h_2 + g_1 h_1 + g_2 h_0 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (12)$$

となり、これより

$$\begin{aligned} g_0 &= 1/h_0 \\ g_1 &= -g_0 h_1 / h_0 \\ g_2 &= -(g_0 h_2 + g_1 h_1) / h_0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (13)$$

が得られ、 $G(z)$ の係数が順次決定されてゆく。 $g_0 = 1/h_0$ とすれば $i \geq 1$ では

$$g_i = - \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i \\ h_{i-1} \\ \vdots \\ h_1 \end{bmatrix} / h_0 \quad (14)$$

と書ける。ただし $i > n$ ならば $h_i = 0$ とする。本発表ではこれを除算とする。

$N_d \geq 1$ として式(14)に遅延時間 N_d を与えるならば $G(z)H(z) = z^{-N_d}$ より

$$g_i = \begin{cases} 0 & (0 < i < N_d) \\ 1/h_0 & (i = N_d) \\ - \begin{bmatrix} g_{N_d} & g_{N_d+1} & \dots & g_{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{i-N_d} \\ h_{i-N_d-1} \\ \vdots \\ h_1 \end{bmatrix} / h_0 & (i \geq N_d) \end{cases} \quad (15)$$

とする。

動的システムでは入力に加わった瞬間には応答できないものが多いが、その場合には $h_0 = 0$ で式(14),(15)は実現できない。

タップ係数が0でない最初のタップ N_0 を用いて $h_j = 0$ ($j = 0, \dots, N_0 - 1$)のとき、 $N_d \geq N_0$ とすれ

ば $G(z)$ を求めることができる。

$$g_i = \begin{cases} 0 & (0 < i < N'_d) \\ 1/h_{N_0} & (i = N'_d) \\ - \begin{bmatrix} g_{N'_d} & g_{N'_d+1} & \cdots & g_{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{i-N'_d} \\ h_{i-N'_d-1} \\ \vdots \\ h_{N_0+1} \end{bmatrix} / h_{N_0} & (i \geq N'_d) \end{cases}$$

ただし、 $N'_d = N_d - N_0$ である。この除算により得られる逆システムは因果的である。

$N \geq 0$ を適当な整数として、 $H(z)$ に z^N を掛ければ

$$\begin{aligned} D(z) &\triangleq z^N H(z) \\ &= d_{-N} z^N + \cdots + d_0 + \cdots + d_{n-N} z^{N-n} \end{aligned} \quad (16)$$

が成り立ち、 $d_0 = h_N$ である。一般に、 h_N がピーク値となるように $N = N_p$ が選ばれる。除算によって得られた z と z^{-1} に関する級数で、 z についての最高次を M とすれば、この級数に z^{-M} を掛けることによって因果的で安定な近似逆システムが得られ $N_d = M + N$ である。

i 番目の除算における商を $Q_i(z)$ 、剰余を $R_i(z)$ とすれば、 $i = 1$ のとき

$$Q_1(z) = \frac{1 - R_1(z)}{D(z)} = \frac{1 - R_1(z)}{z^N H(z)} \quad (17)$$

となり、 $R_1(z)$ はたかだか n 項の多項式である。

$H(z)$ の零点がすべて単位円内にあれば $1/H(z)$ は安定であり、十分長い除算を行えば $R_1(z)$ の係数をいくらでも小さくすることができる。すなわち、 $Q_1(z)$ の項数を十分多くすれば

$$Q_1(z) \cong \frac{z^{-N}}{H(z)} \quad (18)$$

が成り立つ。この場合には、 $N = N_d$ と置けば $H(z)$ の逆システム $G(z)$ は

$$G(z) = Q_1(z) \cong \frac{z^{-N_d}}{H(z)} \quad (19)$$

で与えられる。

$H(z)$ が単位円外に零点を持つ場合には、除算を続けていけば $R_1(z)$ が十分大きな係数を持つようになるので、1つの係数 r が $|r| > R_{max}$ を満たすまで除算を行う。 $R_1(z)$ に対して1を無視すれば、式(17)から

$$\frac{z^{-N}}{H(z)} \cong Q_1(z) \frac{-1}{R_1(z)} \quad (20)$$

$-1/R_1(z)$ に同様のことを行えば

$$\frac{z^{-N}}{H(z)} \cong Q_1(z) \frac{Q_2(z)}{1 - R_2(z)} \quad (21)$$

となり、 $R_2(z)$ は $(n-1)$ 項以下の多項式である。ここで、 $Q_1(z)Q_2(z)$ における z の最高次を M として $N_d = M + N$ と置けば、 $R_2(z)$ の係数が十分小さいときには

$$G(z) \triangleq z^{-M} Q_1(z) Q_2(z) \cong \frac{z^{-N_d}}{H(z)} \quad (22)$$

$R_2(z)$ の係数の中に少なくとも1つ大きなものが含まれていけば

$$\frac{z^{-N}}{H(z)} \cong Q_1(z) Q_2(z) \frac{-1}{R_2(z)} \quad (23)$$

となるので、以下同様の操作を続ければよい。特に、式(23)で $R_2(z) = r$ の場合には

$$G(z) \triangleq z^{-M} Q_1(z) Q_2(z) \frac{-1}{r} \cong \frac{z^{-N_d}}{H(z)} \quad (24)$$

となる。除算の回数とともに $R_i(z)$ の項数は少なくとも1つずつ減少してくるので、有限回の除算で計算は終了する。

3.2 設計アルゴリズム

Step 1 除算によって $1/D(z)$ を展開する。剰余多項式 $R_i(z)$ のすべての係数 r が絶対値で R_{min} 以下になるか、少なくとも1つの $|r|$ が R_{max} より大きくなるまで除算を続ける。ただし、 R_{max} と R_{min} はあらかじめ与えられた定数である。

Step 2 少なくとも1つの $|r|$ が R_{max} を満たす場合には、つぎのようにして $Q_i(z)$ と $R_i(z)$ を修正する。

(a) 商を z の多項式で表して、 $\bar{Q}_i(z)$ を

$$\bar{Q}_i(z) = -\frac{1}{r_1}(q_1 z^{j-k} + \dots + q_j z^{1-k}) \quad (25)$$

で定義する。ただし、 r_1 は剰余多項式 $R_i(z)$ の最初の項の係数であり、 q_l ($l = 1, 2, \dots, j$)は $Q_i(z)$ の係数、 k は約数多項式の z に関する最高次を表している。

(b) 剰余多項式を最初の項に関して正規化し

$$\bar{R}_i(z) = 1 + \frac{r_2}{r_1}z^{-1} + \dots + \frac{r_{n-1}}{r_1}z^{-n+2} \quad (26)$$

と置く。ただし、 n は前回の剰余多項式の項数である。

(c) ここで得られた $\bar{Q}_i(z)$ と $\bar{R}_i(z)$ を改めて $Q_i(z), R_i(z)$ と置く。

Step 3 除算によって $1/R_i(z)$ を計算する。このときの剰余多項式が十分大きな係数を持つ場合には、 $k = 0$ としてStep 2へ戻る。

Step 4 すべての係数 $|r_l|$ が十分小さくなるか、あるいは剰余多項式が大きな係数を持つ1つの項だけになったときには、計算を終了する。

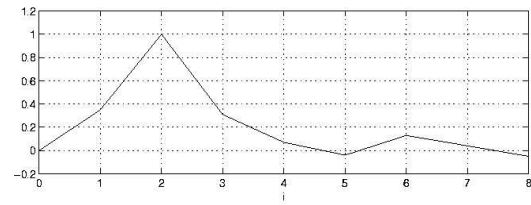
Step 5 求める近似逆システムはすべての商多項式と遅れ z^{-M} の積である。

4. 性能評価

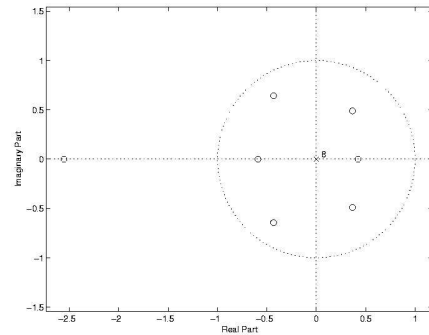
4.1 除算法による逆システムの算出

上記のアルゴリズムをmatlabにより実装し近似逆システムを推定した。順システムはFig. 4に示すインパルス応答をもつとする。順システムと逆システムの畳み込みは合成システムのインパルス応答を表し、デルタ関数であることが望まれる。さらに合成システムの周波数特性を見ることにより除算法による逆システムの同定性能を評価する。

$R_{\max} = 50, R_{\min} = 0.05$ とした場合に得られた近似逆システムと零点、順システムと逆システム



(a) 順システムのインパルス応答 h_i



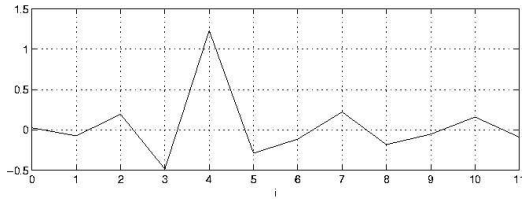
(b) 順システムの零点の分布

Fig. 4 順システムのインパルス応答と零点; タップ数 $N = 9$ であり、単位円外に零点を1つもつ

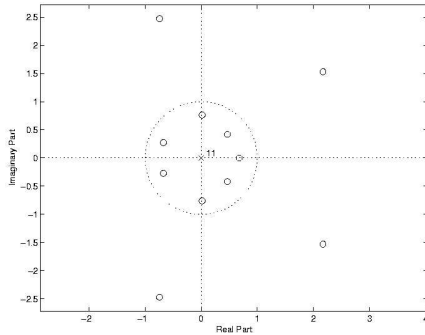
の畳み込みとその周波数特性をFig. 5に示す。Fig. 5(c)を見ると概ね遅延 $N_d = 6$ をもつデルタ関数形となっているが、後半部分に見て分かる程度の値をもつ。この振幅特性(d)は $-0.6643 \sim 0.5945$ (dB)の範囲で波打っている。

4.2 パラメータによる影響

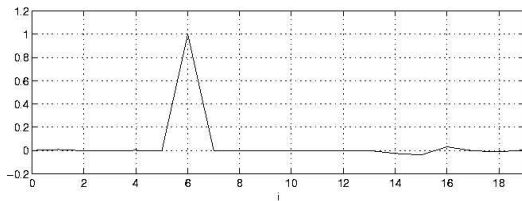
逆システムの近似精度を上げるために $R_{\max} = 50, R_{\min} = 0.01$ として剰余多項式の係数判定パラメータを小さく設定し、終了条件を厳しくした場合の結果をFig. 6に示す。この場合、推定された近似逆システムのタップ数 $N_i v$ は多くなるが合成システムのインパルス応答はよりデルタ関数に近くなっていることがわかる。また、合成システムの振幅特性は $-0.1680 \sim 0.1910$ (dB)でありフラットになっている。近似精度とタップ数はトレードオフの関係である。パラメータを小さく設定することにより算出される近似逆システムのタップ数は長くなるが、それと引き換えに高精度な近似逆システムを得られる。



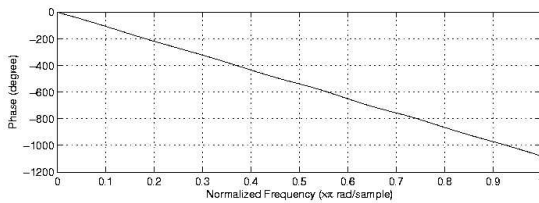
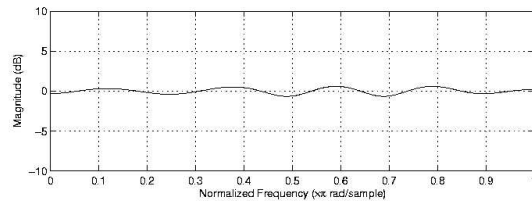
(a)除算法により得られた
近似逆システムのインパルス応答 \hat{h}_i^{-1}



(b)近似逆システムの零点の分布

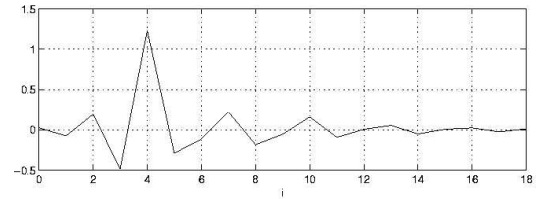


(c) h_i と \hat{h}_i^{-1} の畳み込み：
合成システムのインパルス応答

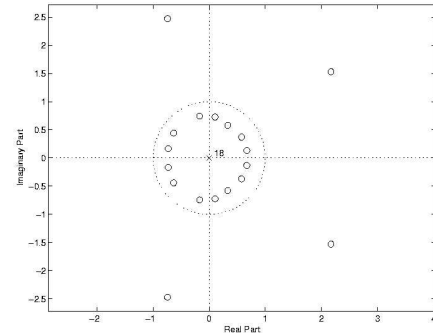


(d)合成システムの周波数特性；
振幅特性(上)と位相特性(下)

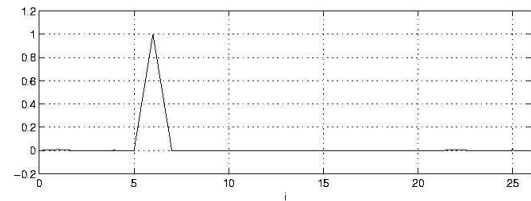
Fig. 5 除算法による逆システムの算出；
 $R_{\max} = 50, R_{\min} = 0.05$, (a)より近似逆システムの
タップ数は $N_{iv} = 12$ であり、(c)よりシステム全体
では遅延 $N_d = 6$ となる



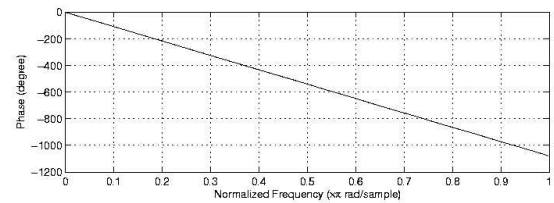
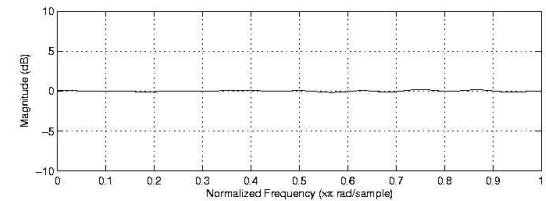
(a)除算法により得られた
近似逆システムのインパルス応答 \hat{h}_i^{-1}



(b)近似逆システムの零点の分布



(c) h_i と \hat{h}_i^{-1} の畳み込み：
合成システムのインパルス応答



(d)合成システムの周波数特性
振幅特性(上)と位相特性(下)

Fig. 6 除算法による逆システムの算出；
 $R_{\max} = 50, R_{\min} = 0.01$, (a)より近似逆システムの
タップ数は $N_{iv} = 19$ であり、(c)よりシステム全体
では遅延 $N_d = 6$ となる

5. おわりに

本発表では、デジタル通信用の等化器に使われる除算法を利用することにより逆システムをFIRシステムとして近似する方法について述べた。さらに除算法を実装して逆システムを算出し、良好な近似逆システムが得られることを確認した。

しかし、この除算法は順システムの伝達関数が既知である場合に使用可能であり、さらに雑音を考慮できないことから使用が限られる。伝達関数が未知の場合に逆システムを求めるには、適応フィルタを用いた逆システムの同定となる。これは観測信号からシステムを推定する方法であるから雑音を考慮することもできる。

適応フィルタによる逆システムの同定の場合にも遅延時間は重要なファクターであることから、除算法は最適な遅延時間を知ることができるという点で有用であるといえる。

参考文献

- 1) 谷荻 隆嗣: “デジタル信号処理の理論 2”, コロナ社, 1985.
- 2) 西山 清: “最適フィルタリング”, 培風館, 2001