

積分型状態方程式によるモデル追従型 サーボコントローラ的设计

Design of the Model Following Servo Controller by Integral-type State Equations

○岩崎 郁弥*, 秋山 孝夫*, 大久保 重範*

○IWAZAKI Fumiya*, AKIYAMA Takao*, OKUBO Shigenori*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード：モデル追従型制御(Model Following Control System), 積分型状態方程式(Integral-type State Equation), サーボ制御(Servo Control), モデル追従型制御(Model Following Control System)

連絡先：〒992-8510 山形県米沢市城南四丁目 3-16 山形大学工学部機械システム工学科 秋山研究室
岩崎 郁弥 E-mail: iwazaki_f@yahoo.co.jp

1. 諸言

現代社会において、制御工学は様々な分野において幅広く使用されており、そこで使用される制御理論の大部分は状態方程式を微分型で表現したものである。しかし、そのような従来の状態方程式では実際の現象との整合性が取れない場合がある。よって、実システムをより正しく表現するための数式モデル表現が必要であると考えられる。

実際の物理的・工学的現象と整合性のよい数式表現の一つとして積分型状態方程式がある。従来の状態方程式は状態の時間微分によって状態の時間的変化を表現したもののだが、積分型状態方程式は状態の時間に関する積分を用いて状態の時間的変化を表現したものである。

そこで本研究では、積分型状態方程式表現を用いてモデル追従型サーボコントローラを設計し、シミュレーションを行うことで有用性についての考察を行う。

2. 問題の設定

制御対象を式(1), (2)で表す。

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = Ax(t) + Bu(t) - Ax(0) - Bx(0) + \tilde{d}(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + d_0(t) \quad (2)$$

ここで、 $x(t) \in R^n$ は状態変数、 $u(t) \in R^l$ は制御入力、 $y(t) \in R^l$ は制御対象の出力、 $\tilde{d}(t) \in R^n$ 、 $d_0(t) \in R^l$ は有界な外乱であり、 (A, B) および (A, C) は可制御、可観測であるとする。

出力が追従すべき規範モデルを次のようにおく。

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u_r(t) \quad (3)$$

$$y_r(t) = C_r x_r(t) \quad (4)$$

式(3), (4)において、

$x_r \in R^k$ … 状態変数

$u_r \in R^l$ … 参照入力

$y_r \in R^l$ … 出力ベクトル

A_r, B_r, C_r … 適当な次元の定数行列

u_r … 定数ベクトル

とする。また、規範モデルは可制御、可観測、漸近安定とする。

出力誤差を式(5)のように定義する。

$$e(t) = y(t) - y_r(t) \quad (5)$$

3. 制御系の設計

式(1), (2)において, $|A| \neq 0$ とし,
 $\int_0^t x(\tau) d\tau = X(t)$ とおくと, 式(1), (2)は次式
 (6), (7)のように表すことができる。

$$\dot{X}(t) = A^{-1}X(t) - A^{-1}Bu(t) + \omega(t) \quad (6)$$

$$y(t) = C\dot{X}(t) + Du(t) + d_0(t) \quad (7)$$

ここで, $\omega(t) = -A^{-1}d(t)$

$$d(t) = -Ax(0) - Bu(0) + \tilde{d}(t)$$

である。また, $X(0) = 0$ となる。

式(3), (6)の両辺を微分すると,

$$\ddot{X}(t) = A^{-1}\dot{X}(t) - A^{-1}B\dot{u}(t) \quad (8)$$

$$\ddot{x}_r(t) = A_r\dot{x}_r(t) \quad (9)$$

また, 式(4), (7), (8)を考慮して, 式(5)の両辺を微分すると, 次式(10)を得る。

$$\dot{e} = CA^{-1}\dot{X}(t) + (D - CA^{-1}B)\dot{u}(t) - C_r\dot{x}_r(t) \quad (10)$$

ここで, 式(8), (9), (10)より, 次の拡大系を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ e \\ \dot{x}_r(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 & 0 \\ CA^{-1} & 0 & -C_r \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ e \\ \dot{x}_r(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -A^{-1}B \\ D - CA^{-1}B \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)の拡大系に対して, 2次形式評価関数を次のように定義する。

$$J = \int_0^\infty (\dot{X}^T Q_0 \dot{X} + e^T Q e + \dot{u}^T R \dot{u}) dt \quad (12)$$

ここで, $Q_0 \in R^{n \times n}$, $Q \in R^{l \times l}$, $R \in R^{l \times l}$ はそれぞれ Q_0, Q は準正定, R は正定な重み行列である。

式(12)の評価関数を最小化する最適制御則, 最適レギュレータ理論により, 制御入力 $u(t)$ は次式(13)のように与えられる。

$$u(t) = K_1 X(t) + K_2 \int_0^t e(\tau) d\tau + K_3 x_r(t) \quad (13)$$

式(13)における最適フィードバックゲインは次式(14), (15)のように与えられる。

$$[K_1 \quad K_2] = -R^{-1}B_1^T P_{11} \quad (14)$$

$$K_3 = -R^{-1}B_1^T P_{12} \quad (15)$$

P_{11} および P_{12} は次の行列方程式の解である。

$$A_1^T P_{11} + P_{11} A_1 + Q_1 - P_{11} B_1 R^{-1} B_1^T P_{11} = 0 \quad (16)$$

$$A_1^T P_{12} + P_{11} A_2 + P_{12} A_r - P_{11} B_1 R^{-1} B_1^T P_{12} = 0 \quad (17)$$

P_{11} は *Riccati* 代数方程式(16)式の正定対称解であり, また, P_{12} は P_{11} を式(17)に代入した式から求められる。

A_1, A_2, B_1, Q_1 は次のように定義される。

$$A_1 = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ CA^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_r \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -A^{-1}B \\ D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

設計を行った MFSC(Model Following Servo Controller)の特徴を以下に述べる。

1. 安定性 : MFSC は閉ループ系の極が安定であれば安定性は保証される。
2. 定常特性 : 出力誤差の積分値をフィードバックしていることから 1 型の制御系であり, 一定の目標値や一定の入力外乱に対して定常偏差を零にできる。

3. 過渡特性: MFSC では規範モデルの出力をプラント出力の目標値としているため, 目標値の変化をたとえば制御帯域内に抑えることができる.

4. サーボ系であるので, モデルマッチング制御系と違い, 制御対象が非最小位相系であつても適用可能である.

5. MFSC は状態空間法に基づく設計法であり, 多入出力系に容易に適用できる.

6. 最適レギュレータとしての特長を持っており, 制御性能と入力の使用量との間のトレードオフが重み行列 Q_1, R の調整により可能である.

このように, MFSC は制御系の主要な設計要求である安定性, 過渡特性, 定常特性に優れたコントローラであるといえる.

4. 数値例

次のようなシステム(18), (19)式に対しモデル追従型サーボコントローラの設計を行う.

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + d(t) \quad (18)$$

$$y(t) = [3 \quad 1]x(t) + [2]u(t) + d_0(t) \quad (19)$$

$$\text{ここで, } d(t) = -\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(0)$$

$$- \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{d}(t)$$

式(18), (19)を $X(t)$ を使って表すと, 次式(20), (21)のようになる.

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \omega(t) \quad (20)$$

$$y(t) = [3 \quad 1]\dot{X}(t) + [2]u(t) + d_0(t) \quad (21)$$

ここで,

$$\omega(t) = -A^{-1}d(t) \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{d}(t)$$

外乱は次式で示すステップ外乱とする.

$$\tilde{d}(t) = 0.8 \quad (7[s] \leq t \leq 12[s])$$

$$d_0(t) = 0.6 \quad (15[s] \leq t \leq 20[s])$$

規範モデルを次式(22), (23)で与える.

$$\dot{x}_r(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x_r(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_r(t) \quad (22)$$

$$y_r(t) = [-2 \quad 1]x_r(t) \quad (23)$$

ここで, $u_r(t) = 4\sin 0.5t + 8$

$$x_r(0) = [0 \quad 0]^T$$

とする.

この数値例に対する式(11)の拡大系は次の式(24)のようになる.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ e \\ \dot{x}_r(t) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ e \\ \dot{x}_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u}(t) \quad (24)$$

式(24)より, 式(16)の *Riccati* 代数方程式のハミルトン行列 H は式(25)のようになる.

$$H = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_1^T \\ -Q_1 & -A_1^T \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

また, 重み係数 R, Q_1 をそれぞれ次のようにおく.

$$R = 1 \quad , \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって、有本・ポッター法より *Riccati* 代数方程式の解 P_{11} は次式(26)ように求まる。なお、数値計算には MATX を使用した。

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 2.43 & 0.83 & -0.36 \\ 0.83 & 0.59 & -0.12 \\ -0.36 & -0.12 & 0.37 \end{bmatrix} \quad (26)$$

式(26)の *Riccati* 方程式の解 P_{11} の固有値 λ を求めると次のようになる。

$$\lambda = 2.81, 0.32, 0.26$$

よって、 λ がすべて正になるのでは P_{11} は正定解である。

式(26)を式(17)に代入することで、 P_{12} は次式(27)のように求まる。

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.09 \\ -0.11 & 0.02 \\ -0.36 & -0.01 \end{bmatrix} \quad (27)$$

よって、フィードバックゲイン K_1, K_2, K_3 は次のように求めることができる。

$$\begin{aligned} & [K_1 \quad K_2] \\ &= -[0 \quad 1 \quad 3] \begin{bmatrix} 2.43 & 0.83 & -0.36 \\ 0.83 & 0.59 & -0.12 \\ -0.36 & -0.12 & 0.37 \end{bmatrix} \\ &= [0.25 \quad -0.23 \quad -0.99] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3 &= -[0 \quad 1 \quad 3] \begin{bmatrix} 0.21 & 0.09 \\ -0.11 & 0.02 \\ -0.36 & -0.01 \end{bmatrix} \\ &= [0.21 \quad 0.01] \end{aligned}$$

したがって、制御入力 $u(t)$ は式(13)より次式(28)のように求まる。

$$\begin{aligned} u(t) &= [0.25 \quad -0.23]X(t) - 0.99 \int_0^t e(\tau) d\tau \\ &\quad + [0.12 \quad 0.01]x_r(t) \end{aligned} \quad (28)$$

以上の数値例に対して MATX でプログラムを組み数値シミュレーションを行う。

5. 結言

本稿では積分型状態方程式で表現されたモデル追従型サーボコントローラ的设计法を示した。そして、具体的な数値例に対して本设计法を適用し制御入力を求めた。设计を行った制御系に対する数値シミュレーションが行えていないため、今後は制御対象の出力が参照モデルの出力に追従することをシミュレーションによって確認していきたい。

参考文献

- [1] 金井,越智,川邊 “ピークル制御” 槇書店 pp.103-10 (2004)
- [2] 古田 勝久,小宮 克美 “線形多変数系に対するモデル追従型サーボコントローラ的设计” 計測自動制御学会論文集 第18巻 第1号(1981)
- [3] 古賀 雅伸 “Linux・Windows でできる MATX による数値計算” 東京電機大学出版局(2000)
- [4] 遠藤 清志 “ロバストモデル追従型サーボ制御” 修士学位論文,山形大学(2012)
- [5] 奥山 工 “積分型状態方程式表現による無駄時間系のモデル追従形制御” 修士学位論文,山形大学(2012)