

## 仮想インピーダンス制御の安定性解析

### Stability Analysis of Virtual Impedance Control

○高野公平, 村松鋭一

Kohei Takano, Eiichi Muramatsu

山形大学理工学研究科

Yamagata University

キーワード: 仮想インピーダンス(virtual impedance) 切り替え制御(switching control) 移動ロボット(mobile robots) 安定性解析(stability analysis)

連絡先: 山形県米沢市城南 4 丁目 3-16

山形大学大学院 応用生命システム工学専攻 村松研究室

村松鋭一, muramatu@yz.yamagata-u.ac.jp

#### 1. 序論

自律型移動ロボットが、障害物や他の機体との接触、衝突を避けるための制御手法の一つに、仮想インピーダンス<sup>1)</sup>を用いる方法がある。

これは、理論上ロボット-ロボット間、またはロボット-障害物間に、仮想的にバネ系が存在するかのように自律型移動ロボットを制御する手法である。計算上存在するバネ系による外力を算出し、その運動を実現するように、移動ロボットに動作させる。仮想インピーダンス法の利点として、計算量が比較的少ないため、リアルタイム性に優れていること、障害物回避のみならず、複数の移動ロボットによる協調動作や目標へ進行する力などにも適用可能であること、ロボットの挙動が鋭角的になりにくいこと、などが挙げられる。

設計パラメータは現実のバネと同じく、付属

する物体(移動ロボット)の質量  $m$ 、バネ定数  $k$ 、粘性摩擦係数  $d$ 、バネ長  $L$  である。これらのパラメータには設計において自由度があり、状況に応じてパラメータを切り替えることが可能である。こうすることによって、応答特性の向上が期待できる利点がある反面、切り替える制御システムの組合せ次第で不安定化する場合がある。

本研究では、仮想インピーダンス法において、バネ系のパラメータを状況に応じて切り替える場合を想定する。ある切り替え条件のもとでの制御系の安定性条件を求め、仮想インピーダンスのパラメータと安定性の関係を示す。またシミュレーションによってその妥当性を検証する。

#### 2. バネ系の状態方程式と固有値

バネの運動方程式より、状態方程式と、 $A$  の

固有値 $\lambda_1, \lambda_2$ を導く.

$$m\ddot{y}(t) + \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \dot{y}(t) + \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} y(t) = 0 \quad (2.1)$$

$$\dot{x}(t) = A_i x(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_i}{m} & -\frac{d_i}{m} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\lambda_1 = -\frac{d_i}{2m} + \sqrt{\frac{d_i^2}{4m^2} - \frac{k_i}{m}} \quad (2.3)$$

$$\lambda_2 = -\frac{d_i}{2m} - \sqrt{\frac{d_i^2}{4m^2} - \frac{k_i}{m}} \quad (2.4)$$

( $i = 1, 2$ )

行列  $A$  は可制御正準形式に見られるコンパニオン形式であるので、固有値を $\lambda = \alpha \pm i\beta$ とすると、固有ベクトルが $\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \pm i\beta \end{bmatrix}$ で表される。これにより、切り替え制御の安定性条件は、固有値のパラメータである $(\alpha, \beta)$ のみを用いて表すことが可能になる。

### 3. 切り替え制御の安定性条件

二輪移動ロボットにおいて、仮想インピーダンス法に切り替え制御を適用した際の安定条件を導出する。

#### 3.1 条件設定

一台の、質量  $m$  の二輪移動ロボットを想定する。目標とする走行経路は直線とし、その左右の等しい距離に障害物となる壁が存在する。ロボットはより近い障害物から一つだけバネ系による外力を受ける。簡略化のため、ここでは車輪による進行方向の拘束はなく、全方向に移動可能であるとする。また、ロボットの位置、速度、障害物の位置は、センサによって既知であるとする。

仮想インピーダンス法に用いるシステムは、バネ系 1 ( $k_1, d_1$ )、バネ系 2 ( $k_2, d_2$ ) の 2 種類であり、バネ系 1 は壁に向かうときの斥力、バネ系

2 は壁から離れるときの斥力と定義する。よってバネの振動の 4 半周期毎にバネ系 1, 2 を切り替える。

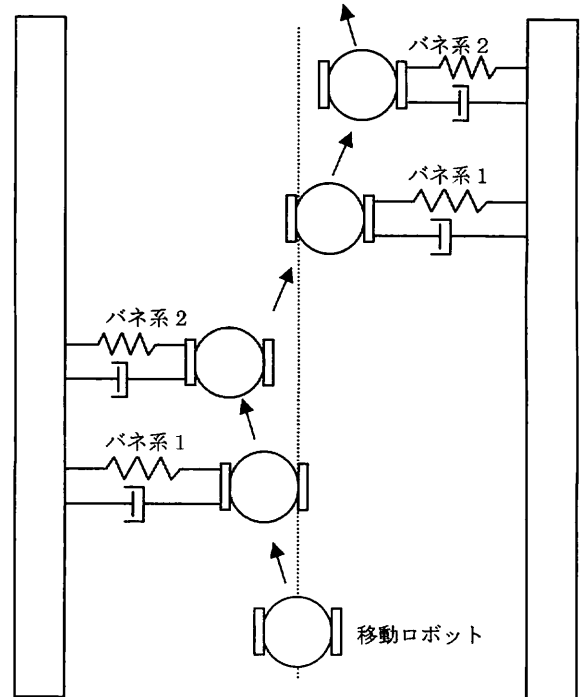


Fig.1 条件設定

#### 3.2 安定条件式の導出

図は前述の条件を基にした状態遷移図である。 $x_1$  は位置、 $x_2$  は速度、 $t_1, t_2$  は時間を表す。

ベクトル軌跡が渦を巻くように原点  $O$  に収束すれば、安定である。ベクトル軌跡が 1 周期回転する際、1 周期前のベクトルの絶対値  $\|\vec{OA}\|$  が、

1 周期後のベクトルの絶対値  $\|\vec{OM}\|$  が減少していれば、収束に向かっており、安定であると言える。

そのため、安定条件式は以下の通りとなる。

$$\frac{\|\vec{OM}\|}{\|\vec{OA}\|} < 1 \quad (3.1)$$

$x$  平面上では切り替えの間隔時間  $t_1, t_2$  とベクトルの伸縮率を求めにくいので、 $x$  平面を  $\eta$  平

面に変数変換する.  $\eta$  平面は角速度が固有値の虚部 $\beta$ であるため, 容易に時間 $t_1, t_2$ を求められる.

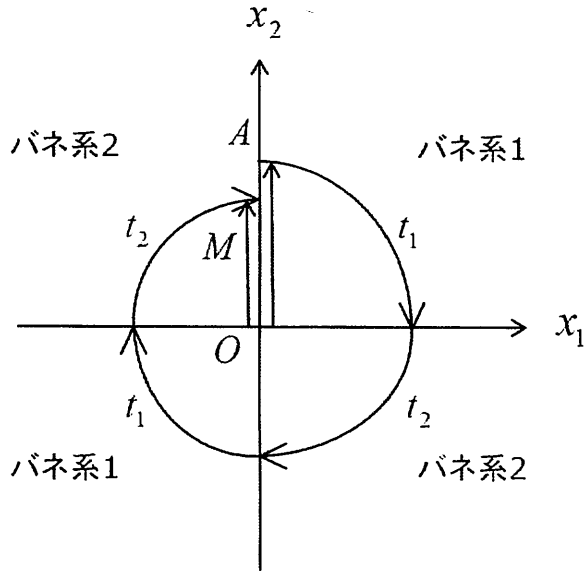


Fig.2 切り替え制御の状態遷移図

変数変換には行列  $T$  を用いる.

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2\alpha & 2\beta \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$x = T\eta$$

$$\eta = T^{-1}x$$

$\eta$  平面のベクトルの軌道を表す式は, 点  $O$  からの絶対値  $e^{\alpha t}$  と回転行列で表現され,

$$\begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{10}(t) \\ \eta_{20}(t) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

である. さらに

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

を用いて

$$\begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} = e^{\Gamma t} \begin{bmatrix} \eta_{10}(t) \\ \eta_{20}(t) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

とする.

$x$  平面と  $\eta$  平面を交互に変換し, 1 周期後のベクトル比を計算すると,

$$\begin{aligned} x(2t_1 + t_2) &= T_2 e^{\Gamma_2 t_2} T_2^{-1} T_1 e^{\Gamma_1 t_1} T_1^{-1} T_2 e^{\Gamma_2 t_2} T_2^{-1} T_1 e^{\Gamma_1 t_1} T_1^{-1} x(0) \\ &\text{となる.} \end{aligned}$$

以上より安定条件式は,

$$\frac{\|\vec{OM}\|}{\|\vec{OA}\|} = \frac{\|T_2 e^{\Gamma_2 t_2} T_2^{-1} T_1 e^{\Gamma_1 t_1} T_1^{-1} T_2 e^{\Gamma_2 t_2} T_2^{-1} T_1 e^{\Gamma_1 t_1} T_1^{-1} x(0)\|}{\|\vec{OA}\|} < 1$$

式を整理すると,

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} \tan^{-1} \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \tan^{-1} \frac{\beta_2}{\alpha_2} + \log \sqrt{\frac{\alpha_2^2 + \beta_2^2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} < 0 \quad (3.5)$$

となる.

### 3. 3 バネ系への適用

導出された切り替え制御の安定条件式を, バネ系のパラメータである, バネ定数  $k$ , 粘性摩擦係数  $d$ , 質量  $m$  で示すと, 以下の通りになる.

$$\frac{\tan^{-1} \gamma_1}{\gamma_1} + \frac{\tan^{-1} \gamma_2}{\gamma_2} + \log \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} < 0 \quad (3.6)$$

$$\gamma_i = \frac{4mk_i - d_i^2}{d_i^2} \quad (i = 1, 2)$$

## 4. シミュレーション

シミュレーションによって, 仮想インピーダンスの妥当性の検証を行った.

### 4. 1 状態遷移図と安定条件の比較

2 種類の安定な系を切り替え制御によって組合せ, 不安定化・安定化する例を挙げた. これらのバネ系のパラメータを, 前項で求められた安定条件式に照らし合わせた.

#### ① 安定 + 安定 $\rightarrow$ 不安定

各パラメータ

$$k_1 = 5.0, k_2 = 50.0$$

$$d_1 = 3.0, d_2 = 3.0, m = 10.0$$

固有値

$$\alpha_1 \pm i\beta_1 = -0.15 \pm i0.69$$

$$\alpha_2 \pm i\beta_2 = -0.05 \pm i0.22$$

安定条件式の左辺を,  $S$  とする.

$$S = 0.82 > 0$$

状態遷移図は発散しており, 不安定である.

また、安定条件式も正の値であり不安定を示している。

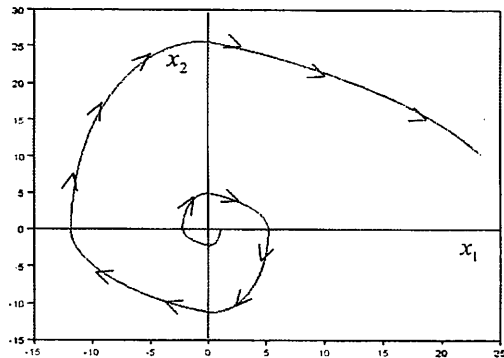


Fig.3 状態遷移図 (不安定)

② 安定 + 安定 → 安定

各パラメータ

$k_1 = 5.0, k_2 = 1.0$

$d_1 = 3.0, d_2 = 1.0, m = 10.0$

固有値

$\alpha_1 \pm i\beta_1 = -0.15 \pm i0.69$

$\alpha_2 \pm i\beta_2 = -0.05 \pm i0.31$

安定条件式の左辺を、S とする。

$S = -1.3 > 0$

状態遷移図は収束しており、安定である。また、安定条件式も負の値であり安定を示している。

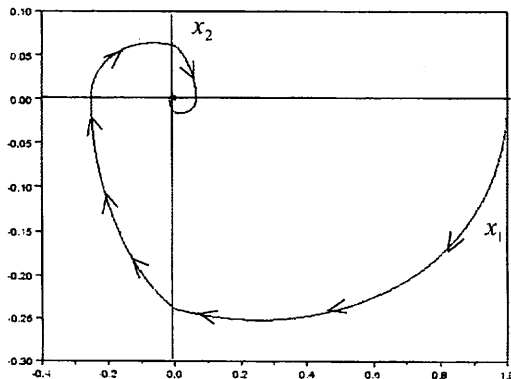


Fig.4 状態遷移図 (安定)

4. 2 パラメータの役割

制御系のパラメータ  $k_1, k_2, d_1, d_2$  の値を変動させた場合、安定性を示す S にどのような変化をもたらすか、検証した。

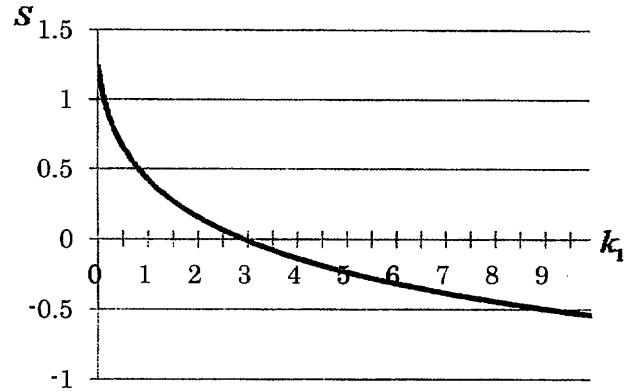


Fig.5  $k_1$  と安定性の関係

$k_1 = 0.1 \sim 10.0, k_2 = 5.0$

$d_1 = 1.0, d_2 = 1.0, m = 10.0$

$k_1$  を 0.1~10.0 まで変化させた場合、S は減少し、安定に向かう。バネの運動方程式(2.1)より、バネ定数は大きいほど、壁からの斥力は増加する。 $k_1$  はロボットが壁に向かうときの制御系パラメータであるため、 $k_1$  が作用する間、バネの斥力はロボットの振幅運動と逆向きに掛かる。そのため、 $k_1$  が増加するほど、ロボットの振幅運動は相殺され、安定化する。

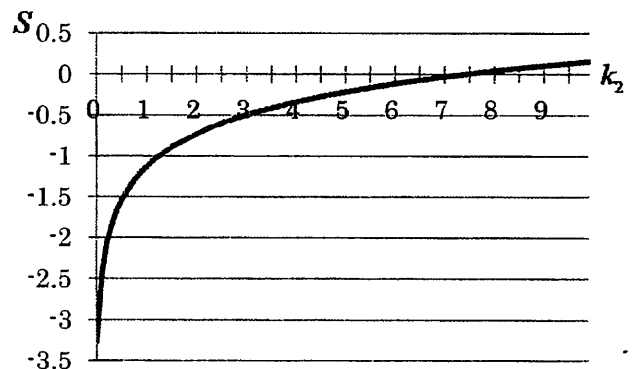


Fig.6  $k_2$  と安定性の関係

$k_1 = 5.0, k_2 = 0.1 \sim 10.0$

$d_1 = 1.0, d_2 = 1.0, m = 10.0$

次に $k_2$ の値を 0.1~10.0 まで変化させた場合について述べる. 粘性摩擦係数は共に影響の少ない一定値を入力した. このとき  $S$  は増加し, 不安定化していく.  $k_2$  はロボットが壁から離れるときの制御系パラメータであるため, バネの斥力はロボットの振幅運動と同じ向きに掛かる. そのため,  $k_2$  が増加するほど, ロボットの振幅運動は増幅され, 不安定化する.

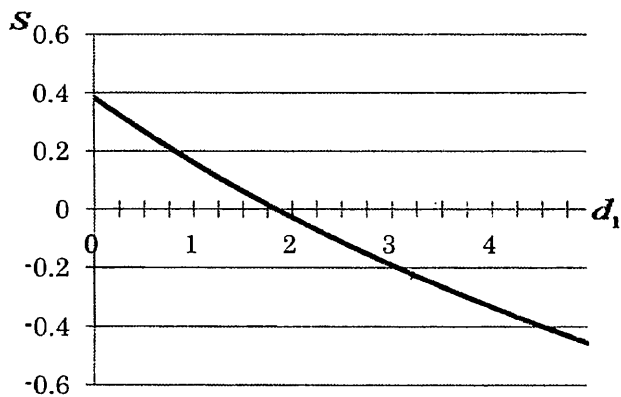


Fig.7  $d_1$  と安定性の関係

$k_1 = 1.0, k_2 = 3.0$   
 $d_1 = 0.05 \sim 5.0, d_2 = 1.0, m = 10.0$

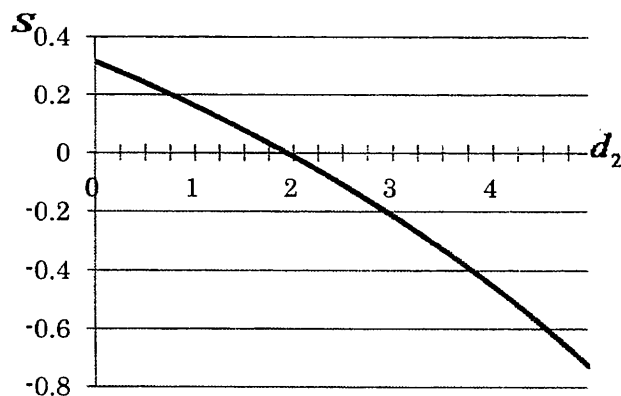


Fig.8  $d_2$  と安定性の関係

$k_1 = 1.0, k_2 = 3.0$   
 $d_1 = 1.0, d_2 = 0.05 \sim 5.0, m = 10.0$

同様に, 粘性摩擦係数についても値を変化させた. バネ定数にはダンパが存在しない場合不

安定化する値を入力した.  $d_1, d_2$  については両者とも増加するほど安定化する. ダンパは減衰振動を起こす要素であるため, ロボットの速度の向きに関わらず, 安定化させることがわかる.

## 5. 結論

本研究は自律移動型ロボットの制御手法である仮想インピーダンス法における, 切り替え制御の安定条件について, 次の成果を示した.

- ① 仮想インピーダンスの切り替え制御における安定性条件を, 各サブシステムのパラメータ (バネ定数等) を用いて示した.
- ② 上記の条件式の妥当性をシミュレーションによって検証・確認した.

今後は安定条件を満たす範囲内でよりよい応答性を与えるようなパラメータ設定法を見つきたい.

## 参考文献

- 1) 新井, 太田:  
仮想インピーダンスを用いた複数移動ロボット系の動作計画, 日本ロボット学会誌 vol.11 No.7, pp. 1039~1046, 1993
- 2) 太田, 新井:  
群秩序生成可能な追従戦略を用いた複数移動ロボット系の動作計画, 日本ロボット学会誌 vol.12 No.4, pp. 603~608, 1994
- 3) 太田, 新井, 倉林:  
作業の形質を考慮したロボット群の動作計画, 日本ロボット学会誌 vol.13 No.4, pp. 517~524, 1995
- 4) 梶原宏之:線型システム制御入門, コロナ社, 2000.