計測自動制御学会東北支部 第 281 回研究集会 (2013.6.21)
資料番号 281-8

方向統計学に基づく位相限定相関関数の統計的性質

Statistical Properties of Phase-Only Correlation Functions Based on Directional Statistics

○八巻俊輔*，阿部正英**，川又政征**

○ Shunsuke Yamaki*, Masahide Abe**, and Masayuki Kawamata**

*東北大学国際高等研究教育機構学際科学フロンティア研究所,
**東北大学大学院工学研究科電子工学専攻

*Frontier Research Institute for Interdisciplinary Sciences,
International Advanced Research and Education Organization, Tohoku University,
**Department of Electronic Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University

キーワード：位相限定相関関数 (phase-only correlation functions)，方向統計学 (directional statistics)，円周確率分布 (circular probability distributions)，平均方向 (mean direction)，円周分散 (circular variance)，von-Mises 分布 (von-Mises distribution)

連絡先：〒980-8579　仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05 東北大学大学院工学研究科電子工学専攻川又研究室
八巻俊輔，Tel.: (022)795-7095，Fax.: (022)263-9169，E-mail: yamaki@mk.ecei.tohoku.ac.jp

---

1. まえがき

位相限定相関 (POC: Phase-Only Correlation) 関数は，2 つの信号の類似度を評価する関数として，信号マッチングをはじめとするさまざまな分野に幅広く応用されてきた [1, 2, 3, 4, 5, 6]．POC 関数は，2 つの信号の位相スペクトルが等しければデルタ関数になる．しかし，実際の信号マッチングにおいて，2 つの信号の位相スペクトルが完全に等しくなることはほとんど起こりえない．よって，位相スペクトルが等しいときに POC 関数がデルタ関数になる性質は，実際の信号マッチングには用いることができない．

2 つの信号の位相スペクトルが等しくない場合の POC 関数の性質について理論的に明らかにするために，筆者らのグループは文献 [7] において，2 つの信号の位相スペクトルの差の確率的変動に対する POC 関数の挙動を統計的に解析した．この解析法では，位相スペクトルの差を数直線上に分布する線形データとしてあつかっていた．しかし，信号の位相スペクトルは位相角で表されるため，方向を表す角度データである．そのため，位相スペクトルの差を方向をもつ角度データとして考え，その方向の情報を利用して POC 関数を統計的に解析するための概念を導入しなければならない．

本論文では，方向統計学という新しい観点からみた POC 関数の統計的性質を明らかにする．方向統計学とは，角度観測値を含むデータの科学であり，たとえば風向きや渡り鳥の飛び立つ方角，ルーレットの止まる位置，時刻毎の交通

事故発生件数など，方角や時刻などに依存する量を統計的にあつかう科学である[8,9,10,11,12]．この方向統計学の考え方を導入して，位相スペクトルの差を角度データとしてあつかい，方向の情報を利用したPOC関数の統計的性質を理論的に導出する．その結果，POC関数の期待値と分散は，位相スペクトルの差の円周分散を用いて非常に単純な関数で表されることを示す．

2. 位相限定相関(POC)関数

本章では，POC関数を定義し，POC関数の性質について述べる．

2.1 POC関数の定義

長さNの2つの複素信号$x(n)$および$y(n)$を考える．これらの信号の離散フーリエ変換(DFT)はそれぞれ，

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = |X(k)| e^{j\theta_k} \quad (1)$$

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_N^{kn} = |Y(k)| e^{j\phi_k} \quad (2)$$

で与えられる．ここで，$W_N = \exp(-j2\pi/N)$は離散フーリエ変換の回転因子であり，θ_kおよびϕ_kはそれぞれ，信号$x(n)$および$y(n)$の位相スペクトルである．このとき，2つの信号$x(n)$および$y(n)$の間のPOC関数$r(m)$は，2つの信号の正規化クロスパワースペクトルの離散フーリエ逆変換(IDFT)として，以下で与えられる．

$$\begin{aligned} r(m) &= \mathrm{IDFT}\left[\frac{X(k)Y^*(k)}{|X(k)Y(k)|}\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\alpha_k} W_N^{-mk} \quad (3) \end{aligned}$$

ここで，$\alpha_k = \theta_k - \phi_k$は2つの信号の位相スペクトルの差であり，$e^{j\alpha_k}$は位相因子とよばれる．

式(3)で定義されたPOC関数の原理について説明する．2つの信号$x(n)$および$y(n)$それぞれの位相限定信号$\tilde{x}(n)$および$\tilde{y}(n)$を以下で定義する．

$$\tilde{x}(n) = \mathrm{IDFT}\left[\frac{X(k)}{|X(k)|}\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\theta_k} W_N^{-nk} \quad (4)$$

$$\tilde{y}(n) = \mathrm{IDFT}\left[\frac{Y(k)}{|Y(k)|}\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\phi_k} W_N^{-nk} \quad (5)$$

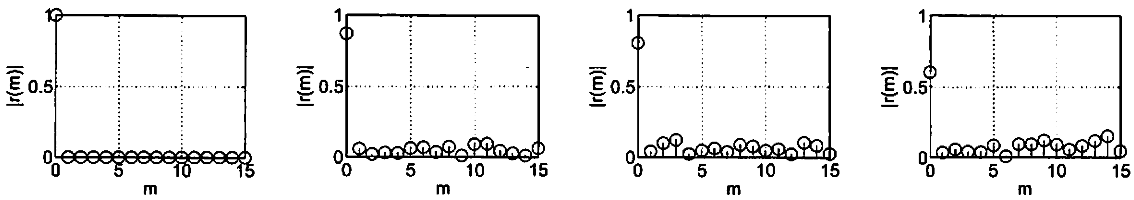
すると，式(3)で定義されたPOC関数は，位相限定信号$\tilde{x}(n)$および$\tilde{y}(n)$の間の相互相関関数である．式(4)および(5)より，位相限定信号は，周波数振幅スペクトルをすべての周波数において1に正規化して得られた信号である．一般に，自然音声や自然画像などの信号のエネルギーは低周波領域に集中している．このとき，振幅スペクトルをすべての周波数において1に正規化することは，信号の高周波成分を強調することに相当する．例えば自然画像の場合，輪郭を強調することに相当する．そのため，相互相関関数に比べてPOC関数の方が相関関数のピークが鋭くなる傾向にある．

2.2 位相スペクトルの差が一定値である場合のPOC関数

2つの信号の位相スペクトルの差α_kが周波数インデックスkに関して一定値であるとき，すなわち$\alpha_k = \theta_k - \phi_k = \gamma(\mathrm{const.})$であるとき，POC関数$r(m)$は下記のとおりデルタ関数になることが知られている．

$$\begin{aligned} r(m) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\gamma} W_N^{-nk} \\ &= \begin{cases} e^{j\gamma} & (m=0) \\ 0 & (\mathrm{otherwise}) \end{cases} = e^{j\gamma}\delta(m) \quad (6) \end{aligned}$$

POC関数を用いたマッチング手法において，この性質が原理として用いられてきた．しかし，実際の信号マッチングにおいて，2つの信号の位相スペクトルの差が一定値になることはほとんどないため，式(6)の性質は実際の信号マッチングには用いることができない．そのため，位



(a) $\sigma^2 = 0$　(b) $\sigma^2 = 0.25$　(c) $\sigma^2 = 0.5$　(d) $\sigma^2 = 1$

Fig. 1　位相スペクトルの差の分散 σ^2 の変化に対する POC 関数 $r(m)$ の変動の例

相スペクトルの差が一定値でない場合の POC 関数の性質について理論的に明らかにしなければならない.

2.3　位相スペクトルの差が一定値でない場合の POC 関数

2 つの信号の位相スペクトルの差 α_k が周波数インデックス k に関して一定値でないときの POC 関数の性質は理論的に明らかになっていなかった. 簡単な実験例として, 位相スペクトルの差 α_k を平均 0, 分散 σ^2 のガウス分布にしたがう確率変数であると仮定し, 分散を $\sigma^2 = 0, 0.25, 0.5, 1$ と変化させながらそれぞれ POC 関数 $r(m)$ を計算した結果を図 1 に示す. 図 1 より, 位相スペクトルの差が大きくなるにしたがい, POC 関数 $r(m)$ のピークの高さ $|r(0)|$ が減少し, $|r(m \neq 0)|$ の値が増加する傾向にあることが実験的には確かめられるが, この挙動を理論的に保証できる方法がなかった. そこで, 著者らのグループでは, 統計学の考え方に基づき POC 関数の挙動を解析し, これまで実験的にしか得られていなかった性質に関する理論的な根拠を与えた [7].

3.　POC 関数の統計的解析 [7]

本章では, 著者らのグループがこれまでに行ってきた POC 関数の統計的解析について紹介する. 位相スペクトルの差が 0 でない場合の POC 関数の期待値と分散を理論的に導出し, その挙動について解析した.

3.1　位相スペクトルの差に関する統計的な仮定

位相スペクトルの差 α_k は確率変数と仮定し, 位相因子 $e^{j\alpha_k}$ の期待値を

$$A = E[e^{j\alpha_k}] \tag{7}$$

とおく. ここで, 位相スペクトルの差 α_k はすべての周波数インデックス k に関して同一の確率分布をもつものと仮定している. そのため, 期待値 A は周波数インデックス k に依らず一定である. また, 期待値 A の値は α_k の確率密度関数を与えることによって具体的に決まる.

位相スペクトルの差 α_k は周波数インデックス k に関して互いに独立であると仮定する. すなわち,

$$E[\alpha_k \alpha_l] = E[\alpha_k]E[\alpha_l] \ \ (k \neq l) \tag{8}$$

を仮定する. 結果, 位相因子 $e^{j\alpha_k}$ も周波数インデックス k に関して互いに独立となるため,

$$\begin{aligned} E[e^{j\alpha_k} e^{-j\alpha_l}] &= E[e^{j\alpha_k}]E[e^{-j\alpha_l}] \\ &= AA^* \ \ (k \neq l) \end{aligned} \tag{9}$$

が成り立つ. ただし, $k = l$ の場合には

$$E[e^{j\alpha_k} e^{-j\alpha_l}] = 1 \tag{10}$$

が明らかである.

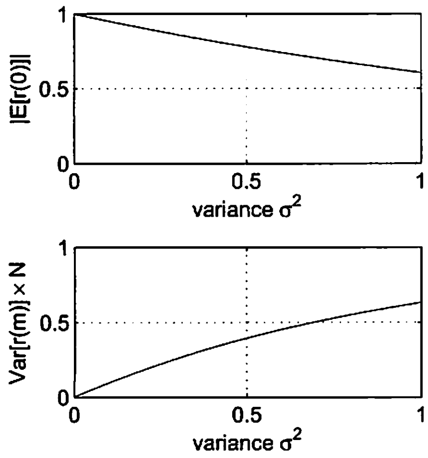


Fig. 2　位相スペクトルの差の分散 σ^2 に対する POC 関数 $r(m)$ の期待値 $|E[r(0)]|$ および分散 $\mathrm{Var}[r(m)]$

3.2 POC 関数の期待値および分散

POC 関数 $r(m)$ の期待値および分散を下記のように導出した．まず，式 (3) および式 (7) を用いて，POC 関数 $r(m)$ の期待値 $E[r(m)]$ を以下のように導出した．

$$E[r(m)] = A\delta(m) \tag{11}$$

次に，POC 関数 $r(m)$ の分散 $\mathrm{Var}[r(m)]$ を以下のように導出した．

$$\mathrm{Var}[r(m)] = \frac{1}{N}(1 - AA^*) \tag{12}$$

式 (11) および式 (12) がそれぞれ POC 関数 $r(m)$ の期待値および分散の一般式である．ここで，位相スペクトルの差 α_k の確率密度関数を仮定することにより，式 (11) および式 (12) の値が具体的に決まる．

3.3 特性関数を用いた POC 関数の期待値および分散の導出

位相スペクトルの差の確率密度関数が与えられたとき，その特性関数を用いて POC 関数の期待値および分散を導出できる．ある確率変数 α の確率密度関数 $p(\alpha)$ の特性関数 $\psi_\alpha(t)$ は以下で定義される．

$$\psi_\alpha(t) = E[e^{j\alpha t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha t} p(\alpha) d\alpha \tag{13}$$

すなわち，特性関数 $\psi_\alpha(t)$ は確率密度関数 $p(\alpha)$ のフーリエ変換である．ここで，$A = E[e^{j\alpha}]$ は特性関数 $\psi_\alpha(t)$ を用いて以下のように表すことができる．

$$\begin{aligned} A = E[e^{j\alpha}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha} p(\alpha) d\alpha \\ &= \psi_\alpha(1) \end{aligned} \tag{14}$$

したがって，特性関数が知られている代表的な確率分布に関しては，その特性関数を利用して POC 関数の期待値および分散を簡単に導出することができる．

例として，位相スペクトルの差 α_k が平均 0，分散 σ^2 のガウス分布にしたがう確率変数と仮定する．すなわち，α_k の確率密度関数 $p(\alpha_k)$ は

$$p(\alpha_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\alpha_k^2}{2\sigma^2}} \ (-\infty < \alpha_k < \infty) \tag{15}$$

と表される．このとき，確率密度関数 $p(\alpha_k)$ の特性関数 $\psi_{\alpha_k}(t)$ は

$$\psi_{\alpha_k}(t) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \tag{16}$$

となる [13]．よって，$A = E[e^{j\alpha_k}]$ は

$$A = E[e^{j\alpha_k}] = \psi_{\alpha_k}(1) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \tag{17}$$

と導出される．式 (17) を式 (11) および式 (12) に代入し，

$$E\left[r(m)\right] = e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \delta(m) \tag{18}$$

$$\mathrm{Var}\left[r(m)\right] = \frac{1}{N}(1 - e^{-\sigma^2}) \tag{19}$$

を得る．

式 (18) および式 (19) より，位相スペクトルの差の分散 σ^2 に対する POC 関数 $r(m)$ の期待値 $|E[r(0)]|$ および分散 $\mathrm{Var}[r(m)]$ のそれぞれの値は図 2 のように図示できる．位相スペクトルの差の分散 σ^2 が増加するにしたがい，期待値 $|E[r(0)]|$

は1から0に単調減少し，分散 $\mathrm{Var}[r(m)]$ は0から $1/N$ に単調増加する．式 (18) および式 (19) は，図1に示した実験的に得られた結果に対して理論的な根拠を与えている．

3.4 これまでの統計的解析の問題点

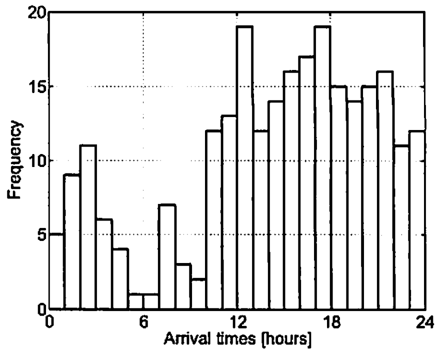
これまで著者らが行ってきたPOC関数の統計的解析法[7]には問題点があった．それは，位相スペクトルの差 α_k を線形データとしてあつかっていたことである．位相スペクトルの差は角度データであるため，本来 $[-\pi, \pi)$ の範囲の実数値しかとることができない．しかし，ガウス分布を仮定した場合，式 (15) で表されるように，位相スペクトルの差 α_k が任意の実数値をとることを許してしまうため，角度データの仮定に反する．任意の実数値 $\alpha_k \in (-\infty, \infty)$ に 2π[rad] の周期性を仮定すればよいが，これまでの解析においては，そのような周期性も考慮していない．すなわち，位相スペクトルの差 α_k を単なる線形データとしてではなく，方向の情報をもつ角度データとして統計的にあつかう概念を導入しなければならない．

4. 方向統計学的観点からみたPOC関数の統計的性質

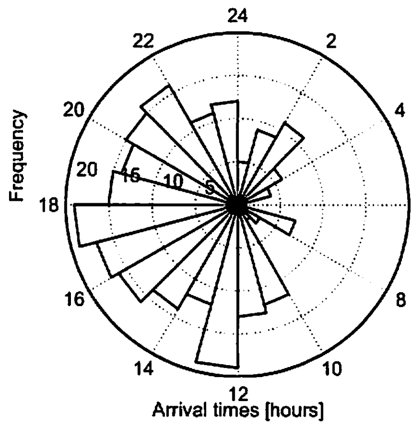
本章では，方向統計学という新しい概念に基づきPOC関数の統計的性質を明らかにする．これまでのPOC関数の統計的解析においては，位相スペクトルの差を線形データと仮定していたが，本章では，位相スペクトルの差を角度データとしてあつかい，方向の情報を利用したPOC関数の統計的解析を行う．

4.1 方向統計学の基礎

方向統計学とは，角度観測値を含むデータの科学であり，たとえば風向きや渡り鳥の飛び立つ方角，ルーレットの止まる位置，時刻毎の交通



(a) 線形ヒストグラム



(b) 円周ヒストグラム

Fig. 3　ある病院に搬送された時刻ごとの患者数データ[8]のヒストグラム表示

事故発生件数など，方角や時刻などに依存する量を統計的にあつかう科学である[8, 9, 10, 11, 12]．これらの量は，数直線上に分布するデータとしてではなく，円周上に分布するデータとして考えると都合がよい．その一例として，ある病院に搬送された時刻ごとの患者数のデータ[8]をヒストグラム化したものを図3に示す．一般的な統計学に基づき，時刻を数直線上のデータとみなすと，図3(a) に示されるような線形ヒストグラムが得られる．しかし，実際には0時と24時は同じ時刻であり，図3(a) のヒストグラムの左端と右端は循環してつながっていることに注意が必要である．そのため，このような時刻に依存するデータは，図3(a) のような線形ヒストグラムで表すよりも，図3(b) のような円周ヒストグラムで表す方が適している．

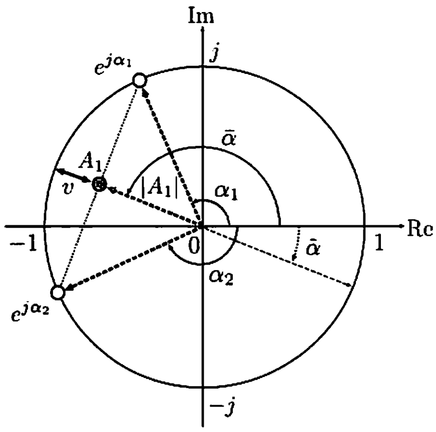


Fig. 4　方向統計学における平均方向と円周分散の幾何学的解釈．角度確率変数 α_1 および α_2 が与えられたときの 1 次三角モーメント A_1，平均合成ベクトル長 $|A_1|$，平均方向 $\bar{\alpha}$，円周分散 v，算術平均 $\tilde{\alpha}$.

方向統計学では，角度データを表す統計量を角度確率変数を用いて記述する．そして，角度データを単位円周上の点と対応づけて平均や分散などを定義する．まず，角度確率変数 $\alpha \in [-\pi, \pi)$ に関して，

$$A_p = E[e^{jp\alpha}] \tag{20}$$

を p 次三角モーメントという．ここで，1 次三角モーメント $A_1 = E[e^{j\alpha}]$ を用いて，平均合成ベクトル長 $\bar{R}$ が

$$\bar{R} = |A_1| \ \ (0 \le \bar{R} \le 1) \tag{21}$$

で定義され，平均方向 $\bar{\alpha} \in [-\pi, \pi)$ が

$$\bar{\alpha} = \arg(A_1) \tag{22}$$

と定義される．ただし，$A_1 = 0$ となる場合には平均方向 $\bar{\alpha}$ は定義されない．さらに，円周分散 v が平均合成ベクトル長 $\bar{R}$ を用いて

$$v = 1 - \bar{R} \ \ (0 \le v \le 1) \tag{23}$$

で定義される．

簡単な例として，2 つの角度確率変数 α_1 および α_2 の平均方向 $\bar{\alpha}$ と円周分散 v の幾何学的な解釈を図 4 に示す．平均方向 $\bar{\alpha}$ は，角度確率変数 α を複素数平面上の単位ベクトル $e^{j\alpha}$ に対応づけたときの平均的な方向を表しており，円周分散 v は単位ベクトル $e^{j\alpha}$ の方向のばらつき度合を表している．平均と分散の定義のしかたが一般の統計学とは異なる点に注意しなくてはならない．またこの例の場合，平均方向 $\bar{\alpha}$ と算術平均 $\tilde{\alpha} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ が異なることにも注意が必要である．

4.2　円周確率分布

一般に，角度確率変数 $\alpha \in [-\pi, \pi)$ は複素数平面における単位円周上の点 $e^{j\alpha}$ と対応づけられるため，角度確率変数の分布は円周確率分布とよばれる．円周確率分布の確率密度関数 $p(\alpha)$ は以下の 2 式で与えられる条件

$$p(\alpha) \ge 0 \ \ (-\pi \le \alpha < \pi) \tag{24}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(\alpha) d\alpha = 1 \tag{25}$$

を満たす必要がある．また，円周確率分布の確率密度関数 $p(\alpha)$ の特性関数 $\psi_\alpha(t)$ は以下で定義される．

$$\psi_\alpha(t) = E[e^{j\alpha t}] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\alpha t} p(\alpha) d\alpha \tag{26}$$

すなわち，p 次三角モーメント A_p は，特性関数 $\psi_\alpha(t)$ を用いて

$$A_p = \psi_\alpha(p) \tag{27}$$

と表せる．

4.3　POC 関数との関連性

POC 関数の統計的解析において，位相スペクトルの差 α_k は角度データと考えることができる．そのため，一般の統計学に基づいて線形データとしてあつかうのではなく，方向統計学に基づいて角度データとしてあつかう方が理論的に妥当である．すると，従来の POC 関数の統計的

解析の考え方が方向統計学の考え方と関連づけられることがわかる．

まず，式(7)における $A = E[e^{j\alpha_k}]$ はまさに1次三角モーメントである．この定数 A を用いると，式(21)および式(23)でそれぞれ与えられる平均合成ベクトル長 $\bar{R}$ および円周分散 v が

$$\bar{R} = |A| \quad (28)$$

$$v = 1 - |A| \quad (29)$$

と表せることがわかる．ここで，

$$|A| = 1 - v \quad (30)$$

であることを用いると，POC関数 $r(m)$ の期待値 $E[r(m)]$ および分散 $\mathrm{Var}[r(m)]$ は，位相スペクトルの差の円周分散 v を用いて以下のように表すことができる．

$$\begin{aligned} |E[r(m)]| &= |A|\delta(m) \\ &= (1-v)\delta(m) \quad (31) \\ \mathrm{Var}[r(m)] &= \frac{1}{N}(1-|A|^2) \\ &= \frac{1}{N}\left(1-(1-v)^2\right) \quad (32) \end{aligned}$$

すなわち，POC関数 $r(m)$ の期待値 $E[r(m)]$ および分散 $\mathrm{Var}[r(m)]$ はそれぞれ，円周分散 v の1次関数および2次関数として非常に単純な形で表せる．

式(31)および式(32)より，位相スペクトルの差の円周分散 v に対するPOC関数の $r(m)$ の期待値 $|E[r(0)]|$ および分散 $\mathrm{Var}[r(m)]$ のそれぞれの値は図5のように図示できる．任意の円周確率分布に関して，位相スペクトルの差の円周分散 v が0から1に増加するにしたがい，期待値 $|E[r(0)]|$ は1から0に単調減少し，分散 $\mathrm{Var}[r(m)]$ は0から $1/N$ に単調増加する．すなわち，第3章で紹介した従来のPOC関数の統計的解析の結果と似た傾向が得られている．

5. 計算例

本章では，位相スペクトルの差に具体的な円周確率分布としてvon-Mises分布を仮定し，POC関数の期待値と分散を導出する．von-Mises分布は，方向統計学の分野でよく知られている対称かつ単峰な分布であり，円周正規分布ともよばれる．

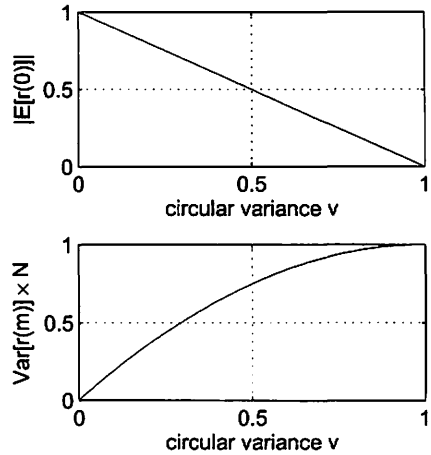


Fig. 5　位相スペクトルの差の円周分散 v に対するPOC関数 $r(m)$ の期待値 $|E[r(0)]|$ および分散 $\mathrm{Var}[r(m)]$

位相スペクトルの差 α_k がvon-Mises分布 $\mathrm{VM}(\bar{\alpha}, \beta)$ にしたがうと仮定する．ここで，$\bar{\alpha}$ は平均方向，β は集中度を表す．このとき，α_k の確率密度関数 $p(\alpha_k)$ は

$$p(\alpha_k) = \frac{1}{2\pi I_0(\beta)} e^{\beta\cos(\alpha_k - \bar{\alpha})} \; (-\pi \le \alpha_k < \pi) \quad (33)$$

と表される．ここで，$I_\nu(x)$ は第1種 ν 次修正Bessel関数であり，以下で定義される．

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!\Gamma(\nu+l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \quad (34)$$

平均方向0，集中度 β のvon-Mises分布 $\mathrm{VM}(0, \beta)$ の確率密度関数を図6に示す．von-Mises分布は，集中度 β の値が大きいときガウス分布に似た分布となる．また，集中度 $\beta = 0$ のときには，式(33)に $\beta = 0$ を代入して

$$p(\alpha_k) = \frac{1}{2\pi} \; (-\pi \le \alpha < \pi) \quad (35)$$

を得るため，一様分布 $U(-\pi, \pi)$ と等しくなる．

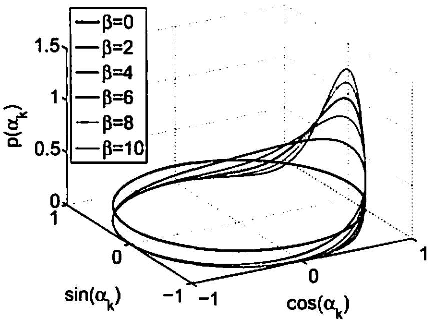


Fig. 6　von-Mises 分布 VM$(0,\beta)$ の確率密度関数

von-Mises 分布 VM$(\bar{\alpha},\beta)$ にしたがう角度確率変数 α_k の確率密度関数 $p(\alpha_k)$ の特性関数 $\psi_\alpha(t)$ は

$$\psi_\alpha(t)=\frac{I_{|t|}(\beta)}{I_0(\beta)}e^{j\bar{\alpha}t} \tag{36}$$

で与えられる．これより，A は

$$A=E[e^{j\alpha_k}]=\psi_\alpha(1)=\frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)}e^{j\bar{\alpha}} \tag{37}$$

と算出される．ここで，平均方向 $\bar{\alpha}=0$ のときには

$$A=\frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)} \tag{38}$$

となる．一方で，von-Mises 分布 VM$(\bar{\alpha},\beta)$ にしたがう角度確率変数 α_k の円周分散 v は以下で与えられる．

$$v=1-\frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)}=1-|A| \tag{39}$$

これは，式 (29) の結果と合致している．以上より，POC 関数 $r(m)$ の期待値 $|E[r(m)]|$ および分散 Var$[r(m)]$ は

$$\begin{aligned}|E[r(m)]|&=|A|\delta(m)\\&=\frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)}\delta(m)\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[r(m)]&=\frac{1}{N}(1-AA^*)\\&=\frac{1}{N}\left(1-\left(\frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)}\right)^2\right)\end{aligned} \tag{41}$$

と集中度 β を用いた形で表せる．

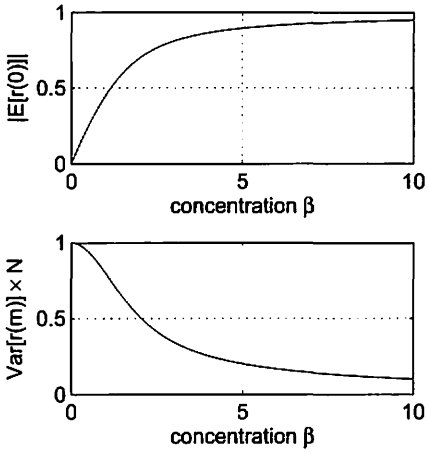


Fig. 7　位相スペクトルの差の集中度 β に対する POC 関数 $r(m)$ の期待値 $|E[r(0)]|$ および分散 Var$[r(m)]$

式 (40) および (41) より，位相スペクトルの差の集中度 β に対する POC 関数の $r(m)$ の期待値 $|E[r(0)]|$ および分散 Var$[r(m)]$ のそれぞれの値は図 7 のように図示できる．ここで，集中度 β は $0\leq\beta\leq 10$ の範囲で変化させた．図 7 より，位相スペクトルの差の集中度 β が増加するにしたがい，位相スペクトルの差の円周分散 v が小さくなるため，期待値 $|E[r(0)]|$ は 0 から 1 に単調増加し，分散 Var$[r(m)]$ は $1/N$ から 0 に単調減少する．

6. むすび

本論文では，方向統計学の考えを新たに導入して POC 関数の統計的性質を明らかにした．2 つの信号の位相スペクトルの差を角度確率変数と仮定して，その確率分布として円周確率分布を仮定した．その結果，POC 関数の期待値および分散は，それぞれ位相スペクトルの差の円周分散の 1 次関数および 2 次関数として非常に単純な形で表せることを示した．また，位相スペクトルの差の円周分散が増加するにしたがい，POC 関数の期待値 $|E[r(0)]|$ は単調減少し，分散 Var$[r(m)]$ は単調増加することを理論的に示した．最後に，代表的な円周確率分布のひとつ

である Von-Mises 分布を仮定し，POC 関数の期待値と分散を導出してその性質を明らかにした．本論文の結果は，これまで実験的にしか得られていなかった POC 関数の性質に関して，理論的な根拠を与えた．

参考文献

1) C.D. Kuglin and D.C. Hines, "The phase correlation image alignment method," Proc. Int. Conf. Cybernetics and Society, pp.163–165, 1975.

2) G. Wolberg and S. Zokai, "Robust image registration using log-polar transform," Proc. IEEE International Conference on Image Processing, pp.493–496, Vancouver, Canada, Sept. 2000.

3) H. Foroosh, J. Zerubia, and M. Berthod, "Extension of phase correlation to subpixel registration," IEEE Trans. Image Process., vol.11, no.3, pp.188–200, March 2002.

4) M. Hagiwara, M. Abe, and M. Kawamata, "Estimation method of frame displacement for old films using phase-only correlation," Journal of Signal Processing, vol.8, no.5, pp.421–429, Sept. 2004.

5) A.K. Brodzik, "Phase-only filtering for the masses(of DNA data): A new approach to sequence alignment," IEEE Trans. Signal Process., vol.54, no.6, pp.2456–2466, June 2006.

6) K. Miyazawa, K. Ito, T. Aoki, K. Kobayashi, and H. Nakajima, "An effective approach for iris recognition using phase-based image matching," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach.. Intell., vol.30, no.10, pp.1741–1756, Oct. 2008.

7) S. Yamaki, J. Odagiri, M. Abe, and M. Kawamata, "Effects of stochastic phase spectrum differences on phase-only correlation functions —Part I: Statistically constant phase spectrum differences for frequency indices —," Proc. IEEE Int. Conf. Network Infrastructure and Digital Content, pp.360–364, Beijing, China, Sept. 2012.

8) N.I. Fisher, "Statistical analysis of circular data," Cambridge University Press, 1993.

9) I.L. Dryden and K.V. Mardia, "Statistical shape analysis," John Wiley & Sons Ltd, 1998.

10) K.V. Mardia and P.E. Jupp, "Directional statistics," John Wiley & Sons Ltd, 2000.

11) S.R. Jammalamadaka and A. SenGupta, "Topics in circular statistics," World Scientific, 2001.

12) 清水邦夫, "方向統計学の最近の発展," 計算機統計学, vol.19, no.2, pp.127–150, 2006.

13) H. Stark and J.W. Woods, "Probability and random processes with application to signal processing," Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2002.