計測自動制御学会東北支部 第 281 回研究集会 (2013.6.21)
資料番号 281-9

離散フーリエ変換の不確定性原理から見た位相限定相関関数の性質

Properties of Phase-only Correlation Functions through the Uncertainty Principle for the Discrete Fourier Transforms

○川又政征 *

○ Masayuki Kawamata*

*東北大学

*Tohoku University

キーワード： 離散フーリエ変換 (discrete-Fourier transform)，不確定性原理 (uncertainty principle)，位相限定相関関数 (phase-only correlation function)

連絡先： 〒 980-8597 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05 東北大学大学院工学研究科電子工学専攻
川又政征，Tel.: (022)795-7057，Fax.: (022)263-9411，E-mail: kawamata@ecei.tohoku.ac.jp

1. はじめに

位相限定相関関数は，信号，画像，映像のマッチングなどに用いられる優れた相関関数である（たとえば文献 [1),2),3),4),5)]）．ここでは，位相限定相関関数の優れた性質を離散フーリエ変換の不確定性原理から眺めてみる．従来，信号とフーリエ変換の不確定性原理の記述は，連続時間信号とフーリエ積分の立場から議論されることがほとんどであった．しかし，ここでは離散時間信号と離散フーリエ変換についての不確定性原理を導入し [6),7)]，これによって位相限定相関関数の優れた特徴を明らかにする．

2. 離散フーリエ変換と位相限定相関関数

2.1 離散フーリエ変換

長さ N の複素信号 $x(n)$ の離散フーリエ変換は以下のように定義される．

$$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \tag{1}$$

$$= |X(k)| e^{j\theta_k}, k = 0, 1, 2, \cdots N-1 \tag{2}$$

ここで

$$W_N^m = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\cdot m\right), m = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \tag{3}$$

は回転因子である．また，$X(k)$ は周波数スペクトルとも呼ばれ，$|X(k)|$ は振幅スペクトル，θ_k は位相スペクトルと呼ばれる．$e^{j\theta_k}$ は位相因子と呼ばれる．$X(k)$ の離散フーリエ逆変換は次式によって与えられる．

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \tag{4}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots N-1 \tag{5}$$

同様に，長さ N の複素信号 $y(n)$ に対しても，離散フーリエ変換 (周波数スペクトル)$Y(k)$，振幅スペクトル $|Y(k)|$，位相スペクトル ϕ_k，位相因子 $e^{j\phi_k}$ を求めることができる．

2.2 位相限定相関関数

長さ N の複素信号 $x(n)$ と $y(n)$ の位相限定相関関数 $r(n)$ を以下のように定義する．

$$r(n) = \mathrm{IDFT}\left(\frac{X(k)Y^*(k)}{|X(k)||Y(k)|}\right) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(\theta_k-\phi_k)}W_N^{-nk}, \quad (7)$$

$$n = 0,1,2,\cdots N-1 \quad (8)$$

ただし，$X(k)Y(k) \neq 0$ である．ここで，二つの信号の位相スペクトルの差を $\alpha_k = \theta_k - \phi_k$ とおけば

$$r(n) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\alpha_k}W_N^{-nk}, \quad (9)$$

$$n = 0,1,2,\cdots N-1 \quad (10)$$

すなわち，位相限定相関関数は二つの信号の位相スペクトルの差の位相因子 $e^{j\alpha_k}$ の離散フーリエ逆変換である．明らかに $r(n)$ の周波数スペクトル $R(k)$ は

$$R(k) = e^{j\alpha_k}, k = 0,1,2,\cdots N-1 \quad (11)$$

であり，とくに $|R(k)| = 1$ であることに注意する．

2.3 位相限定自己相関関数の重要な性質

位相スペクトルの差が $\alpha_k = 0, k = 0,1,2,\cdots,N-1$ のとき，すなわち位相因子 $e^{j\alpha_k} = 1$ のとき，位相限定相関関数 $r(n)$ は以下のように振幅 $\sqrt{N}$ のデルタ関数 $\delta(n)$ となる．

$$r(n) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j0}W_N^{-nk} \quad (12)$$

$$= \begin{cases} \sqrt{N}, & n = 0 \text{ のとき} \\ 0, & n \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (13)$$

$$= \sqrt{N}\delta(n) \quad (14)$$

このとき，$r(n)$ の離散フーリエ変換（周波数スペクトル）は

$$R(k) = 1, k = 0,1,2,\cdots N-1 \quad (15)$$

である．位相スペクトルの差が $\alpha_k = 0, k = 0,1,2,\cdots,N-1$ となるのは，たとえば $x(n)$ と $y(n)$ が等しいときである．

また，$y(n) = x(n-s)$ のように，$y(n)$ が $x(n)$ を s 時刻だけ推移させた信号であるとき，位相スペクトルの差は $\alpha_k = -2\pi sk/N$ であり，位相因子は $\exp(-j2\pi sk/N)$ となり，位相限定相関関数 $r(n)$ は以下のように推移されたデルタ関数となる．

$$r(n) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi sk/N}W_N^{-nk} \quad (16)$$

$$= \begin{cases} \sqrt{N}, & n = s \text{ のとき} \\ 0, & n \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (17)$$

$$= \sqrt{N}\delta(n-s) \quad (18)$$

このとき，$r(n)$ の離散フーリエ変換（周波数スペクトル）は

$$R(k) = \exp(-j2\pi sk/N) \quad (19)$$

$$k = 0,1,2,\cdots N-1$$

であり，$|R(k)| = 1$ である．

(14) および (18) 式の性質により，$x(n)$ を送信信号（参照信号），$y(n)$ を受信信号（対象信号）として，二つの信号のマッチングが可能となり，またマッチングした信号の時間差を求めることができる．

3. 離散フーリエ変換の不確定性原理

フーリエ変換の不確定性原理について記述しているほとんどの信号処理の教科書や論文では，連続時間信号とそのフーリエ積分の立場から不確定性原理を議論している．しかし本稿では，離散時間信号を扱っているため，離散フーリエ変換に関する不確定性原理を導入する．

いま，長さ N の複素信号 $g(n)(n = 0,1,2,\cdots,N-1)$ のサポート supp g を以下のように定義する．

$$\mathrm{supp}\ g = \{n | g(n) \neq 0\} \quad (20)$$

$|\mathrm{supp}\ g|$ によって supp g の要素数を表すものとする．このとき，$|\mathrm{supp}\ g|$ は信号 $g(n)$ のある種の時間幅とみなすことができる．

同様に，長さ N の複素信号 $g(n)$ の離散フーリエ変換 $G(k)(k = 0,1,2,\cdots,N-1)$ に対して，supp G と $|\mathrm{supp}\ G|$ を定義することができ，$|\mathrm{supp}\ G|$ は周波数スペクトル $G(k)$ のある種の帯域幅とみなすことができる．

長さ N の複素信号 $g(n)$ とその離散フーリエ変換 $G(k)$ に関して以下の不等式が成立する．

定理 1 [6)]

$$|\mathrm{supp}\ g||\mathrm{supp}\ G| \geqq N \tag{21}$$

この不等式は，信号の時間幅 $|\mathrm{supp}\ g|$ とその周波数スペクトルの帯域幅 $|\mathrm{supp}\ G|$ の積が一定値 (N) 以上であることを示しており，離散時間信号とその離散フーリエ変換の不確定性原理である．

一方，離散フーリエ変換に関して以下の不等式が成立する．

定理 2 [6)] N が素数であり，$g(n)$ が恒等的に 0 でないならば

$$|\mathrm{supp}\ g| + |\mathrm{supp}\ G| \geqq N+1 \tag{22}$$

この不等式は，信号の時間幅 $|\mathrm{supp}\ g|$ とその周波数スペクトルの帯域幅 $|\mathrm{supp}\ G|$ の和が一定値 $(N+1)$ 以上であることを示しており，これもある種の不確定性原理である．

さらに，以下のような量を定義する．

$$E_g = \sum_n |g(n)|^2 = \sum_k |G(k)|^2 \tag{23}$$

$$S_g^{\pm} = \frac{1}{E_g}\sum_n |g(n)|^2 \exp\left(\pm j\frac{2\pi}{N}n\right) \tag{24}$$

$$S_G^{\pm} = \frac{1}{E_g}\sum_k |G(k)|^2 \exp\left(\pm j\frac{2\pi}{N}k\right) \tag{25}$$

$$\sigma_g^2 = 1 - |S_g^{\pm}|^2 \tag{26}$$

$$\sigma_G^2 = 1 - |S_G^{\pm}|^2 \tag{27}$$

ここで，σ_g^2 は，信号 $g(n)$ の時間幅，σ_G^2 は周波数スペクトル $G(k)$ の帯域幅とみなすことができる．

長さ N の複素信号 $g(n)$ とその離散フーリエ変換 $G(k)$ に関して以下の不等式が成り立つ．

定理 3 [7)]

$$\left(\sigma_g^2 + \tan^2\frac{\pi}{N}\right)\left(\sigma_G^2 + \tan^2\frac{\pi}{N}\right) \tag{28}$$

$$\geqq \tan^2\frac{\pi}{N}\left(1 + \tan^2\frac{\pi}{N}\right) \tag{29}$$

この関係は，信号の時間幅とその周波数スペクトルの帯域幅の積（すこし余分な項もあるが）が一定値以上であることを示しており，離散時間信号とその離散フーリエ変換の不確定性原理である．

4. 位相限定相関関数の時間幅と周波数帯域幅

いま，長さ N の二つの複素信号 $x(n)$ と $y(n)$ の位相スペクトルが等しい場合を考える．このとき，前述のように，二つの位相スペクトルの差は $\alpha_k = 0$ であり，位相限定相関関数 $r(n)$ とその周波数スペクトル $R(k)$ は以下のようになっている．

$$r(n) = \left[\sqrt{N}, 0, 0, \cdots, 0\right] \tag{30}$$

$$R(k) = [1, 1, 1, \cdots, 1] \tag{31}$$

(30) 式から，複素信号 (位相限定相関関数)$r(n)$ の時間幅は極めて狭く，$R(k)$ の帯域幅は極めて広いという状態となっていることは明らかである．

これを不確定性原理の不等式を使って眺めてみる．定理 1, 2, 3 の式を評価すると以下の値が得られる．

- 定理 1 において

$$|\mathrm{supp}\ r| = 1 \tag{32}$$

$$|\mathrm{supp}\ R| = N \tag{33}$$

$$|\mathrm{supp}\ r||\mathrm{supp}\ R| = N \tag{34}$$

(21) 式の下限)

- 定理 2 において

$$|\mathrm{supp}\ r| = 1 \tag{35}$$

$$|\mathrm{supp}\ R| = N \tag{36}$$

$$|\mathrm{supp}\ r| + |\mathrm{supp}\ R| = N+1 \tag{37}$$

((22) 式の下限)

さらに，

$$E_g = N \tag{38}$$

$$S_r^{\pm} = 1 \tag{39}$$

$$S_R^{\pm} = 0 \tag{40}$$

$$\sigma_r^2 = 0 \tag{41}$$

$$\sigma_R^2 = 1 \tag{42}$$

となるので，

- 定理 3 において

$$\left(\sigma_r^2 + \tan^2\frac{\pi}{N}\right)\left(\sigma_R^2 + \tan^2\frac{\pi}{N}\right) \tag{43}$$

$$= \left(0 + \tan^2 \frac{\pi}{N}\right)\left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{N}\right) \quad (44)$$
$$= \tan^2 \frac{\pi}{N}\left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{N}\right) \quad (45)$$

((29) 式の下限)

以上の計算例から，位相スペクトルの差が 0 の場合，位相限定相関関数 $r(n)$ の時間幅と周波数スペクトルの帯域幅に関して以下のことが分かる．

- 位相限定相関関数 $r(n)$ の時間幅は最小である (32) 式，(35) 式，(41) 式が示している)．
- 位相限定相関関数の周波数スペクトル $R(k)$ の帯域幅は最大である (33) 式，(36)) 式，(42) 式が示している)．
- 位相限定相関関数 $r(n)$ の時間幅と周波数スペクトル $R(k)$ の帯域幅の積（あるいは和）は下限となっている．すなわち，不確定関係の不等式において等号が成り立っている (34) 式，(37) 式，(45) 式が示している)．

5. おわりに

本稿では，位相限定相関関数の性質を離散フーリエ変換の不確定性原理から眺めた．位相限定相関関数を用いて二つの信号が理想的にマッチングされる状態である位相スペクトルの差が 0 の場合，位相限定相関関数の時間幅は最小であり，位相限定相関関数の周波数スペクトルの帯域幅は最大となり，かつこれらの時間幅と帯域幅の積（あるいは和）は下限となり，不確定性の不等式の等号が成り立っているいることを明らかとした．

参考文献

1) C. D. Kuglin and D. C. Hines, The Phase Correlation Image Alignment Method, Proc. Int. Conf. Cybernetics and Society, 163/165 (1975).

2) G. Wolberg and S. Zokai, Rbust Image Registration Using Log-polar Transform, Proc. IEEE Int. Conf. on Image Processing, Vancouver, Canada, 493/496 (2000).

3) J. Z. H. Foroosh and M. Berthod, Extension of Phase Correlation to Subpixel Registration, IEEE Trans. Image Process, **11**-3,188/200 (2004).

4) K. Miyazawa, K. Ito, T. Aoki, K. Kobayashi, and H. Nakajima, An Effective Approach for Iris Recognition Using Phase-based Image Matching," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach.. Intell., **30**-10,1741/1756 (2008).

5) S. Yamaki, J. Odagiri, M. Abe, M. Kawamata, Effects for Stochastic Phase Spectrum Differenced on Phase-only Correlation Functions, Part I: Stationally Constant Phasse Spectrum Differences for Frequency Indices, Proc. f IEEE Int. Conf. on Network Infrastructure and Digital Content, 360/364 (2012).

6) Ostrowski Lecture: The uniform uncertainty principle and compressed sensing http://terrytao.wordpress.com/2007/04/15/ostrowski-lecture-the-uniform-uncertainty-principle-and-compressed-sensing/

7) G. W. Forbes and M. A. Alonso, Consistent analogs of the Fourier uncertainty relation, Am. J. Phys. **69**-10, 1091/1095 (2001).