

白色ガウス雑音による信号の位相変動を考慮した 位相限定相関関数の統計的解析

Statistical Analysis of Phase-Only Correlation Functions Considering the Phase Fluctuation of Signals due to the Effect of White Gaussian Noise

○福井一弘[†], 八巻俊輔[†], 阿部正英[†], 川又政征[†]

○Kazuhiro Fukui[†], Shunsuke Yamaki[†], Masahide Abe[†], Masayuki Kawamata[†]

[†]東北大学

[†]Tohoku University

キーワード : 相関関数 (correlation function), 位相限定相関 (phase-only correlation),
位相差 (phase difference), 位相スペクトル (phase spectrum)

連絡先 : 〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05 東北大学大学院工学研究科電子工学専攻
福井一弘, Tel.: (022)795-7095, Fax.: (022)263-9169, E-mail: fukui@mk.ecei.tohoku.ac.jp

1. はじめに

位相限定相関関数とは、2つの信号の位相差に着目した相関関数であり、振幅スペクトルを正規化した信号(位相限定信号)の相互相関関数として定義される。位相限定相関関数は相関関数に比べて鋭いピークを有するという特徴から、相関の度合いを評価する高精度な指標として、映像のフレーム間の位置ずれ補正^{1, 2)}、画像マッチング^{3, 4)}、生体認証アルゴリズム⁵⁾、周期性をもつDNA配列の探索⁶⁾などの幅広い分野において用いられてきた。

位相限定相関関数は、2つの信号の位相差が0のときデルタ関数になる。上記の応用例においては、この性質を応用の理論的根拠としてきた。しかし、実際の信号処理において2つの信号の位相差が0となることは非常にまれであり、多くの場合は、雑音の影響によって位相差が変動

している。このため、位相差が0のとき位相限定相関関数がデルタ関数になるという性質は実際の応用において利用することができない。種々の技術に位相限定相関関数を応用するにあたって、雑音による位相差の変動が位相限定相関関数に及ぼす影響を解析することが必要である。

本稿では、白色ガウス雑音によって位相差が変動する場合を仮定する。2つの信号の差が白色ガウス雑音である場合、この2つの信号の位相差の確率密度関数を求める。更に、位相差の確率密度関数を用いて位相限定相関関数の期待値と分散の式を求める。最後に、白色位相限定相関関数ガウス雑音の分散の増加に対して位相限定相関関数の期待値が減少し、位相限定相関関数の分散が増加すること示す。この結果より、位相限定相関関数が、2つの信号の類似性を評価する指標として適切であることを示す。

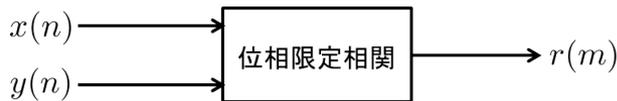


Fig. 1 位相限定相関のブロック図

2. 位相限定相関関数の定義と主な性質

本節では、位相限定相関関数の定義と主な性質について述べる。図1に示すように、2つの信号 $x(n)$ と $y(n)$ から位相限定相関関数 $r(m)$ を求める計算方法を以降に示す。まず、信号長 N の2つの複素信号 $x(n)$ と $y(n)$ の離散フーリエ変換 $X(k)$ と $Y(k)$ を以下に定義する。

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = |X(k)|e^{j\theta_k} \quad (1)$$

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = |Y(k)|e^{j\phi_k} \quad (2)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

ここで、 $|X(k)|$ と $|Y(k)|$ はそれぞれ $x(n)$ と $y(n)$ の振幅スペクトルであり、 θ_k と ϕ_k はそれぞれ $x(n)$ と $y(n)$ の位相スペクトルである。

次に、振幅スペクトルを正規化した信号(位相限定信号)を定義する。信号 $x(n)$ と $y(n)$ それぞれの位相限定信号 $\hat{x}(n)$ と $\hat{y}(n)$ は

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\theta_k} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3)$$

$$\hat{y}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\phi_k} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (4)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

で定義される。位相限定相関関数は、2つの位相限定信号の相互相関関数として以下のように定義される。

$$\begin{aligned} r(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}^*(n)\hat{y}(n+m)_N \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\theta_k} e^{j\phi_k} e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(\phi_k - \theta_k)} e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\alpha_k} e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \quad (5) \end{aligned}$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

ここで、記号 $()_N$ は modulo N を表す。 θ_k と ϕ_k はそれぞれ信号 $x(n)$ と $y(n)$ の位相スペクトルであり、 $\alpha_k = \phi_k - \theta_k$ は2つの信号の位相差(位相スペクトルの差)である。また、 $\exp(j\alpha_k)$ を位相因子と呼ぶ。式(5)より、位相限定相関関数 $r(m)$ は位相因子 $\exp(j\alpha_k)$ の離散フーリエ逆変換(IDFT)で与えられることがわかる。

特に、信号 $x(n)$ の位相スペクトル θ_k と信号 $y(n)$ の位相スペクトル ϕ_k が等しいとき(たとえば、特別な場合として $y(n) = x(n)$ であるとき)、 $x(n)$ と $y(n)$ の位相差は $\alpha_k = 0$ であり、位相限定相関関数 $r(m)$ は

$$\begin{aligned} r(m) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\alpha_k} e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \\ &= \delta(m) \\ &= \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (6) \end{aligned}$$

となり、デルタ関数となる。

位相限定相関関数は、振幅スペクトルを正規化した信号の相関をとるという点で、通常の相関関数とは異なる優れた性質を持つ。自然画像をはじめ多くの信号は、低周波数成分に振幅スペクトルが集中している場合が多い。従って、振幅スペクトルを正規化することにより、高周波数成分を強調し、信号の輪郭を強調することが

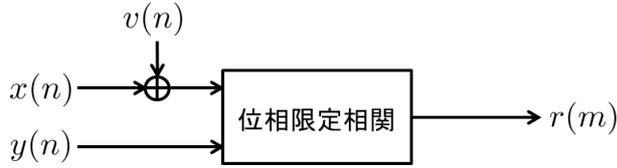


Fig. 2 位相限定相関のブロック図 (一方の信号に雑音加わる場合)

できる. 位相限定相関関数は, 振幅スペクトルの正規化により信号の輪郭形状を強調できるので, 2つの信号の位置ずれ量やマッチング度合いを通常の相関関数よりも高精度に評価することができる.

3. ガウス雑音による位相差の確率的変動

前節において, 2つの信号の位相スペクトルが等しいとき位相限定相関関数はデルタ関数になることを述べたが, 実際の応用において2つの信号の位相スペクトルが等しくなることはほとんどない. これは, 図2に示すように, 信号に雑音加わることによって位相差が変動することによるものであると考えられる.

本節では, 雑音の影響による位相差の変動について述べる. はじめに, 単一スペクトルの信号に狭帯域ガウス雑音加わった場合における位相変動について述べる. 次に, 複数のスペクトルを持つ信号に白色ガウス雑音加わった場合における位相変動について述べる.

3.1 単一スペクトル信号と狭帯域ガウス雑音との和信号の位相

本節では, 単一スペクトル信号に狭帯域ガウス雑音加わった場合における信号の位相変動について述べる. 狭帯域ガウス雑音とは, 定常性を満たし, 周波数帯域が中心周波数付近に集中しているガウス雑音のことである.

単一スペクトルの実正弦波信号 $x(n)$ を

$$x(n) = X \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \theta\right) \quad (7)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

とする. ここで, N と k はそれぞれ, 信号長と周波数インデックスであり, X と θ はそれぞれ信号 $x(n)$ の振幅と位相である.

次に, 狭帯域ガウス雑音 $v(n)$ を以下のように定義する¹⁾.

$$v(n) = v_c(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - v_s(n) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \quad (8)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

ここで, $v_c(n)$ と $v_s(n)$ はともに平均0, 分散 σ^2 のガウス分布に従う確率変数であり, 互いに得率であるとする. すなわち

$$E[v_c(n)] = E[v_s(n)] = 0 \quad (9)$$

$$\text{Var}[v_c(n)] = \text{Var}[v_s(n)] = \sigma^2 \quad (10)$$

である. これより

$$E[v(n)] = 0 \quad (11)$$

$$\text{Var}[v(n)] = \sigma^2 \quad (12)$$

が導ける. このような狭帯域ガウス雑音 $v(n)$ が単一スペクトルの実正弦波信号 $x(n)$ に加わったとき, その和信号 $y(n)$ は

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) + v(n) \\ &= X \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \theta\right) \\ &\quad + v_c(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - v_s(n) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\ &= \{X \cos \theta + v_c(n)\} \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\ &\quad - \{X \sin \theta + v_s(n)\} \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\ &= y_c(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - y_s(n) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \\ &= Y(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \phi(n)\right) \end{aligned} \quad (13)$$

と書ける. ここで, $Y(n)$ と $\phi(n)$ はそれぞれ $y(n)$ の振幅および位相であり,

$$Y(n) = \sqrt{y_c^2(n) + y_s^2(n)} \quad (14)$$

$$\phi(n) = \tan^{-1} \left(\frac{y_s(n)}{y_c(n)} \right) \quad (15)$$

である. このとき, $y_c(n)$ と $y_s(n)$ の結合確率密度関数は

$$p(y_c(n), y_s(n)) = \frac{1}{2\pi} \frac{\exp \left[-\frac{(y_c(n) - X \cos \theta)^2}{2\sigma^2} \right]}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\exp \left[-\frac{(y_s(n) - X \sin \theta)^2}{2\sigma^2} \right]}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (16)$$

となる. これは, $v_c(n)$ と $v_s(n)$ が, 平均 0 で分散 σ^2 のガウス分布に従う確率変数であること, および独立性の仮定から求まる. また, 変数変換より $Y(n)$ と $\phi(n)$ の結合確率密度関数を求めると,

$$p(Y(n), \phi(n)) = \frac{Y(n)}{4\pi^2\sigma^2} \exp \left[-\frac{Y^2(n) + X^2 - 2XY(n) \cos(\phi(n) - \theta)}{2\sigma^2} \right] \quad (17)$$

となる. 更に, 振幅 $Y(n)$ で積分することで $\phi(n)$ の確率密度関数を求めると以下のようなになる⁷⁾.

$$p(\phi(n)) = \int_0^\infty p(Y(n), \phi(n)) dY(n) = \frac{X \cos(\phi(n) - \theta)}{\sigma (2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{X^2 \sin^2(\phi(n) - \theta)}{\sigma^2} \right] \quad (18)$$

ここで, $\phi(n) - \theta$ は信号 $y(n)$ と $x(n)$ の位相差であり, X は $x(n)$ の振幅, σ^2 は $v(n)$ の分散である. 式 (16) より, 単一スペクトル信号と狭帯域ガウス雑音の和信号の位相の確率密度関数は, 単一スペクトル信号 $x(n)$ の振幅 X と, 狭帯域ガウス雑音 $v(n)$ の標準偏差 σ との比 X/σ で決まることが分かる.

3.2 複数のスペクトルを持つ信号と白色ガウス雑音との和信号の位相

前節では, 単一周波数の正弦波信号に狭帯域ガウス雑音を加わったときの位相変動について述べた. 本節では, より一般的に複数の周波数スペクトルが存在する信号に白色ガウス雑音を加わったとき (図 2 参照) の位相変動について述べる. 複数の周波数スペクトルを持つ信号 $x(n)$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)| e^{j\theta_k} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (19)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$

と表される. ここで, $|X(k)|$ と θ_k はそれぞれ信号 $x(n)$ の振幅スペクトル, 位相スペクトルである. 更に, 信号 $x(n)$ が実信号であるとき,

$$X(k) = X^*(N-k) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + X(N-k) e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)n} \\ &= |X(k)| e^{j\theta_k} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + |X(k)| e^{-j\theta_k} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} e^{j2\pi n} \\ &= |X(k)| e^{j(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k)} + |X(k)| e^{-j(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k)} \\ &= 2|X(k)| \cos \left(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k \right) \quad (21) \\ & \left(k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

となる. 従って, 実信号 $x(n)$ は正弦波の重ね合わせとして

$$x(n) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} |X(k)| \cos \left(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k \right) \quad (22)$$

と書ける*.

同様に, 白色ガウス雑音 $v(n)$ は狭帯域ガウス雑音の重ね合わせとして,

$$v(n) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} |V(k)| \cos \left(\frac{2\pi}{N}kn + \xi_k \right) \quad (23)$$

*直流成分を 0 としているが, このようにしても一般性は失わない.

と書ける。したがって、正弦波信号 $x(n)$ と雑音 $v(n)$ の和信号 $y(n)$ は、以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 y(n) &= x(n) + v(n) \\
 &= \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} |X(k)| \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k\right) \\
 &\quad + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} |V(k)| \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \xi_k\right) \\
 &= \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} |Y(k)| \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \phi_k\right)
 \end{aligned} \tag{24}$$

ここで、信号 $x(n)$ と白色ガウス雑音 $v(n)$ の和信号 $y(n)$ について、 $y(n)$ のそれぞれの周波数成分についてみれば、前節で述べたような単一スペクトル信号と狭帯域ガウス雑音との和信号である。従って、 $y(n)$ と $x(n)$ の位相スペクトル差 (それぞれの周波数インデックス k での位相差) の確率密度関数は、前節の結果を用いて

$$\begin{aligned}
 p(\phi_k - \theta_k) &= \frac{|X(k)| \cos(\phi_k - \theta_k)}{\sigma (2\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \\
 &\quad \exp\left[-\frac{|X(k)|^2 \sin^2(\phi_k - \theta_k)}{\sigma^2} \frac{1}{2}\right]
 \end{aligned} \tag{25}$$

と書ける。ここで、 σ^2 は、 $v(n)$ のそれぞれの周波数インデックス k における分散である。 $v(n)$ の分散を σ_w^2 とすれば

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sigma_w^2 \tag{26}$$

の関係がある。式 (23) より、複数のスペクトルをもつ信号と白色ガウス雑音の和信号の位相の確率密度関数は、信号 $x(n)$ の振幅スペクトル $|X(k)|$ と、白色ガウス雑音 $v(n)$ の標準偏差 σ_w との比 $\sqrt{N}|X(k)|/\sigma_w$ で決まることが分かる。

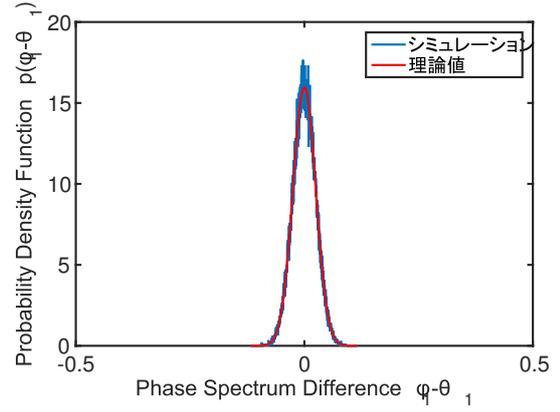


Fig. 3 $k = 1$ における位相差 $\phi_1 - \theta_1$ の確率密度関数とシミュレーション値

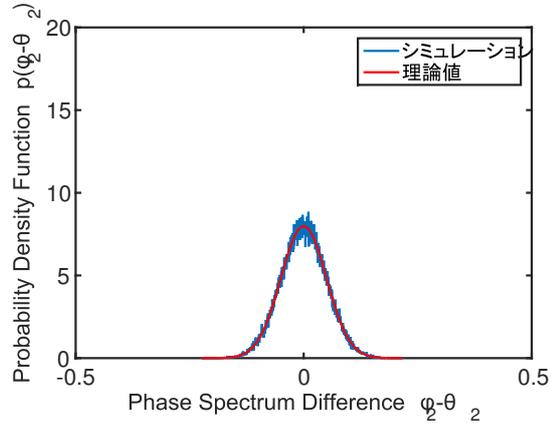


Fig. 4 $k = 2$ における位相差 $\phi_2 - \theta_2$ の確率密度関数とシミュレーション値

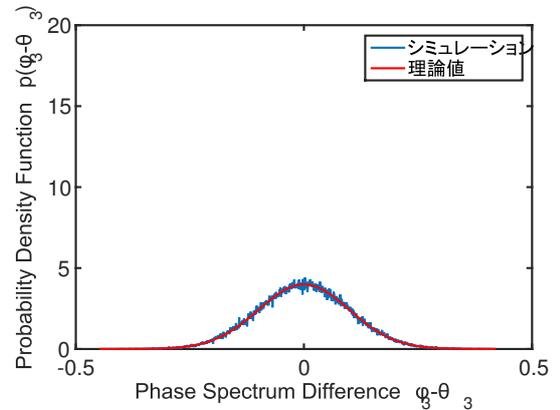


Fig. 5 $k = 3$ における位相差 $\phi_3 - \theta_3$ の確率密度関数とシミュレーション値

4. 位相限定相関関数の統計的性質

例として、複数のスペクトルを持つ信号

$$\begin{aligned} x(n) &= \cos\left(\frac{2\pi}{32}n\right) + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{32}2n\right) \\ &\quad + 0.25 \cos\left(\frac{2\pi}{32}3n\right) \quad (27) \\ &\quad (n = 0, 1, 2, \dots, 31) \end{aligned}$$

に、平均0で分散0.01の白色ガウス雑音 $v(n)$ が加わった場合を考える。信号 $x(n)$ と白色ガウス雑音 $v(n)$ の和信号を $y(n)$ としたとき、 $y(n)$ と $x(n)$ との位相差 $\phi_k - \theta_k$ の確率密度関数をそれぞれの周波数成分 ($k = 1, 2, 3$) について求めた。図3から図5に理論値とシミュレーション値を示す。図3から図5を比較すると、信号の振幅スペクトルが最も大きい $k = 1$ 成分において位相差の分散は最も小さくなり、信号の振幅スペクトルが最も小さい $k = 3$ 成分において位相差の分散は最も大きくなっていることが見て取れる。この結果から、雑音の分散に対して信号の振幅スペクトルが相対的に大きい周波数成分においては位相差の変動が小さく、逆に雑音の分散に対して信号のスペクトルが相対的に小さい周波数成分においては位相差の変動が大きいことが言える。

前節では、信号に白色ガウス雑音加わった場合の2つの信号の位相差の確率密度関数を導出した。本節では、位相差の確率密度関数を用いて、位相限定相関関数の期待値と分散を導出する。

4.1 位相因子の期待値と分散

位相因子 α_k の期待値と分散をそれぞれ

$$A_k = E[e^{j\alpha_k}] \quad (28)$$

$$V_k = \text{Var}[e^{j\alpha_k}] \quad (29)$$

とおく。ここで位相因子の分散 V_k は、位相因子の期待値 $E[e^{j\alpha_k}]$ を用いて

$$\begin{aligned} V_k &= \text{Var}[e^{j\alpha_k}] \\ &= E[e^{j\alpha_k} (e^{j\alpha_k})^*] - E[e^{j\alpha_k}] E[e^{j\alpha_k}]^* \\ &= E[e^{j0}] - E[e^{j\alpha_k}] E[e^{j\alpha_k}]^* \\ &= 1 - A_k A_k^* \quad (30) \\ &\quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \end{aligned}$$

と表される。

4.2 位相限定相関関数の期待値

位相限定相関関数の期待値 $E[r(m)]$ は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} E[r(m)] &= E\left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\alpha_k} e^{j\frac{2\pi}{N}mk}\right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E[e^{j\alpha_k}] e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \\ &= \text{IDFT}[A_k] \quad (31) \\ &\quad (m = 0, 1, 2, \dots, N-1) \end{aligned}$$

式(31)より、位相限定相関関数の期待値 $E[r(m)]$ は位相因子の期待値 A_k の離散フーリエ逆変換で求められることが分かる。

特に、 A_k が周波数インデックス k に依存しない定数 A のとき、位相限定相関関数の期待値は

$$\begin{aligned} E[r(m)] &= A \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \\ &= A\delta(m) \\ &= \begin{cases} A & (m = 0) \\ 0 & (m = 1, 2, \dots, N-1) \end{cases} \quad (32) \end{aligned}$$

と求まる。

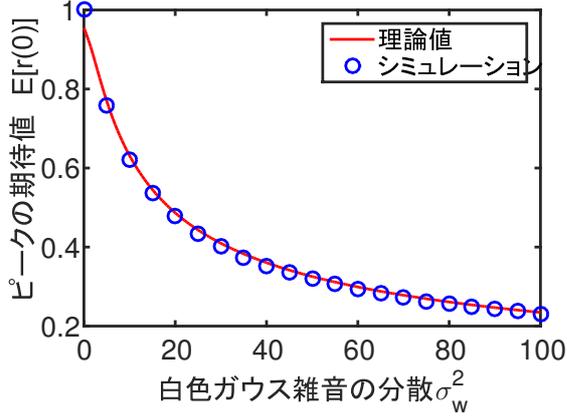


Fig. 6 白色ガウス雑音の分散 σ_w の増加に対する位相限定相関関数の期待値

4.3 位相限定相関関数の分散

位相限定相関関数の分散 $\text{Var}[r(m)]$ は

$$\begin{aligned} & \text{Var}[r(m)] \\ &= \text{E} [(r(m) - \text{E}[r(m)])(r(m) - \text{E}[r(m)])^*] \\ &= \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k A_k^* \right) \end{aligned} \quad (33)$$

と表される．ここで，位相因子の期待値 A_k が周波数インデックス k に依存しない場合に限り，位相限定相関関数の分散 $\text{Var}[r(m)]$ は

$$\begin{aligned} \text{Var}[r(m)] &= \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A A^* \right) \\ &= \frac{1}{N} (1 - A A^*) \end{aligned} \quad (34)$$

と求められる．

4.4 位相差の確率密度関数を用いた位相因子の期待値の導出

位相因子の期待値 $\text{E}[e^{j\alpha_k}]$ は，位相差 α_k の確率密度関数 $p(\alpha_k)$ を用いて，

$$\text{E}[e^{j\alpha_k}] = \int_{-\pi}^{\pi} p(\alpha_k) e^{j\alpha_k} d\alpha_k \quad (35)$$

と書ける．ここで，式 (35) の $p(\alpha_k)$ に，前節で求めた位相差の確率密度関数の式 (25) を代入す

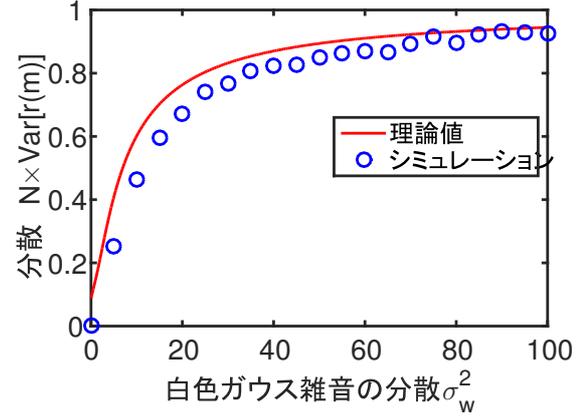


Fig. 7 白色ガウス雑音の分散 σ_w の増加に対する位相限定相関関数の分散

ると，

$$\begin{aligned} \text{E}[e^{j\alpha_k}] &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|X(k)| \cos(\alpha_k)}{\sigma (2\pi)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad \exp \left[-\frac{|X(k)|^2 \sin^2(\alpha_k)}{\sigma^2} \right] e^{j\alpha_k} d\alpha_k \end{aligned} \quad (36)$$

となり，位相因子 $e^{j\alpha_k}$ の期待値 $\text{E}[e^{j\alpha_k}]$ が，位相差 α_k の確率密度関数 $p(\alpha_k)$ から求めることができる．これより，位相限定相関関数の期待値 $\text{E}[r(m)]$ と分散 $\text{Var}[r(m)]$ を，位相差の確率密度関数 $p(\alpha_k)$ を用いて表すことができる．ただし，現段階で式 (31) を閉じた形 (積分でない形式) で導出できていないため，数値積分によって位相限定相関関数の期待値と分散を求めた．式 (35) の数値積分において，信号の振幅スペクトルは $|X(k)| = 1$ とした．また，数値積分の値と比較するために，実際の信号 (信号長 $N = 32$ で，振幅スペクトル $|X(k)| = 1$) に白色ガウス雑音を加えたときの，位相限定相関関数の期待値と分散を計算した．白色ガウス雑音の分散 σ_w^2 を増加させたときの，位相限定相関関数 $r(m)$ のピークの期待値 $\text{E}[r(0)]$ と分散 $\text{Var}[r(m)]$ を図 6 と図 7 にそれぞれ示す．図 6 と図 7 より，一方の信号に加わる白色ガウス雑音の分散 σ_w が大きくなるほど，位相限定相関関数 $r(m)$ のピークの期待値は小さくなり，分散は大きくなること分かる．これより，位相限定相関関数のピー

クが2つの信号の類似の度合いを示す指標として有効であると言える。

5. おわりに

本稿では、白色ガウス雑音による信号の位相変動を考慮した位相限定相関関数の統計的解析を行った。まず、単一スペクトル信号に狭帯域ガウス雑音が加わった場合における、2つの信号の位相差の確率密度関数を求めた。次に、複数のスペクトルを持つ信号に白色ガウス雑音を加わった場合における、周波数インデックスごとの位相差の確率密度関数を求め、この結果から白色ガウス雑音の分散に対して、信号の振幅スペクトルが相対的に小さいほど、位相差の変動が大きくなることを示した。最後に、位相限定相関関数の期待値と分散を、位相差の確率密度関数を用いて表すことで、一方の信号に加わる白色ガウス雑音の分散が大きいかほど位相限定相関関数の期待値は減少し、分散は増加することを示した。以上より、位相限定相関関数が2つの信号の類似性を評価する指標として有効であることが示される。

参考文献

- 1) M. Hagiwara, M. Abe and M. Kawamata: Estimation method of frame displacement for old films using phase-only correlation, *Journal of Signal Processing*, 8-5, 421/429 (2004)
- 2) 阿部 正英, 中山 章太, 川又 政征: 風景画像のタイムラプス映像における画像の安定化: 計測自動制御学会東北支部 50 周年記念学術講演会, A-102, 5/8 (2014)
- 3) C. D. Kuglin, D. C. Hines: The phase correlation image alignment method, *Proc. Int. Conf. Cybernetics and Society*, 163/165 (1975)
- 4) H. Foroosh, J. Zerubia and M. Berthod: Extension of phase correlation to subpixel registration, *IEEE Trans. Image Process*, 11-3, 188/200 (2002)
- 5) K. Miyazawa, K. Ito, T. Aoki, K. Kobayashi and H. Nakajima: An effective approach for iris recognition using phase-based image matching, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 30-10, 1741/1756 (2008)
- 6) A. K. Brodzik: Phase-only filtering for the masses(of DNA data); A new approach to sequence alignment, *IEEE Trans. Signal Processing*, 54-6, 2456/2466 (2006)
- 7) W. B. Davenport Jr. and W. L. Root: An introduction to the theory of random signals and noise, McGraw-Hill Book Company Inc. (1958)
- 8) K. Kobayashi, H. Nakajima, T. Aoki, M. Kawamata and T. Higuchi: Principles of phase only correlaton and its applications, *ITE Technical Report*, 20-41, 1/6 (1996)
- 9) S. Yamaki, M. Abe and M. Kawamata: Statistical analysis of phase-only correlation functions based on directional statistics, *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E97E-12, 2601/2610 (2014)
- 10) S. Yamaki, J. Odagiri, M. Abe and M. Kawamata: Effects of stochastic phase spectrum differences on phase-only correlation functions — Part1: Statistically constant phase spectrum differences for frequency indices —, *Proceedings of IEEE International Conference on Network Infrastructure and Digital Content*, 360/364 (2012)
- 11) R. Ito, S. Yamaki, M. Abe and M. Kawamata: Effects of stochastic phase spectrum differences on phase-only correlation functions — Part2: Statistically proportional phase spectrum differences to frequency indices —, *Proceedings of IEEE International Conference on Network Infrastructure and Digital Content*, 380/384 (2012)
- 12) 伊藤 理人, 八巻 俊輔, 阿部 正英, 川又 政征: 位相スペクトル差の確率的変動の位相限定相関関数に対する影響の解析, 第 25 回回路とシステムワークショップ論文集, 88/93 (2012)
- 13) 小田切 潤, 八巻 俊輔, 阿部 正英, 川又 政征: 位相スペクトル差の確率的変動に対する位相限定相関関数の挙動, 第 26 回信号処理シンポジウム講演論文集, 222/227 (2011)
- 14) 八巻 俊輔, 阿部 正英, 川又 政征: 方向統計学を用いた位相限定相関関数の統計的解析, 電子情報通信学会技術研究報告, CAS2012-122, SIP2012-153, CS2012-128, 149/154 (2013)