

グラフ理論による 2 次元システムの最小実現

Minimal Realization of 2-D Systems based on Graph Theory

○ 蒔田隼也*, 松下慎也*, 徐粒*

○ Junya Makita*, Shin-ya Matsushita*, Li Xu*

*秋田県立大学

*Akita Prefectural University

キーワード : 実現問題 (realization problem), グラフ理論 (graph theory), MRSA 問題 (minimum rectilinear Steiner arborescence problem)

連絡先 : 〒 015-0055 秋田県由利本荘市土谷字海老ノ口 84-4 秋田県立大学大学院システム科学技術研究科 電子情報システム学専攻 制御工学研究室 蒔田隼也, Tel: (0184)27-2101, E-mail: m17b014@akita-pu.ac.jp

1. 背景

与えられた多次元 (n -D) システムの伝達関数からその状態空間方程式を求める実現問題は, システムの不確かさの LFR (線形分数表現) を求める問題と代数的に等価であり, 多次元信号を処理するフィルタの設計や航空機などの複雑なシステムで用いられるロバスト制御の分野に応用できる基礎的な研究課題である¹⁾²⁾.

実現問題では, 求められた状態空間方程式の係数行列のサイズが最小になる最小実現が望まれている. しかし従来の 1-D システムと異なり, n -D システムの実現の次数 (サイズ) は伝達関数の次数のみならず, その構造及び係数値にも依存するため極めて困難な問題である¹⁾²⁾. そのため本研究では, グラフ理論の MRSA (Minimum Rectilinear Steiner Arborescence) 問題と 2-D 最小実現問題の関連性を解明した上, 2-D 最小実現問題の計算複雑さの評価を行うとともに, MRSA 問題の求解アルゴリズムを 2-D 最小実現問題に適用しその有効性を検証する.

2. Roesser モデルによる 2-D システムの実現問題

システムは伝達関数と状態空間方程式によって表現することができる. 2-D システムの Roesser 状態空間モデルは次式で与えられる.

$$x'(i_1, i_2) = Ax(i_1, i_2) + Bu(i_1, i_2) \quad (1)$$

$$y(i_1, i_2) = Cx(i_1, i_2) + Du(i_1, i_2) \quad (2)$$

$$x'(i_1, i_2) = \begin{bmatrix} x_1(i_1 + 1, i_2) \\ x_2(i_1, i_2 + 1) \end{bmatrix}, \quad x(i_1, i_2) = \begin{bmatrix} x_1(i_1, i_2) \\ x_2(i_1, i_2) \end{bmatrix}$$

ただし, A, B, C, D は適切なサイズの係数行列, $u(i_1, i_2)$ は入力, $y(i_1, i_2)$ は出力, $x_k(i_1, i_2) \in \mathbb{R}^{r_k}, k = 1, 2$ はサブ状態ベクトルを表す.

Roesser モデルの伝達関数を以下に示す.

$$G(z_1, z_2) = CZ(I_r - AZ)^{-1}B + D \quad (3)$$

ここで, $Z = \text{diag}(z_1 I_{r_1}, z_2 I_{r_2}), r = r_1 + r_2$ である.

伝達関数 $G(z_1, z_2) = n(z_1, z_2)/d(z_1, z_2)$ が与えられたとき, (3) 式を満たす A, B, C, D, r を求

めることを, 2-D システム $G(z_1, z_2)$ の Roesser モデル実現問題という. すべての可能な実現の中で, r が最小となるものを最小実現という.

3. 2-D Roesser モデル直接実現法の構築条件

$G(z_1, z_2)$ の分子, 分母多項式 $n(z_1, z_2), d(z_1, z_2)$ は一般性を失わずに, 条件 $n(0, 0) = 0, d(0, 0) \neq 0$ を満たすとする. 直接実現法¹⁾²⁾では,

$$\begin{aligned} n(z_1, z_2) &= N_{HT}Z\Psi, \quad d(z_1, z_2) = D_{HT}Z\Psi, \\ \Psi &= A_0Z\Psi + B \end{aligned}$$

を満たす 2-D 単項式または多項式ベクトル Ψ を構築することができれば, 以下のように実現が求められる¹⁾.

$$A = A_0 + BD_{HT}, \quad B, C = N_{HT}, \quad D = 0 \quad (4)$$

N_{HT}, D_{HT} は $n(z_1, z_2), d(z_1, z_2)$ の係数からなる行列である. 2-D 実現問題の構造依存性のみを考える場合, (4) 式を満たす 2-D 単項式の Ψ が存在する条件は以下のように与えられている¹⁾²⁾.

- (a) $Z\Psi$ には伝達関数 $G(z_1, z_2)$ に現れる全ての累乗が含まれる.
- (b) Ψ の要素に少なくとも 1 つの定数項が含まれる.
- (c) Ψ の定数項以外の要素は, 別の要素に z_i ($i \in \{1, 2\}$) を掛けることで作られる.

4. MRSA (Minimum Rectilinear Steiner Arborescence) 問題

グラフは, 点あるいは頂点と呼ばれる要素の有限集合 V と辺と呼ばれる V の相異なる 2 つの要素の対を要素とする有限集合 E から構成される.

MRSA 問題は以下のように定義され, ビルの最短配管経路問題や VLSI の配線経路設計などに応用できる³⁾. 座標平面の第一象限上において, 原点 S_1 と n 個の与えられた端子 S_i ($i = 2, \dots, n$) からなる端子集合 S を考える. 原点を根として各端子へマンハッタン距離が最短となるように水平及び垂直線分で構成された根付木を RSA といい, その総線分長が最小となる RSA を MRSA という. MRSA 問題は NP 完全問題であることが証明されている³⁾. 以下で代表的な近似アルゴリズム⁴⁾⁵⁾と最適化アルゴリズム⁵⁾を紹介する. 近似アルゴリズムは最適解の高々 2 倍であり, 計算時間はそれぞれ $O(n \log n), O(n^3 2^n)$ である.

4.1 近似アルゴリズム⁴⁾⁵⁾

$p = (x_p, y_p), q = (x_q, y_q)$ とする. $(\min\{x_p, x_q\}, \min\{y_p, y_q\})$ のとき, $\langle p, q \rangle$ と表す. また $x_q \leq x_p, y_q \leq y_p$ ($q \neq p$) であるとき, $q \prec p$ と表す. この場合, q から p へマンハッタン距離が最小となる接続を $q \rightsquigarrow p$ と表し, その長さを $|q \rightsquigarrow p|$ で表す.

S の各端子を n 個の部分木として, ボトムアップで RSA を構築する. $\langle p, q \rangle$ が原点から最も遠くなる部分木の根のペア p, q の merges を繰り返す. 整数 $x + y = K$ 以上である部分木の根の集合 P , その初期値を $P = \phi, K = \infty$ とする. 以下の条件のうち K' ($K' < K$) がより大きい m を見つける. 繰り返し毎に K は $|m|$ の値に更新され, $K = 0$ となる時終了する.

・ CASE1-TERMINAL MERGER

$$\exists m \in S - P, |m| = K'$$

・ CASE2-STEINER MERGER

$$\begin{aligned} \exists m_E, m_N \in P (m_E \neq m_N), m = \langle m_E, m_N \rangle, \\ |m| = K' \end{aligned}$$

m はそれぞれ the terminal merging point, the Steiner merging point と呼ばれ, その部分木構築はそれぞれ ACTION1, ACTION2 に従う.

- ・ ACTION1- TERMINAL MERGER

$$T \leftarrow T + \{m \rightsquigarrow p | p \in P_{\succ}(m)\}$$

$$P \leftarrow P - P_{\succ}(m) + \{m\}$$

- ・ ACTION2- STEINER MERGER

$$T \leftarrow T + \{m \rightsquigarrow m_N, m \rightsquigarrow m_E\}$$

$$P \leftarrow P - \{m_N, m_E\} + \{m\}$$

T は K 以上で構築された部分木の集合, $P_{\succ}(m)$ は集合 P に含まれる要素の中で $x_m \leq x_p, y_m \leq y_p$ を満たす集合を表す.

4.2 最適化アルゴリズム⁵⁾

近似アルゴリズムの STEINER MERGER は最適であることが保障されていないため, MERGE と SKIP の2通り考える. また T の長さ L を用いた部分問題 $triple(P, K, L)$ とし, 同じ部分問題を重複しないよう履歴管理を行う. 部分問題の初期値は $(\phi, \infty, 0)$ で, K が大きいものから近似アルゴリズムで示した方法で m を見つけ以下のように更新する.

- ・ ACTION1- TERMINAL MERGER

$$creat(P - P_{\succ}(m) + \{m\}, |m|,$$

$$L + \sum_{p \in P_{\succ}(m)} |m \rightsquigarrow p|)$$

- ・ ACTION2- STEINER MERGER

*ACTION2.MERGE

$$creat(P - \{m_N, m_E\}, |m|, L + |m \rightsquigarrow m_N| + |m \rightsquigarrow m_E|)$$

*ACTION2.SKIP

$$(P, |m|, L)$$

2つの部分問題 $(P, K, L), (P, K, L')$ において, P, K が等しく $L < L'$ であるとき (P, K, L') は最適ではないため削除する.

また以下の条件を満たすとき, その部分問題は無視できる.

- ・ Pruning Criterion 1- TERMINAL MERGER

$|P_{\succ}(m)| > 2$ もしくは $|P_{\succ}(m)| = 2$ の2点がそれぞれ $x = x_m$ と $y = y_m$ 上の点ではない.

- ・ Pruning Criterion 2 - STEINER MERGER

P に含まれる m_N と m_E は隣り合わない.

5. 2-D 最小実現問題と MRSA 問題の関連性

構造依存性のみを考える, すなわち直接実現法における 2-D 単項式ベクトル Ψ の構築条件は MRSA 問題に帰着できることを示す. 任意の項 $z_1^x z_2^y$ は, 座標平面上の点 (x, y) で表現する. 以下の条件は直接実現法 Ψ 構築条件を座標平面で表現したものである.

条件の帰着:

- 伝達関数に現れるすべての累乗に対して点 (x, y) が存在する.
- 原点 $(0, 0)$ が存在する.
- 原点以外の点は, 他の点を x 軸もしくは y 軸の正方向に 1 移動して作られる.

条件 (c) の 2 点を線分をつないだとき, 原点から伝達関数の全ての項を含む RSA が作成される. 従って構造のみを考慮した 2-D 最小実現問題は MRSA 問題に帰着され, NP 完全問題であることが同様に証明できる.

6. グラフ理論による実現問題

2-D 実現問題にグラフ理論のアルゴリズムが直接適用できないため以下の処理を行う必要がある.

step1. 伝達関数の各独立変数の次数を座標として変換する.

step2. グラフ理論のアルゴリズムを実行し, 経路は x 軸方向に延びる線分を L_1 , y 軸方向に延びる線分を L_2 に分けて格納する. ここで Ψ に対応させるためその線分を長さ 1 の線分に区切り, その始点となる座標を格納するとする.

step3. 経路 L_1 から Ψ_1 , 経路 L_2 から Ψ_2 を導出する.

step4. 実現 A, B, C を導出する.

7. 実行例

構造依存性を考慮した伝達関数である (5) 式を考える.

$$G(z_1, z_2) = \frac{z_1 + z_1 z_2^2 + z_1^3}{1 + z_1 + z_1 z_2^2 + z_1^3} \quad (5)$$

この伝達関数に対して, グラフ理論のアルゴリズムを適用し実現を求める.

step1. 与えられた伝達関数 $G(z_1, z_2)$ で現れる各項の独立変数の次数を座標とすると,

$$S = \{(0, 0), (1, 0), (1, 2), (3, 0)\}$$

となる.

step2. 最適化アルゴリズムを実行し導出された線分を長さ 1 に区切り, 水平線分と垂直線分はそれぞれ $L1, L2$ に格納すると,

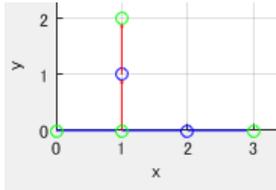


Fig. 1 最適化アルゴリズム実行結果

$$L1 = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$$

$$L2 = \{(1, 0), (1, 1)\}$$

となる.

step3. x と y をそれぞれ z_1, z_2 の独立変数の次数として, 経路 $L1$ から Ψ_1 , 経路 $L2$ から Ψ_2 を導出すると,

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \Psi_2 = \begin{bmatrix} z_1 z_2 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

step4. Ψ から実現 A, B, C を導出する.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

グラフ理論のアルゴリズムでは与えられた点の個数によって計算時間が変化するため, 項の個数毎に任意の伝達関数を 3 つ作成し, 1 から 40 まで増加させる測定を行った. 伝達関数の独立変数の次数は乱数で作成した. 最適化アルゴリズムの実現次数は, 従来の方法と比較すると約 37% 低くなる改善が得られた. また近似アルゴリズムの実現次数は, 最適化アルゴリズムの実現次数との差が約 2% であり従来の方法より良いことが分かる. 計算時間は最適化アルゴリズム, 近似アルゴリズム共に従来の方法と比較すると約 99% 短縮された. 最適化アルゴリズムでは, 最大で $O(n^3 2^n)$ であり指数的な増加となるため, 用途に応じてアルゴリズムを使い分ける必要がある.

8. 結論

本研究ではグラフ理論 MRSA 問題を用いて 2-D 最小実現問題の複雑さを証明した. またグラフ理論のアルゴリズムを 2-D 実現問題に適用し従来の方法である構造のみを考慮した直接実現法アルゴリズムと比較することでその有効性について検証した.

今後の課題として伝達関数の係数値を考慮した 2-D 最小実現問題を新たなタイプの RSA に帰着することが挙げられる.

参考文献

- 1) Li Xu, Huijin Fan, Zhiping Lin, N. K. Bose: A direct-construction approach to multidimensional realization and LFR uncertainty modeling, *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 19, 323/359, (2008)
- 2) 吉野 裕一: 代数的な 2D Roesser モデルの実現法, 秋田県立大学卒業論文, (2005)
- 3) W. Shi, C. Su: The rectilinear Steiner arborescence problem is NP-complete, *SIAM Journal on Computing*, 35-3, 729/740, (2006)
- 4) S. K. Rao, P. Sadayappan, F. K. Hwang, P. W. Shor: The rectilinear Steiner arborescence problem, *Algorithmica*, 7, 277/288, (1992)
- 5) K. S. Leung, J. Cong: Fast optimal algorithms for the minimum rectilinear Steiner arborescence problem, in *Proc. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems*, 3, 1568/1571, (1997)