計測自動制御学会東北支部 第 308 回研究集会 (2017.5.29)
資料番号 308-1

リセットイベントデータに基づく
リセットシステムのフローセット推定

Flow set estimation from reset event data of reset systems

佐藤　哲郎 *，○佐藤　淳 **

Tetsuro Sato*, ○ Atsushi Satoh**

*日立住友重機械建機クレーン株式会社，**岩手大学

*Hitachi Sumitomo Heavy Industries Construction Crane Co., Ltd., **Iwate University

キーワード： ハイブリッドシステム (hybrid system)，リセットシステム（reset system），パラメータ推定 (parameter estimation)，最小 2 乗フィッティング (least square fitting)

連絡先： 〒 020-8551　盛岡市上田 4-3-5 岩手大学理工学部システム創成工学科機械科学コース
佐藤　淳，Tel./Fax.: (019)621-6404，E-mail: satsushi@iwate-u.ac.jp

1.　はじめに

ハイブリッドシステムとは一般に連続状態と離散状態を併せ持つダイナミカルシステムとされるが，本研究で扱うリセットシステムは連続状態のみを持つサブクラスである．リセットシステムは基本的に連続時間システムとして振る舞うが，リセットイベントの発生に応じて不連続な状態の変化（ジャンプ）を生じる．その振る舞いは，ハイブリッドタイムと呼ばれる拡張された時間概念の下での離散時間ダイナミクスとして表現できる．

リセットシステムは力学系の衝突現象のモデリングによく用いられる．これは物体同士の接触から離反までの時間経過を微小として無視すれば，衝突前後での速度変化は状態ジャンプとして表現できるためである．

ハイブリッドシステムの表現に用いられる数理モデルとして区分的アファインシステム，線形相補性システム，混合論理動的システムなどがあるが [1]，リセットシステムではハイブリッドオートマトンがよく用いられる [2, 3]．これは基本システムと呼ばれるフロー（連続時間）ダイナミクス，ジャンプ前後での状態変化を表現するジャンプ（離散時間）ダイナミクスおよび，いずれのダイナミクスが有効であるかを決定するリセット条件からなる表現である．

リセット条件は状態に依存した代数的条件で与え，状態空間の適当な（例えば超平面，多面錐，2 次錐などによる）分割を考えることが多い．

ハイブリッドオートマトン表現に基づくリセットシステムの同定を考えるとき，フローおよびジャンプダイナミクスの同定には既存の連続時間及び離散時間システムの同定手法が利用できる．しかしリセット条件の同定については著者らの知る限り議論されていない．そこで本研究では衝突を含む 1 自由度の物体の運動（例えば地面に落下する物体の運動）を模した 2 次の 2

次錐型リセットシステムについて考え，リセットイベント前後における状態データに基づき未知のリセット条件を推定する手法を提案する．

2. 問題設定

2.1 対象システム

以下のリセットシステムについて考える．

$$\dot{x} = Ax + Bd, \qquad \text{if} \quad x \in \mathcal{F}_M, \tag{1a}$$
$$x^+ = A_R x, \qquad \text{if} \quad x \in \mathcal{J}_M \tag{1b}$$

リセット条件は $x \in \mathcal{J}_M$ の成立である．ただしフローセット $\mathcal{F}_M$，ジャンプセット $\mathcal{J}_M$ はリセット行列 $M = M^T \in \mathbf{R}^{n\times n}$ およびリセット関数 $F(x) := x^T Mx$ を用いて次のように定義する．

$$\mathcal{F}_M = \{x \in \mathbf{R}^n \mid F(x) \geqq 0\}, \tag{2a}$$
$$\mathcal{J}_M = \{x \in \mathbf{R}^n \mid F(x) \leqq 0\} \tag{2b}$$

なお $\mathcal{F}_M, \mathcal{J}_M$ の境界 $F(x) = 0$ は，2 次のシステムでは状態平面上の交差する 2 直線になる．

つぎに物体の鉛直方向の落下運動を，(1), (2) 式の 2 次錐型リセットシステムとしてモデリングすることを考える．外力（重力や空気抵抗）を d で表せば，質量 m の物体の運動方程式は基準点からの高さを y として $m\ddot{y} = d$ である．また地面の位置を y_0 とし，物体の相対高さを考え

$$x := [x_1, x_2]^T,\ x_1 := y - y_0,\ x_2 := \dot{y} \tag{3}$$

とおけば，物体が空中にあるときの運動がフローに相当し，フローダイナミクス (1a) 式において

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{bmatrix}$$

となる．

また地面との衝突に伴い物体の速度が瞬間的に変化する挙動がジャンプに相当し，物体と地面との反発係数を $e > 0$ とおけばジャンプダイナミクス (1b) 式において $r := -e$,

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}, \tag{4}$$

となる．

リセット条件は物体と地面との衝突（$x_1 = 0$）であり，その発生条件はリセット行列を

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\epsilon^2 \end{bmatrix}, \quad \epsilon > 0 \tag{5}$$

とおけば，$\epsilon \to 0$ の極限 * として表せる．

また 2 次形式リセット関数 $F(x)$ が与えられたとき，適当な係数ベクトル

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a & c & d & f \end{bmatrix}^T \tag{6}$$

が存在して (y, x_2) についての F の多項式表現

$$F(x) = ay^2 + cx_2^2 + dy + f \tag{7}$$
$$= \boldsymbol{x}\boldsymbol{\alpha} =: F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}), \tag{8}$$
$$\boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} y^2 & x_2^2 & y & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

を得る．例えば (5) 式の M については $a = 1$, $c = -\epsilon^2$, $d = -2y_0$, $f = y_0^2$ となる．なお (2), (3) 式より，y_0 は $\mathcal{F}_M, \mathcal{J}_M$ の境界（以後 F/J 境界）線の交点の，x_1 方向オフセットである．

2.2 フロー/ジャンプ境界推定問題

以上の議論より，本研究では次の仮定のもとで 2 次の 2 次錐型リセットシステム (1) ～ (3) 式の F/J 境界推定問題を考える．

仮定 1. 行列 A_R, M はそれぞれ (4), (5) 式の構造を持つ．

なお仮定 1 はリセット関数 F の多項式表現 (7) 式において次の条件が成立することを要求する．

$$ac < 0, \tag{10a}$$
$$4af - d^2 = 0 \tag{10b}$$

(10) 式は，(7) 式の多項式が (5) 式の構造を持つ M についての 2 次形式表現を持つための必要十分条件である．

以降，リセット発生時刻での状態およびジャンプ後の状態をそれぞれ $(\cdot)^-, (\cdot)^+$ で表すもの

*このとき $\mathcal{J}_M$ のセクターは退化して直線になる

とする．また N 組のリセットイベントデータ $(y^-(j), x_2^-(j), y^+(j), x_2^+(j)), j = 1, \ldots, N$ が与えられたとき，次の行列を定義する．

$$\boldsymbol{D} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}(N) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{X}(j) := [(\boldsymbol{x}^-(j))^T,\ (\boldsymbol{x}^+(j))^T]^T, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{x}^-(j) := [(y^-(j))^2, (x_2^-(j))^2, y^-(j), 1], \tag{13}$$

$$\boldsymbol{x}^+(j) := [(y^+(j))^2, (r^{-1}x_2^+(j))^2, y^+(j), 1] \tag{14}$$

$\boldsymbol{x}^-$ はリセット発生時の状態データであり，$\boldsymbol{x}^+$ は，(4) 式にもとづきジャンプ後の状態データから逆算したリセット発生時の状態データであるため，両者とも $\mathcal{J}_M$ の境界上にある．すなわち (10) 式をみたす適当な $\boldsymbol{\alpha}$ が存在し，すべての j について次式を満たす．

$$F(\boldsymbol{x}^-(j), \boldsymbol{\alpha}) = F(\boldsymbol{x}^+(j), \boldsymbol{\alpha}) = 0 \tag{15}$$

しかしデータに誤差が含まれる場合は，そのような $\boldsymbol{\alpha}$ が存在するとは限らない．

以上の議論より，最小 2 乗近似に基づき，リセット行列のパラメータ ϵ および F/J 境界の交点の x_1 方向オフセット y_0 を推定するために次の最適化問題を考える．

問題 1. （F/J 境界推定問題）

A_R（すなわち r）は既知であるとする．与えられたリセットイベントデータについて次の最適化問題を解け．

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}} ||\boldsymbol{D}\boldsymbol{\alpha}||^2 \quad \text{s.t.} \qquad (10)\text{ 式} \tag{16}$$

ここで以下のように書けることから，問題 1 の最適解は (15) 式に対する最小 2 乗近似解になっている．

$$||\boldsymbol{D}\boldsymbol{\alpha}||^2 = \sum_{j=1}^{N}(F(\boldsymbol{x}^-(j), \boldsymbol{\alpha}))^2 + \sum_{j=1}^{N}(F(\boldsymbol{x}^+(j), \boldsymbol{\alpha}))^2 \tag{17}$$

また問題 1 の制約条件のうち，(10a) 式は 2 次曲線 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ が双曲線となる条件であり，(10b) 式は双曲線が退化して 2 本の交差する直線になることの条件である．

さらに，問題 1 の最適解を $\boldsymbol{\alpha}^o = [a^o, c^o, d^o, f^o]$ とおくと，交差 2 直線 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}^o) = 0$ は任意の $\boldsymbol{\alpha} = [a^o, c^o, d^o, *]$ についての双曲線群 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ に対する共通の漸近線になっている．

問題 1 の解より所望のパラメータの推定結果は次のように得られる．

$$\epsilon^2 = \frac{-c}{a}, \quad y_0 = \frac{-d}{2a} \tag{18}$$

3. F/J 境界推定問題の近似解法

問題 1 は 2 次制約付き 2 次最適化問題 (Quadratic Constrained Quadratic Programming) であるため，直接解くことは難しい．そこで (10b) 式の制約を除去した次の緩和問題を導入し，O'Leary and Zsombor-Murray[4] による一般化固有値問題を利用した解法を適用することを考える．

問題 2. （緩和問題 1）

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}} ||\boldsymbol{D}\boldsymbol{\alpha}||^2 \quad \text{s.t.} \qquad (10\text{a})\text{ 式} \tag{19}$$

問題 1 は，与えられたデータに（何らかの双曲線の）漸近線を最小 2 乗近似の意味でフィットさせる問題であるのに対し，問題 2 は双曲線をフィットさせる問題である．

そこで本研究ではまず問題 2 を解いてデータに双曲線をフィットさせ，次にその漸近線を求めることで問題 1 を近似的に解くことを考える．

また (10a) 式は等価的に次のように書ける．

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha} < 0, \quad \boldsymbol{C} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

(20) 式および問題 2 の目的関数において変数ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ はスカラー倍の自由度を持つため，問

題 2 の制約条件はさらに次の等式制約に置き換えることができる．

$$\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\alpha} = -1 \tag{21}$$

そこでラグランジュ乗数 λ を導入し，次の制約なし最適化問題を解くことを考える．

問題 3. （緩和問題 2）

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}} ||\boldsymbol{D}\boldsymbol{\alpha}||^2 - \lambda(\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\alpha} + 1) \tag{22}$$

問題 3 の最適解は (21) 式および次の条件を満たすことが知られている．

$$\boldsymbol{D}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{\alpha} - \lambda \boldsymbol{C} \boldsymbol{\alpha} = 0, \tag{23}$$

(23) 式をみたす $(\lambda, \boldsymbol{\alpha})$ の組は，$(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{D})$ についての一般化固有値問題を解いて求まる．

Lemma 1,2[4] より，$(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{D})$ の一般化固有値の符号は，適当に順序付けた $\boldsymbol{C}$ の固有値の符号と一致する．また各々の固有構造 $(\lambda_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ について，λ_i の符号と $\boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\alpha}_i$ の符号は一致する．(20) 式より $\mathrm{eig}\,(\boldsymbol{C}) = \{-1, 0, 0, 1\}$ であるため負の一般化固有値が常にひとつ存在し，対応する固有ベクトルを $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ とおけば $\overline{\boldsymbol{\alpha}}^T \boldsymbol{C} \overline{\boldsymbol{\alpha}} < 0$ となる．そこで

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \frac{1}{\sqrt{-\overline{\boldsymbol{\alpha}}^T \boldsymbol{C} \overline{\boldsymbol{\alpha}}}} \overline{\boldsymbol{\alpha}} \tag{24}$$

とおけば，$\boldsymbol{\alpha}^*$ は (21)，(23) 式を満たし問題 3 の最適解となり [4]，2 次曲線 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}^*) = 0$ は双曲線となる．

ただし $\boldsymbol{\alpha}^*$ は一般に (10a) 式を満たさないので，問題 1 の解ではないことに注意する．

以上の議論より，次の近似解法を提案する．

[問題 1 の近似解法]

Step 1 与えられた A_R およびリセットイベントデータから (11) 式の $\boldsymbol{D}$ を構成する．

Step 2 一般化固有値問題 (23) 式を解き，負の一般化固有値に対応する固有ベクトル $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ から，(24) 式の $\boldsymbol{\alpha}^* = [a^*, c^*, d^*, f^*]^T$ を求める．これは問題 2 の最適解である．

Step 3 (18) 式に従い
$y_0 = -\dfrac{d^*}{2a^*}$, $\epsilon^2 = -\dfrac{c^*}{a^*}$ と決定する．

なお上記の手続きから得られる問題 1 の近似解は $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = [a^*, c^*, d^*, \tilde{f}]^T$, $\tilde{f} = \dfrac{(d^*)^2}{4a^*}$ である．

4. おわりに

本研究ではリセットシステムのリセット条件を決めるフローおよびジャンプセット境界の推定問題について議論した．

衝突を含む物体の運動を模した 2 次の 2 次錐型リセットシステムを考え，ジャンプダイナミクスが既知であるという設定のもとで，リセットイベント前後の状態データに基づいてリセット行列およびフロー/ジャンプ境界の交点のオフセットを推定する問題を，所望の境界を漸近線にもつ双曲線の最小 2 乗推定問題とみなすことで QCQP 問題として記述した．

また一般に QCQP 問題を解くことは困難であるため，その緩和問題の解を利用した近似解法を提案した．

参考文献

1) 井村順一，東　俊一，増渕　泉: ハイブリッドシステムの制御, コロナ社 (2014)

2) D. Nesic, L. Zaccarian, and A. R. Teel: Stability properties of reset systems, Automatica, Vol. 44, No. 8, pp. 2019–2026 (2008)

3) L. Zaccarian, D. Nesic and A. R. Teel: Stability and performance of SISO control systems with First Order Reset Elements, IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. 56, No. 11, pp. 2567–2582 (2011)

4) P. O'Leary and P. Zsombor-Murray: Direct and specific least-square fitting of hyperbolae and ellipses, Journal of Electronic Imaging, Vol. 13, No. 3, pp. 492-503 (2004)