計測自動制御学会東北支部 第 308 回研究集会 (2017.5.29)
資料番号 308-6

位相限定相関関数の確率分布の数理表現

Mathematical Expressions of Probability Distributions of Phase-Only Correlation Functions

○山口 孝志，八巻 俊輔，吉澤 誠

○ Takashi Yamaguchi, Shunsuke Yamaki, Makoto Yoshizawa

東北大学

Tohoku University

キーワード： 位相限定相関関数 (phase-only correlation functions)，確率分布 (probability distributions)

連絡先： 〒 980-8579　仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05
東北大学大学院 医工学研究科 吉澤・杉田研究室
山口孝志，Tel.:022-795-7130，E-mail: takashi.yamaguchi.s8@dc.tohoku.ac.jp

1. はじめに

位相限定相関 (POC:Phase-Only Correlation) 関数は，2 つの信号の類似度を評価する関数として知られている．そのため，画像マッチング [1, 2, 3, 4, 5, 6] など，幅広い分野で応用されてきた．これらの応用は，2 つの信号の位相スペクトルが完全に等しいとき，すなわち位相スペクトル差が 0 であるとき，POC 関数がデルタ関数になる性質を根拠としている．

しかしながら，実際の信号において 2 つの信号の位相スペクトルが完全に等しくなることはほとんどありえない．例えば，実際の画像マッチングにおいて，基準画像と観測画像が同一であることはめったにない．このような場合 2 つの信号の位相スペクトルが完全に等しいときに POC 関数がデルタ関数になるという性質をマッチングに用いることはできない．

実際の信号の類似度を評価する関数として POC 関数を用いる場合，ピークとサイドローブを区別するための閾値を設ける必要がある．ピークとサイドローブはとりうる値の範囲が同じであるため，ピークとサイドローブを完全に区別するような閾値を決めることは不可能である．そのため，ピークをサイドローブと判断する，またはサイドローブをピークと判断するような誤りを最小にするような閾値の導出が求められる．このような閾値を導出するためには POC 関数の確率分布を導出する必要がある．本稿では位相スペクトル差を線形の確率分布に従う確率変数であると仮定し，信号の点数を変化させたときの POC 関数の実部と虚部の確率分布を数値計算によって求めた．

2. 位相限定相関 (POC) 関数

本章では POC 関数の定義を示す．長さ N の 2 つの複素離散信号 $a(n)$ および $b(n)$ を考える．

これらの信号の離散フーリエ変換はそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
A(k) &= \mathrm{DFT}[a(n)] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} a(n) W_N^{nk} \\
&= |A(k)| e^{j\theta_k} \qquad (1) \\
& \quad (k = 0, 1, \cdots N-1) \\
B(k) &= \mathrm{DFT}[b(n)] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} b(n) W_N^{nk} \\
&= |B(k)| e^{j\phi_k} \qquad (2) \\
& \quad (k = 0, 1, \cdots N-1)
\end{aligned}
$$

で与えられる．ここで j は虚数単位で，$W_N = \exp(-j2\pi/N)$ は離散フーリエ変換の回転因子である．$|A(k)|$ と $|B(k)|$ はそれぞれ信号 $a(n)$ と $b(n)$ の振幅スペクトルで，θ_k と ϕ_k はそれぞれ信号 $a(n)$ と $b(n)$ の位相スペクトルである．このとき 2 つの信号 $a(n)$ および $b(n)$ の POC 関数 $r(m)$ はクロスパワースペクトル $A(k)B^*(k)$(“*” は複素共役を表す) を振幅スペクトル $|A(k)||B(k)|$ で割ることにより得られる正規化クロスパワースペクトルの離散フーリエ逆変換 (IDFT) として以下で与えられる．

$$
\begin{aligned}
r(m) &= \mathrm{IDFT}\left[\frac{A(k)B^*(k)}{|A(k)||B(k)|}\right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A(k)B^*(k)}{|A(k)||B(k)|} W_N^{-mk} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\alpha_k} W_N^{-mk} \qquad (3) \\
& \quad (m = 0, 1, \cdots, N-1)
\end{aligned}
$$

ここで，$\alpha_k = \theta_k - \phi_k$ は 2 つの信号の位相スペクトル差であり，$e^{j\alpha_k}$ は位相因子と呼ばれる．式 (3) より，位相スペクトル差 α_k が決定すれば，POC 関数の値は具体的に定まる．

3. POC 関数の確率分布を導出する意義

本章では，信号マッチングで求められている POC 関数のピークとサイドローブを分ける閾値を求めるためには，POC 関数の確率分布の導出が必要であることを説明する．まず，ピークとサイドローブがとりうる値の傾向について実験的に調べる．図 1 は $N = 8$ の POC 関数に関して，POC 関数の定義式 (3) の位相スペクトル差 α_k に正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う乱数を代入し，ピーク $r(0)$ とサイドローブ $r(m \neq 0)$ をそれぞれ複素平面にプロットする試行を 1000 回行った散布図である．図 1(a) と図 1(b)，図 1(c)，図 1(d) はそれぞれ $\sigma^2 = 0, 0.25, 0.5, 1$ としたときの散布図である．図 1 より位相スペクトル差の分散 σ^2 が増加するにつれて，POC 関数のピークとサイドローブの分布の重なりが大きくなることがわかった．とりうる値の範囲が重なっているピークとサイドローブを分けることを考えるときには，ピークをサイドローブと判断してしまう，もしくはサイドローブをピーク判断してしまうという誤りを最小とするような閾値の設定が求められる．

同様の閾値の設定をディジタル通信の基底帯域信号伝送で行われているため紹介する．基底帯域信号伝送では時間幅 T_s の矩形パルスが T_s ごとに送信されている．その振幅は，送信シンボルが 1 のときには +1，送信シンボルが 0 のときには −1 である．このとき送信系統は振幅 0 を使わない NRZ 矩形パルス系列である．受信波形は矩形 NRZ 信号に雑音が重畳されており，受信信号は判定スレッショルドレベル V_{ref} と比較され，V_{ref} より大きければ 1，小さければ 0 と判定され，受信シンボルが生成される [7]．本来は +1 と −1 で完全に分かれていた矩形パルスが雑音が重畳することで同じ範囲に値を持つようになっている．これは POC 関数のピークとサイドローブと同じであり，判定スレッショ

ルドレベル V_{ref} がピークとサイドローブを分けるための閾値に相当している．このときディジタル通信では誤り率を最小にするような V_{ref} の決定の際に，確率密度関数を用いている．図 2 は，NRZ 信号伝送における受信シンボルの確率密度関数である．送信シンボルは $+1$ と -1 しかとりえないが，雑音が重畳することでそれぞれ，$+1$ と -1 を中心とする広がりを持つようになっていることがわかる．図 2 では雑音として正規分布 $N(0,1)$ を仮定している．図 2 における斜線部はシンボル誤りの確率を示しているため，誤り率を最小にするような V_{ref} は斜線部の面積を最小にするように決められる．以上のことからピークとサイドローブを分けるときに誤り率を最小にするような閾値を設定するために，POC 関数のピークとサイドローブそれぞれの確率分布を考える．

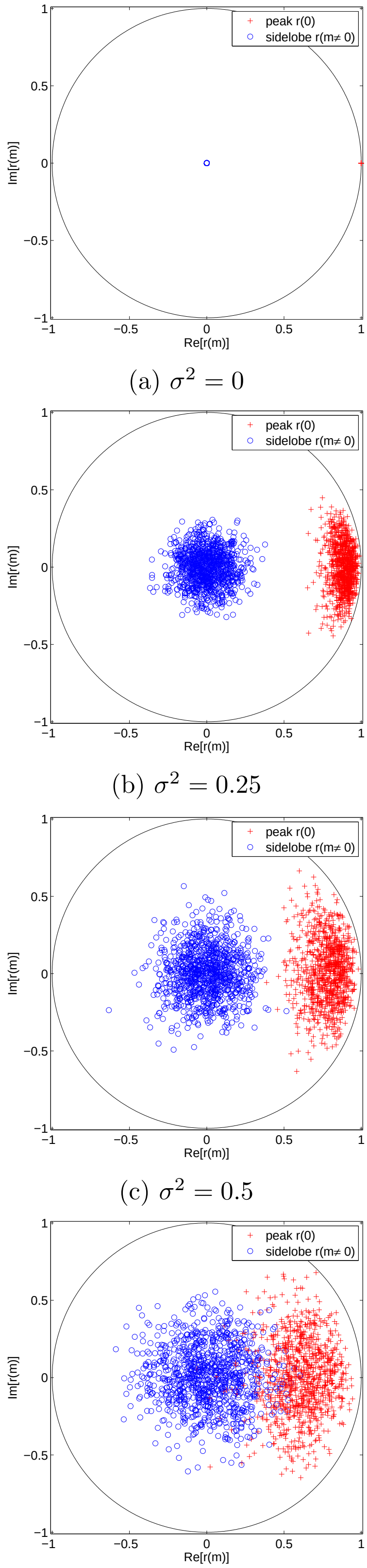
4. POC 関数の確率分布の導出

4.1 まえがき

本章では POC 関数の確率分布の導出を行う．まず確率分布の導出に必要となる基礎として，連続型の確率分布の定義と連続型の確率変数の変換，確率変数の和の分布について示す．そして POC 関数の位相スペクトル差 α_k が確率変数であると仮定したときの $N=1$ のときの POC 関数の確率分布を導出し，ヒストグラムとの比較から導出した確率分布が妥当であることを示す．次に $N>1$ のときの POC 関数の確率分布を導出する．具体例として $N=2$ のときの POC 関数の確率分布を導出し，ヒストグラムとの比較から確率分布が妥当であることを示す．

4.2 確率分布について

本節では，POC 関数の確率分布の導出に必要となる基礎として，連続型の確率分布の定義と連続型の確率変数の変換，確率変数の和の分布について示す．



(a) $\sigma^2 = 0$
(b) $\sigma^2 = 0.25$
(c) $\sigma^2 = 0.5$
(d) $\sigma^2 = 1$

Fig. 1: 位相スペクトル差の分散 σ^2 を変化させたときの POC 関数のピークとサイドローブの散布図

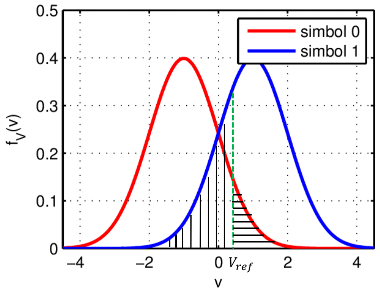


Fig. 2: NRZ 信号伝送の受信シンボルの確率密度関数

4.2.1 連続型の確率分布の定義 [8)]

確率変数 X が連続する変数 (連続型の確率変数) のとき，X が x から $x+\Delta x$ の間に入る確率 $P(x < X \leqq x+\Delta x)$ を考える．この値は Δx を小さくすると 0 へ収束してしまうので，Δx で割って $\Delta x \to 0$ とした極限を $f_X(x)$，すなわち，

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X \leqq x + \Delta x)}{\Delta x} \tag{4}$$

を考える．$f_X(x)$ は確率密度関数とよばれ，X が x_{min} と x_{max}(x_{min} と x_{max} は $x_{min} < x_{max}$ を満足する任意の定数) の間に入る確率は，$f_X(x)$ を定積分して

$$P(x_{min} < x \leqq x_{max}) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f_X(x)dx \tag{5}$$

で与えられる．

4.2.2 連続型の確率変数の変換

確率変数 Y が X の関数，すなわち，

$$Y = \varphi(X) \tag{6}$$

の場合を考える．φ は単調増加で微分可能とする．この場合，関数 φ の逆関数 φ^{-1} が存在し，$X = \varphi^{-1}(Y)$ となる．X，Y の確率密度関数をそれぞれ，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ とする．$y = \varphi(x)$，$y+\Delta y = \varphi(x+\Delta X)$ とすると，$x < X \leqq x+\Delta x$ となる確率と $y < Y \leqq y + \Delta y$ となる確率は同一で，

$$f_Y(y)\Delta y = f_X(x)\Delta x \tag{7}$$

である．$\Delta x \to 0$ とすると，

$$f_Y(y) = f_X(x)\frac{dx}{dy} = f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)\frac{d\varphi}{dy} \tag{8}$$

となる．同様に考えて，φ は単調減少で微分可能の場合，$y - \Delta y = \varphi(x + \Delta X)$ とすると，$x < X \leqq x + \Delta x$ となる確率と $y - \Delta y < Y \leqq y$ となる確率は同一で，

$$f_Y(y)(-\Delta y) = f_X(x)\Delta x \tag{9}$$

である．$\Delta x \to 0$ とすると，

$$f_Y(y) = -f_X(x)\frac{dx}{dy} = -f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)\frac{d\varphi}{dy} \tag{10}$$

よって，φ は微分可能の場合，式 (8) と式 (10) をまとめて以下の式が成り立つ．

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)\left|\frac{d\varphi}{dy}\right| \tag{11}$$

4.2.3 確率変数の和の確率分布

X を 2 つの変数 X_1 と X_2 の和 $X = X_1 + X_2$ とすると，この変数の確率密度関数 $f_X(x)$ は，X_1 と X_2 が独立の場合，X_1 の確率密度関数 $f_{X_1}(x)$ と X_2 の確率密度関数 $f_{X_2}(x)$ を用いて，

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(\tau) f_{X_2}(x-\tau)d\tau \tag{12}$$

となる [8)]．

ここで $X_i (i = 1, 2, \cdots)$ が従う分布の特性関数 $C_{X_i}(t)$ は確率密度関数 $f_{X_i}(x)$ を用いて

$$C_{X_i}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} f_{X_i}(x)dx \tag{13}$$

で与えられる．ここで $X = X_1 + X_2$ が従う分布の特性関数 $C_X(t)$ を求めることを考える．X の確率密度関数 $f_X(z)$ を用いて式 (13) と同様に，

$$C_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} f_X(x)dx \tag{14}$$

とかける．式 (14) の右辺に式 (12) を代入して以下の式が得られる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(\tau) f_{X_2}(x-\tau)d\tau\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{jt\tau} f_{X_1}(\tau) e^{jt(x-\tau)} f_{X_2}(x-\tau) d\tau dx \quad (15)$$

ここで $\upsilon = x - \tau$ と変数変換すると，式 (15) は，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{jt\tau} f_{X_1}(\tau) e^{jt\upsilon} f_{X_2}(\upsilon) d\tau d\upsilon \\
=\ & \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{jt\tau} f_{X_1}(\tau) d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{jt\upsilon} f_{X_2}(\upsilon) d\upsilon\right) \\
=\ & C_{X_1}(t) C_{X_2}(t) \qquad (16)
\end{aligned}$$

と変形される．式 (16) より X が従う分布の特性関数 $C_X(t)$ は X_1 と X_2 が従う分布の特性関数の積で表されることがわかった．つまり，$X = X_1 + X_2$ の確率密度関数 $f_X(x)$ を得るためには $C_{X_1}(t)$ と $C_{X_2}(t)$ の積を逆変換すればよい．よって以下の式が得られる．

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jtx} C_{X_1}(t) C_{X_2}(t) dt \quad (17)$$

4.3 $N = 1$ のときの POC 関数の確率分布の導出

本節では最も基本的な問題設定として $N = 1$ のときのPOC関数の確率分布の導出を行う．はじめに，問題提起として $N = 1$ のときの POC 関数を与える．次に，位相スペクトル差が確率変数と仮定した時の POC 関数の実部と虚部の確率分布の導出をする．そして，導出した確率分布が妥当かどうかを確率分布とヒストグラムの比較によって示す．

4.3.1 問題提起

$N = 1$ のときの POC 関数 $r(m)$ は式 (3) より，$m = 0$ および $k = 0$ のみにおいて定義される．$N = 1$ のときの POC 関数 $r(0)$ は位相スペクトル差 α_0 を用いて以下の式で表される．

$$r(0) = \cos(\alpha_0) + j\sin(\alpha_0) \quad (18)$$

位相スペクトル差 α_0 を確率変数と仮定した時の $N = 1$ のときの POC 関数 $r(0)$ の実部と虚部の確率分布を導出する．α_0 の確率密度関数は $f_\alpha(\alpha)$ で表す．$N = 1$ のときの POC 関数の実部と虚部の確率分布を導出するためには確率変数 α_0 に対して，実部は $\cos(\alpha_0)$，虚部は $\sin(\alpha_0)$ にそれぞれ確率変数の変換を行う必要がある．

4.3.2 POC 関数の実部の確率分布の導出

確率変数 α_0 を $\cos(\alpha_0)$ に変換する．確率変数 α_0 の範囲は $-\infty \leqq \alpha_0 \leqq \infty$ である．α_0 と $\cos(\alpha_0)$ の関係を図 3 に示す．図 3 より，ひとつの $\cos(\theta)$ の値と $\cos(\theta + 2\pi q)$ と $\cos(-\theta - 2\pi q)$(q は任意の整数) は等しいことがわかる．このことから，$\cos(\alpha_0)$ と α_0 は 1 対 1 対応でないことがわかる．1 対 1 対応でないと逆関数が存在できないため，$\cos(\alpha_0)$ が単調増加する範囲 $(-\pi + 2\pi q) < \alpha_0 \leqq 2\pi q$($q$ は任意の整数) と単調減少する範囲 $2\pi q < \alpha_0 \leqq (\pi + 2\pi q)$($q$ は任意の整数) で範囲ごとに変換を行う必要がある．そこで新しい確率変数として $\tilde{\alpha}_0 (0 \leqq \tilde{\alpha}_0 \leqq \pi)$ を定義し，α_0 を $\tilde{\alpha}_0$ に変換することを考える．$\tilde{\alpha}_0$ と α_0 の関係は以下の式で表される．

$$\tilde{\alpha}_0 = |\arg(e^{j\alpha_0})| \quad (19)$$

ここで $-\pi \leqq \arg(e^{j\alpha_0}) < \pi$ である．図 4 は $\tilde{\alpha}_0$ と α_0 の関係を表している．図 4 からわかるように $\cos(\tilde{\alpha}_0)$ と同じ値になる $\cos(\alpha_0)$ の α_0 が $\tilde{\alpha}_0$ にまとめられていることがわかる．α_0 から $\tilde{\alpha}_0$ への変換によって $\tilde{\alpha}_0$ と $\cos(\tilde{\alpha}_0)$ は 1 対 1 対応となるので確率変数の変換を行うことができる．

$\tilde{\alpha}_0$ の確率密度関数である $f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\alpha})$ は，α_0 の確率密度関数 $f_\alpha(\alpha)$ を用いて，以下の式で表すことができる．

$$\begin{aligned}
f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\alpha}) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \big(& f_\alpha(\tilde{\alpha} + 2\pi q) \\
& + f_\alpha(-\tilde{\alpha} - 2\pi q)\big) \qquad (20)
\end{aligned}$$

次に $\tilde{\alpha}_0$ を $\cos(\tilde{\alpha}_0)$ に変換する．確率変数 $Y = \cos(\tilde{\alpha}_0)$ とし，確率変数 Y の確率密度関数を $f_Y(y)$ とおくと，式 (11) より以下の式が成り立つ．

$$f_Y(y) = f_{\tilde{\alpha}}(\cos^{-1}(y)) \left|\frac{d\cos^{-1}(y)}{dy}\right| \quad (21)$$

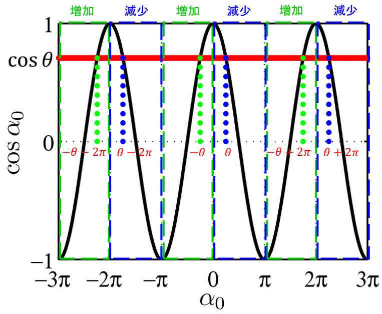


Fig. 3: α_0 と $\cos(\alpha_0)$ の関係

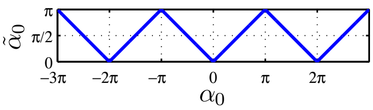


Fig. 4: α_0 と $\tilde{\alpha}_0$ の関係

このとき，

$$\left|\frac{d\cos^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \tag{22}$$

であるため，式 (21) に式 (20) と式 (22) を代入して以下の式が導出できる．

$$\begin{aligned} & f_Y(y) \\ = & \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \bigl(f_\alpha(\cos^{-1}(y)+2\pi q) \\ & +f_\alpha(-\cos^{-1}(y)-2\pi q)\bigr) \end{aligned} \tag{23}$$

以上より，$N=1$ のときの POC 関数の実部の確率分布を式 (23) で表すことができた．

4.3.3 POC 関数の虚部の確率分布の導出

本小節では 4.3.2 と同じ方法で確率変数 α_0 を $\sin(\alpha_0)$ に変換することで，$N=1$ での POC 関数の虚部の確率分布を導出することを考える．図 5 に α_0 と $\sin(\alpha_0)$ の関係を示す．図 5 より，$\cos(\alpha_0)$ と同様に $\sin(\alpha_0)$ に単調増加の範囲と単調減少の範囲が周期的に現れることから，α_0 と $\sin(\alpha_0)$ は 1 対 1 対応ではないためそのまま確率変数の変換を行うことはできない．そのため新しい確率変数として $\hat{\alpha}_0(-\frac{\pi}{2} \leqq \hat{\alpha}_0 \leqq \frac{\pi}{2})$ を定義し，α_0 を $\hat{\alpha}_0$ に変換することを考える．α_0 と $\hat{\alpha}_0$ の関係は次式で与えられる．

$$\hat{\alpha}_0 = |\arg(e^{j(\alpha_0-\frac{\pi}{2})})| - \frac{\pi}{2} \tag{24}$$

図 6 は α_0 と $\hat{\alpha}_0$ の関係である．図 6 より $\sin(\hat{\alpha}_0)$ と同じ値になる $\sin(\alpha_0)$ の α_0 が $\hat{\alpha}_0$ にまとめられていることがわかる．この変換によって $\hat{\alpha}_0$ と $\sin(\hat{\alpha}_0)$ は 1 対 1 対応なので確率変数の変換を行うことができる．

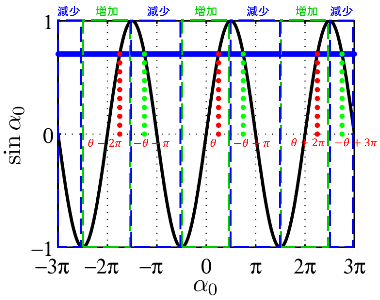


Fig. 5: α_0 と $\sin(\alpha_0)$ の関係

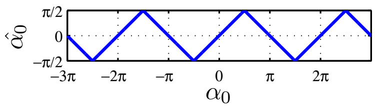


Fig. 6: α_0 と $\hat{\alpha}_0$ の関係

$\hat{\alpha}_0$ の確率密度関数である $f_{\hat{\alpha}}(\hat{\alpha})$ は，α_0 の確率密度関数を $f_\alpha(\alpha)$ を用いて，以下の式で表すことができる．

$$\begin{aligned} f_{\hat{\alpha}}(\hat{\alpha}) = & \sum_{q=-\infty}^{\infty} \bigl(f_\alpha(\hat{\alpha}+2\pi q) \\ & +f_\alpha(-\hat{\alpha}-\pi-2\pi q)\bigr) \end{aligned} \tag{25}$$

次に確率変数 $Z=\sin(\hat{\alpha}_0)$ の確率密度関数 $f_Z(z)$ を式 (11) を用いて導出すると以下のようになる．

$$f_Z(z) = f_{\hat{\alpha}}(\sin^{-1}(z)) \left|\frac{d\sin^{-1}(z)}{dz}\right| \tag{26}$$

上式において，

$$\left|\frac{d\sin^{-1}(z)}{dz}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \tag{27}$$

であり，式 (26) に式 (25) と式 (27) を代入して以下の式が導出できる．

$$\begin{aligned} & f_Z(z) \\ = & \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \bigl(f_\alpha(\sin^{-1}(z)+2\pi q) \\ & +f_\alpha(-\sin^{-1}(z)-\pi-2\pi q)\bigr) \end{aligned} \tag{28}$$

以上より，$N=1$ のときの POC 関数の虚部の確率分布を式 (28) として表すことができた．

4.3.4 導出した確率分布とヒストグラムの比較

位相スペクトル差の確率変数 α_0 の確率密度関数 $f_\alpha(\alpha)$ を用いて，$N=1$ のときの POC 関数の実部と虚部の確率密度関数はそれぞれ式 (23) と式 (28) であると前小節までに導出した．本小節では導出した確率分布とヒストグラムの比較を行う．位相スペクトル差の確率変数 α_0 が $N(0,1)$ の正規分布に従うと仮定すると，α_0 の確率密度関数 $f_\alpha(\alpha)$ は

$$f_\alpha(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-\alpha^2}{2}\right] \tag{29}$$

となる．このとき POC 関数の実部と虚部の確率密度関数の導出式である式 (23) に式 (29) を代入した式に対し数値解析を行った．確率密度関数と比較検討するためにヒストグラムを用いる．図 7 と図 8 はヒストグラムとそれぞれ POC 関数の実部と虚部の確率密度関数の導出式の数値解析結果である．ヒストグラムは面積が 1 になるように正規化している．図 7 と図 8 より，導出した $N=1$ のときの POC 関数の実部と虚部の確率分布がそれぞれのヒストグラムをよく近似していることがわかる．以上より導出した $N=1$ のときの POC 関数の実部の確率密度関数である式 (23) と虚部の確率密度関数である式 (28) は妥当であると考えられる．

4.4 $N>1$ のときの POC 関数の確率分布の数値計算による導出

本節では $N>1$ のときの POC 関数の確率分布を導出する．まず，$N=1$ のときの POC 関数の実部と虚部の確率分布の特性関数を求める．その特性関数を応用して，サイドローブ $r(m \neq 0)$ を持つ最小の偶数として $N=2$ における POC 関数の確率分布を数値計算によって導出し，ヒストグラムと比較して確率分布が妥当であることを確かめる．

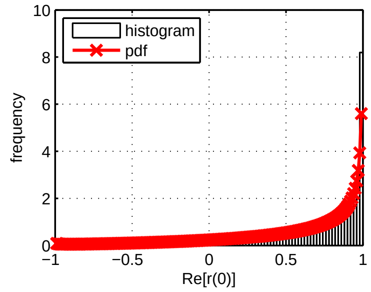


Fig. 7: $N=1$ のときの POC 関数の実部の確率分布の理論式とヒストグラムの比較

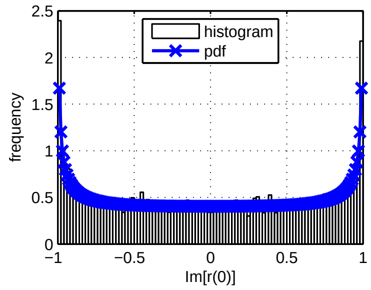


Fig. 8: $N=1$ のときの POC 関数の虚部の確率分布の理論式とヒストグラムの比較

4.4.1 問題提起

$N=1$ のときと同様に位相スペクトル差 α_k を確率変数と仮定した時の POC 関数の実部と虚部の確率分布を導出する．$N>1$ のときの POC 関数 $r(m)$ は式 (3) で表される．たとえば $N=2$ のときの POC 関数 $r(m)(m=0,1)$ は式 (3) より以下の式で表すことができる．

$$\begin{aligned} r(0) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} e^{j\alpha_k} \\ &= \frac{1}{2}\{(\cos(\alpha_0)+\cos(\alpha_1)) \\ &\quad +j(\sin(\alpha_0)+\sin(\alpha_1))\} \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} r(1) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} e^{j\alpha_k} e^{-j\pi k} \\ &= \frac{1}{2}\{(\cos(\alpha_0)-\cos(\alpha_1)) \\ &\quad +j(\sin(\alpha_0)-\sin(\alpha_1))\} \end{aligned} \tag{31}$$

式 (30) と式 (31) からもわかるように，$N>1$ のときの POC 関数の実部と虚部の確率分布を求めるためには確率変数の和の確率分布を求め，

その確率変数を N で割る必要がある．つまり，式 (30) の $\cos(\alpha_0)$ や $\cos(\alpha_1)$ のような，POC 関数 $r(m)$ のそれぞれの項の確率変数 $X_i(i = 0, 1, \cdots, N-1)$ を用いて，一般に POC 関数 $r(m)$ の確率変数は $(X_0 + X_1 + \cdots + X_{N-1})/N$ で表され，この確率変数の確率分布を求める必要がある．確率変数の和の確率分布は式 (17) より特性関数の積を逆変換することにより得られる．確率変数を N で割ったときの確率分布は 4.2.2 の確率変数の変換を用いて求めることができる．確率変数 X，Y が $Y = X/N$(N は任意の自然数) の関係があり，X，Y の確率密度関数をそれぞれ $f_X(x)$，$f_Y(y)$ で表せるとき式 (11) より以下の関係が成り立つ．

$$f_Y(y) = N \times f_X(Ny) \tag{32}$$

$N > 1$ のときの POC 関数の確率分布は，まずそれぞれの項の特性関数を求め，次に特性関数の積の逆変換で確率分布を求め，最後に確率変数を N で割る確率変数の変換を行うという手順でこれから求める．

4.4.2 特性関数の導出

$N = 1$ のときの POC 関数の実部の確率密度関数である式 (23) と虚部の確率密度関数である式 (28) の特性関数をこれから導出する．式 (23) と式 (28) の特性関数を導出するのは，$N > 1$ のとき POC 関数の項は $\cos(\alpha_k + \theta)$ と $\sin(\alpha_k + \theta)(k = 0, 1, \cdots, N-1)$($\theta$ は任意の角度 [rad]) で構成されており，$\cos(\alpha_0)$ の確率密度関数である式 (23) と $\sin(\alpha_0)$ の確率密度関数である式 (28) の特性関数を応用して POC 関数の他の項の確率密度関数の特性関数も導出できるからである．まず式 (23) の特性関数 $C_Y(t)(-\infty \leqq t \leqq \infty)$ を導出する．式 (13) と式 (23) より特性関数は以下の式で表される．

$$C_Y(t) = \int_{-1}^{1} e^{jty} f_Y(y) dy \tag{33}$$

$y = \cos(\tilde{\alpha})(0 < \tilde{\alpha} \leqq \pi)$ に変数変換をすると，式 (33) の右辺は

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi e^{it\cos(\tilde{\alpha})} f_Y(\cos(\tilde{\alpha}))\sin(\tilde{\alpha})d\tilde{\alpha} \\ =& \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_0^\pi e^{it\cos(\tilde{\alpha})} \big(f_\alpha(\tilde{\alpha} + 2\pi q) \\ &+ f_\alpha(-\tilde{\alpha} - 2\pi q)\big) d\tilde{\alpha} \end{aligned} \tag{34}$$

と変形できる．次に式 (34)に関して$\tilde{\alpha} = \alpha - 2\pi q(-\infty \leqq \alpha \leqq \infty)$ に変数変換をすることにより

$$\begin{aligned} &\sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi q}^{2\pi q + \pi} e^{jt\cos(\alpha - 2\pi q)} \\ &\big(f_\alpha(\alpha) + f_\alpha(-\alpha)\big) d\alpha \\ =& \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi q - \pi}^{2\pi q + \pi} e^{jt\cos(\alpha)} f_\alpha(\alpha) d\alpha \\ =& \int_{-\infty}^{\infty} e^{jt\cos(\alpha)} f_\alpha(\alpha) d\alpha \end{aligned} \tag{35}$$

を得る．以上より式 (23) の特性関数は位相スペクトル差の確率密度関数 $f_\alpha(\alpha)$ を用いて式 (35) のように表すことができた．

同様に式 (28) の特性関数 $C_Z(t)(-\infty \leqq t \leqq \infty)$ を導出する．式 (13) と式 (28) より特性関数は以下の式で表される．

$$C_Z(t) = \int_{-1}^{1} e^{jtz} f_Z(z) dz \tag{36}$$

$y = \sin(\hat{\alpha})(-\frac{\pi}{2} < \hat{\alpha} \leqq \frac{\pi}{2})$ に変数変換をすると式 (36) は

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{it\sin(\hat{\alpha})} f_Z(\sin(\hat{\alpha}))\cos(\hat{\alpha})d\hat{\alpha} \\ =& \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{it\sin(\hat{\alpha})} \big(f_\alpha(\hat{\alpha} + 2\pi q) \\ &+ f_\alpha(-\hat{\alpha} - \pi - 2\pi q)\big) d\hat{\alpha} \end{aligned} \tag{37}$$

と変形できる．次に式 (37)に関して$\hat{\alpha} = \alpha - \pi -$

$2\pi q(-\infty \leqq \alpha \leqq \infty)$ に変数変換をすると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi q}^{2\pi q+\pi} e^{jt\sin(\alpha-\frac{\pi}{2}-2\pi q)} \\
&\qquad \left(f_\alpha(\alpha-\frac{\pi}{2})+f_\alpha(-\alpha-\frac{\pi}{2})\right) d\alpha \\
&= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi q-\frac{3\pi}{2}}^{2\pi q+\frac{\pi}{2}} e^{jt\sin(\alpha)} f_\alpha(\alpha) d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jt\sin(\alpha)} f_\alpha(\alpha) d\alpha \qquad (38)
\end{aligned}
$$

を得る．以上より式 (28) の特性関数は位相スペクトル差の確率密度関数 $f_\alpha(\alpha)$ を用いて式 (38) のように表すことができた．

4.4.3 $N=2$ のときの POC 関数の確率分布の数値計算による導出

4.4.2 で導出した式 (35) と式 (38) は式変形によってこれ以上簡単な形に変形するのが困難であるため，本小節では式 (35) と式 (38) の積分を区分求積を用いて数値計算することにより確率分布を導出することを考える．具体的には，サイドローブ $r(m \neq 0)$ が現れる最小の点数として $N=2$ のときの POC 関数の確率分布を数値計算によって導出する．$N=2$ のときの POC 関数 $r(m)(m=0,1)$ はそれぞれ式 (30) と式 (31) で表される．$\alpha_k(k=0,1)$ が同一かつ独立な分布に従うと仮定すると，それぞれの項の特性関数は式 (35) と式 (38) のどちらかで求めることができる．この特性関数の積を式 (17) に基づいて逆変換を行い，得られた確率分布を式 (32) に基づいて確率変数の変換を行えば，POC 関数 $r(m)(m=0,1)$ の実部と虚部の確率分布を求めることができる．具体例として確率変数 $\alpha_k(k=0,1)$ が $N(0,1)$ に従うと仮定した時の数値計算を行う．図 9 と図 10 がそれぞれ $N=2$ のときの POC 関数のピーク $r(0)$ の実部 $\mathrm{Re}[r(0)]$ と虚部 $\mathrm{Im}[r(0)]$ の確率分布を示しており，いずれも計算式とヒストグラムの比較を行っている．同様に，図 11 と図 12 がそれぞれサイドローブ $r(1)$ における実部 $\mathrm{Re}[r(1)]$ と虚部 $\mathrm{Im}[r(1)]$ の確率分布を示しており，いずれも計算式とヒストグラムの比較を行っている．ヒストグラムは面積が 1 になるように正規化している．図 9 と図 10，図 11，図 12 より $N=2$ のときの POC 関数の確率分布がそれぞれのヒストグラムをよく近似できていることがわかる．

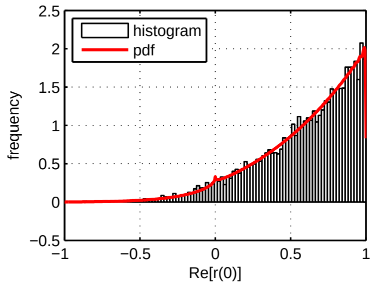


Fig. 9: $N=2$ のときの POC 関数 $r(0)$ の実部の確率分布の計算式とヒストグラムの比較

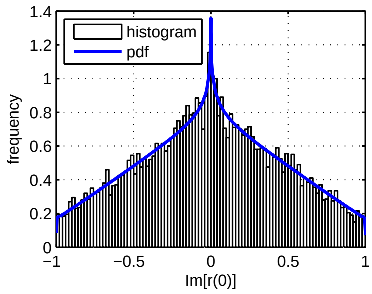


Fig. 10: $N=2$ のときの POC 関数 $r(0)$ の虚部の確率分布の計算式とヒストグラムの比較

5. むすび

本稿では，位相スペクトル差が線形の確率分布であると仮定したときの，POC 関数の実部と虚部の確率分布を求めた．まず，$N=1$ のときの POC 関数の実部と虚部の確率分布を位相スペクトル差の確率密度関数を用いて定式化した．次に $N=1$ のときの POC 関数の実部と虚部それぞれの確率密度関数から求めた特性関数を用いて，$N=2$ のときの POC 関数の実部と虚部の確率分布を数値計算によって求めた．求めた確率分布についてはそれぞれに対応するヒストグラムから妥当性を示した．

今後の研究として，$N>2$ のときの POC 関数

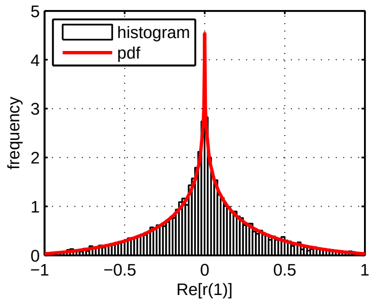


Fig. 11: $N=2$ のときの POC 関数 $r(1)$ の実部の確率分布の計算式とヒストグラムの比較

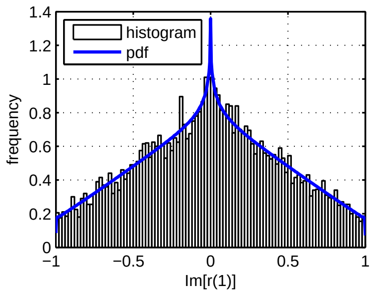


Fig. 12: $N=2$ のときの POC 関数 $r(1)$ の虚部の確率分布の計算式とヒストグラムの比較

の確率分布を数値計算によって導出することで，POC 関数の確率分布の傾向を確認する．そして，一般的な点数 N の POC 関数について確率分布を数値計算ではなく一般式として導出する．

参考文献

1) C.D. Kuglin and D.C. Hines, "The phase correlation image alignment method," Proc. Int. Conf. Cybernetics and Society, pp.163-165, 1975.

2) Q. Chen, M. Defrise, and F. Deconinck, "Symmetric Phase-only matched filtering of fourier-mellin transforms for image registration and recognition," IEEE Trans. Pattern. Anal. Mach. Intell., vol.16, no.12, pp.1156-1168, Dec. 1994.

3) B.S. Reddy and B.N. Chatterji, "An fft-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration," IEEE Trans. Image Process., vol.5, no.8, pp.1266-1271, Aug. 1996.

4) G. Wolberg and S. Zokai, "Robust image registration using logpolar transform," Proc. IEEE Int. Conf. Image Process. (IEEE ICIP), pp.493-496, Vancouver, Canade, Sept. 2000.

5) H. Foroosh, J. Zerubia, and M. Berthod, "Extention of phase correlation to subpixel registration," IEEE Trans. Image Process., vol.11, no.3, pp.188-200, March 2002.

6) L.Chen and K.H. Yap, "An effective technique for subpixel image registration under noisy condition," IEEE Trans. Syst. Man. Cybern. A, Syst. Humans, vol.38, no.4, pp.881-887, July 2008.

7) 鈴木博, "ビット誤り率," 電子・通信工学=EKR-10 ディジタル通信の基礎 -ディジタル変復調による信号伝送-, pp.76-78, 株式会社数理工学社, 2012.

8) 縄田和満, "連続型の確率分布," 東京大学工学教程 基礎系数学 確率・統計 I, 東京大学工学教程編纂委員会, 丸善出版株式会社, 平成 25 年.