計測自動制御学会東北支部 第 328 回研究集会 (2020.3.16)
資料番号 328-6

信号の周波数変換による 位相限定相関関数の挙動の変化

Variability of Behavior of Phase-Only Correlation Functions under Frequency Transformation of Signals

○佐藤有弥，八巻俊輔，吉澤誠

○ Yuya Sato, Shunsuke Yamaki, Makoto Yoshizawa

東北大学

Tohoku University

キーワード： 連続時間信号 (continuous-time signals)，位相限定相関関数 (Phase-Only Correlation function)，周波数変換 (frequency transformation)

連絡先： 〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05 東北大学 青葉山キャンパス 電子情報システム・応物系 1 号館 521 号室 吉澤・杉田研究室
佐藤有弥，Tel.: (022)795-7130，Fax.: (022)795-7125，E-mail: yuya.sato.q4@dc.tohoku.ac.jp

1. まえがき

位相限定相関 (POC:Phase-Only Correlation) 関数は２つの信号の類似度を評価する関数として知られている．また，POC 関数は２信号の幾何学的な関係，例えば信号の位置ずれなど，を求めることができる．そのため画像マッチング [1]，生体認証アルゴリズム [2]，古いフィルムの位置ずれ補正 [3]，周期性を持つ DNA 配列の探索 [4] などに応用されてきた．

２つの信号の位相スペクトルが等しい場合，つまり位相スペクトル差が 0 であるとき POC 関数はデルタ関数になる．また，２つの信号の位相スペクトルが異なる場合，つまり位相スペクトル差が 0 ではないときには POC 関数はデルタ関数とは異なる．２つの信号の位相スペクトルが完全に一致するということはまれであるため，２つの信号の位相スペクトル差が 0 ではない場合の POC 関数の挙動について明らかにする必要があった．文献 [5] では，信号の位相スペクトル差が確率変数であると仮定し，POC 関数の期待値と分散を導出することで POC 関数の挙動を統計的に解析してきた．

信号は，連続な時間軸上で定義される連続時間信号と離散的な時間軸上で定義される離散時間信号の二つに分類される．連続時間信号は信号処理を施す場合，任意の周期でサンプリングすることで離散時間信号に変換される．連続時間信号を一定のサンプリング周期でサンプリングして離散時間信号を得るとき，連続時間信号では $(-\infty, \infty)$ で定義されていた位相が離散時間信号においては $(-\pi, \pi]$ に制限されてしまう．離散時間信号における POC 関数の性質については先行研究 [6] などによって解析がなされているが，連続時間信号における POC 関数について

は解析がなされていないため，これを考える必要がある．また，サンプリングに伴う位相スペクトルの変化によって，位相スペクトルを確率変数と仮定した場合に従う確率分布が，連続時間信号においてはどういった分布であったのかを離散時間信号の位相スペクトルの分布から復元することができなくなる．連続時間における位相スペクトルの情報を保存するためには，信号のサンプリング時に起こる位相スペクトルの変化を抑える必要がある．その方法として，本稿では連続時間における投影法を用いた位相スペクトルの非線形な変換を提案する．

2. 離散時間における POC 関数

まず，先行研究 [5] で明らかになっている事実として，離散時間信号における POC 関数の定義とその統計的性質を述べる．信号長が N である２つの離散時間複素信号をそれぞれ $x(n), y(n)$ とする．これらの離散時間フーリエ変換（DFT）$X(k), Y(k)$ はそれぞれ以下の式で表される．

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \mathrm{DFT}[x(n)] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = |X(k)| e^{j\theta(k)} \quad (1) \\
Y(k) &= \mathrm{DFT}[y(n)] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_N^{kn} = |Y(k)| e^{j\phi(k)} \quad (2)
\end{aligned}
$$

ここで，$W_N = \exp(-j2\pi/N)$ であり，DFT の回転因子を表す．また，$\theta(k), \phi(k)$ はそれぞれ $X(k), Y(k)$ の位相スペクトルである．離散時間信号の POC 関数は，正規化クロスパワースペクトル $R(k)$ を離散フーリエ逆変換したものとして定義される．よって，離散時間信号の POC 関数は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
r(m) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R(k) W_N^{-mk} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\alpha(k)} W_N^{-mk} \quad (3)
\end{aligned}
$$

ここで，$\alpha(k) = \theta(k) - \phi(k)$ であり信号の位相スペクトル差を表す．つぎに，位相スペクトル差 $\alpha(k)$ を確率変数とすることで，POC 関数の期待値と分散を求める．位相スペクトル差 $\alpha(k)$ が確率分布に従う確率変数であるとすると，POC 関数の期待値と分散は位相因子の期待値 A を用いて次のように表せる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[r(m)] &= A\delta(m) \quad (4) \\
\mathrm{Var}[r(m)] &= \frac{1}{N}(1 - |A|^2) \quad (5)
\end{aligned}
$$

よって，位相因子の期待値 A を求めることができれば，POC 関数の期待値と分散を計算することができる．

位相スペクトルが確率分布に従う場合，確率密度関数の特性関数から位相因子の期待値を求めることができる．位相スペクトルの従う確率分布の確率密度関数を $p(\alpha(k))$ とすると，特性関数 $\Psi(t)$ は次の式で表される．

$$
\begin{aligned}
\Psi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha(k)t} p(\alpha(k)) d\alpha(k) \\
&= \mathrm{E}[e^{j\alpha(k)t}] \quad (6)
\end{aligned}
$$

よって，式 (6) において $t = 1$ とすることで，位相因子の期待値 $A = \mathrm{E}[e^{j\alpha(k)}]$ を計算することができる．以上より，離散時間信号の POC 関数の期待値と分散は，位相スペクトル差が確率分布に従う場合，その特性関数を計算することで求めることが可能である．

3. 連続時間における POC 関数

3.1 POC 関数の定義

連続時間信号における POC 関数の挙動を解析するため，まず連続時間信号における POC 関数を定義する．信号長が T である２つの連続時間複素信号を，$f(t), g(t)$ とする．これらの信号のフーリエ級数展開は以下の式で表される．

$$
\begin{cases}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k) e^{j\omega_0 kt} \ (0 \leqq t \leqq T) \\
F(k) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{j\omega_0 kt} dt \\
&= |F(k)| e^{j\theta(k)} \ (-\infty \leqq k \leqq \infty)
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} g(t) & = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)e^{j\omega_0 kt} \ (0 \leqq t \leqq T) \\ G(k) & = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{j\omega_0 kt}dt \\ & = |G(k)|e^{j\phi(k)} \ (-\infty \leqq k \leqq \infty) \end{cases}$$

ここで，$\omega_0 = 2\pi/T$ であり，$\theta(k), \phi(k)$ はそれぞれ $F(k), G(k)$ の位相を表している．2 つの信号 $f(t), g(t)$ の正規化クロスパワースペクトル $R(k)$ は次のように表される．

$$\begin{aligned} R(k) &= \hat{F}(k)\hat{G}^*(k) \\ &= \frac{F(k)G^*(k)}{|F(k)||G^*(k)|} \\ &= e^{j\alpha(k)} \end{aligned} \tag{7}$$

ここで，$\alpha(k) = \theta(k) - \phi(k)$ であり，位相スペクトル差を表している．

連続時間信号の POC 関数は正規化クロスパワースペクトルをフーリエ係数とするフーリエ級数展開の形で表される．また，正規化のため以下の条件を付加する．

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r(t)|^2 dt = \mathrm{Const.} \tag{8}$$

この条件の下，連続時間信号における POC 関数 $r(t)$ を定義すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} R(k)e^{j\omega_0 kt} \\ &= \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} e^{j\alpha(k)}e^{j\omega_0 kt} \end{aligned} \tag{9}$$

3.2 期待値と分散

式 (9) で定義される連続時間信号の POC 関数の統計的性質を見ていく．位相スペクトル差 $\alpha(k)$ が確率分布に従うと仮定する．このとき，POC 関数の期待値は次の式で表される．

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[r(t)] &= \mathrm{E}\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} e^{j\alpha(k)}e^{j\omega_0 kt}\right] \\ &= \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} \mathrm{E}[e^{j\alpha(k)}]e^{j\omega_0 kt} \\ &= \begin{cases} A\dfrac{1}{2N+1}\dfrac{\sin\left(\frac{(2N+1)\omega_0 t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)} \ (t \neq 0, T) \\ A \ (t = 0, T) \end{cases} \end{aligned} \tag{10}$$

また，POC 関数の分散は次の式で表される．

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[r(t)] &= \mathrm{E}[r(t)r^*(t)] - \mathrm{E}[r(t)]\mathrm{E}[r^*(t)] \\ &= \frac{1}{2N+1}(1 - AA^*) \end{aligned} \tag{11}$$

ここで，位相因子の期待値を A としている．位相スペクトル差 $\alpha(k)$ を確率密度関数 $p(k)$ に従う確率変数と仮定すると，特性関数 $\Psi(s)$ は次のように表せる．

$$\begin{aligned} \Psi(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha(k)t}p(\alpha(k))d\alpha(k) \\ &= \mathrm{E}[e^{j\alpha(k)t}] \end{aligned} \tag{12}$$

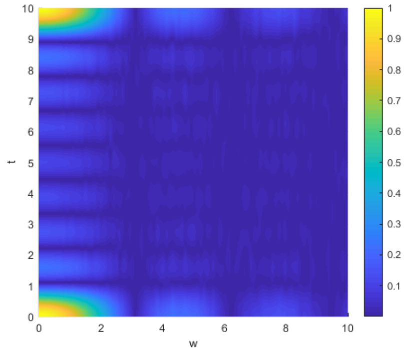
これは，離散時間信号の場合で考えた特性関数と一致するため，連続時間信号においても離散時間信号の場合と同じように，特性関数を考えることで位相因子の期待値を求めることができる．

3.3 計算例：位相スペクトル差 $\alpha(k)$ が一様分布に従う場合

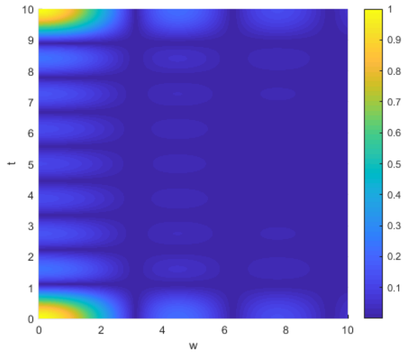
位相スペクトル差 $\alpha(k)$ が平均 μ の一様分布 $U(-w+\mu, w+\mu)$ に従うものと仮定し，このときの POC 関数の期待値と分散を求める．位相因子の期待値は次のように計算される．

$$A = \frac{\sin(w)}{w}e^{-j\mu} \tag{13}$$

これを POC 関数の期待値と分散の一般式に代入することで，位相スペクトル差が平均 μ の一様分布 $U(-w+\mu, w+\mu)$ に従う場合の POC 関

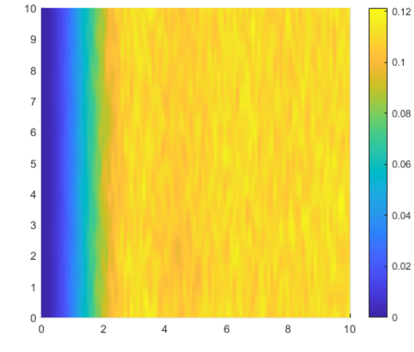


(a) 実測値

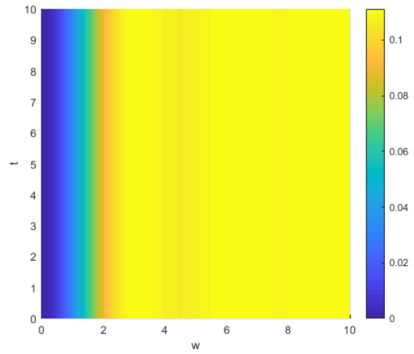


(b) 理論式

Fig. 1: 連続時間信号の
POC 関数の期待値



(a) 実測値



(b) 理論式

Fig. 2: 連続時間信号の
POC 関数の分散

数の期待値と分散の理論式が以下のように求められる．

$$\mathrm{E}[r(t)] = \begin{cases} \dfrac{1}{2N+1}\dfrac{\sin(w)}{w}\dfrac{\sin\left(\frac{(2N+1)\omega_0 t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)} & (t \neq 0, T) \\ \dfrac{\sin(w)}{w} & (t = 0, T) \end{cases} \tag{14}$$

$$\mathrm{Var}[r(t)] = \frac{1}{2N+1}\left(1 - \left(\frac{\sin(w)}{w}\right)\right) \tag{15}$$

シミュレーションによって得られた実測値と，連続時間信号の POC 関数の期待値と分散の理論式がそれぞれ次の図 1(a), 図 1(b), 図 2(a), 図 2(b) になる．図 1(a) と図 1(b)，図 2(a) と図 2(b) から，連続時間信号における POC 関数の期待値と分散の理論式が実測値に合致しているといえる．また，期待値のピークが $t = 0, T$ であること，w が大きくなった場合，期待値は減少する傾向にあり，分散は増加する傾向にあることが分かった．

4.　位相スペクトルの周波数変換

4.1　位相スペクトル

位相スペクトル差は，２つの信号の位相スペクトルがどれだけ異なっているのかというデータである．連続時間信号において位相スペクトルは $(-\infty, \infty)$ の値をとりうる線形確率分布に従うと考えられる．それに対して離散時間信号の場合，位相スペクトルは $(-\pi, \pi]$ の範囲に制限されており，先行研究 [6] では離散時間信号の位相スペクトルは巻き込み分布に従うものであると考えられている．連続時間信号はサンプリングすることで離散時間信号へと変換できる．よって，この位相スペクトルの従う分布の変化はサンプリングによって生じるものと考えられる．離散時間信号の位相スペクトル α_{d} としたとき，巻き込み法による位相スペクトルの変換

は式 (16) によって与えられる．

$$\alpha_{\mathrm{d}} = (\alpha - \pi)(\mathrm{mod}\ 2\pi) - \pi \tag{16}$$

巻き込み法による位相スペクトルの変換の特徴として，変換が不可逆であることが挙げられる．これは，位相スペクトルが従っていた確率分布についても同様に言える．そのため，離散時間信号の位相スペクトルの情報から連続時間信号の位相スペクトルの情報を完全には復元できない．巻き込み分布に従う位相スペクトルの取りうる値の範囲は $(-\pi, \pi]$ であり，これはサンプリング周波数 F_{s} で正規化されている．したがって，位相の変換によって位相スペクトルの値の取りうる範囲を $(-\pi F_{\mathrm{s}}, \pi F_{\mathrm{s}})$ に変換できれば，位相スペクトルは連続時間信号の位相スペクトル情報を保存したまま離散時間信号として扱うことができると考えられる．位相スペクトルの値の取りうる範囲を変換する方法として，以下の式による周波数変換を提案する．

$$\tilde{\alpha}(k) = 2\arctan(\alpha(k))\ (-\pi < \tilde{\alpha}(k) < \pi) \tag{17}$$

4.2　投影法を用いた変換

式 (17) で与えられる変換を行った場合の POC 関数の挙動について見ていく．変換を行った後の POC 関数は以下の式になる．

$$r(t) = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} e^{j\tilde{\alpha}(k)} e^{j\omega_0 kt} \tag{18}$$

変換前後で POC 関数の変化は位相スペクトル差 $\alpha(k)$ が $\tilde{\alpha}(k)$ となったことのみであるため，この周波数変換による変化を調べるためには位相因子の期待値 A の変化を考えればよい．位相因子の期待値を考えるために，位相スペクトルの変化について考える．$\tilde{\alpha}(k)$ の確率密度関数を $p'(\tilde{\alpha})$ とするとこれは $\alpha, p(\alpha)$ を用いて以下のように表される．

$$p'(\tilde{\alpha}) = p(\alpha)\left|\frac{1+\alpha^2}{2}\right| \tag{19}$$

式 (17),(19) から，$p'(\tilde{\alpha})$ の特性関数 $\Psi(s)$ は以下の式で表される．

$$\begin{aligned}\Psi(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} p'(\tilde{\alpha}) e^{j\tilde{\alpha}s} d\tilde{\alpha} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\alpha) e^{j2\arctan(\alpha)s} d\alpha \end{aligned} \tag{20}$$

以上のことから，投影法を用いた変換を位相スペクトル差に施した場合の位相因子の期待値 A についても，確率密度関数の特性関数を考えることによって求めることができる．よって，POC 関数の期待値と分散の一般式にここで求めた位相因子の期待値 A を代入することで，位相スペクトル差を変換した後の POC 関数の期待値と分散を求めることができる．

4.3　計算例：位相スペクトル差が一様分布に従う場合

位相スペクトル差に周波数変換を施さない場合と同様に，位相スペクトル差 $\alpha(k)$ が平均 μ の一様分布 $U(-w+\mu, w+\mu)$ に従うものと仮定し，このときの POC 関数の期待値と分散を求める．位相因子の期待値は次のように計算される．

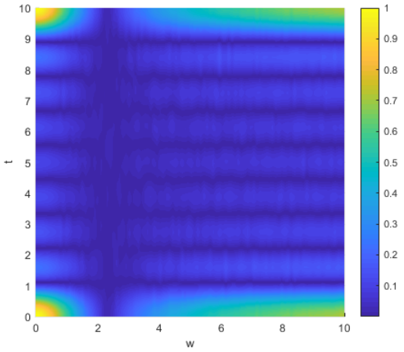
$$\begin{aligned} A = &\ \frac{\arctan(\mu+w) + \arctan(\mu-w)}{w} - 1 \\ &+ j\frac{1}{2w}\log\left(\frac{1+(\mu+w)^2}{1+(\mu-w)^2}\right) \end{aligned} \tag{21}$$

このとき，$\mu = 0$ とすると，虚部が 0 となるので，次のようになる．

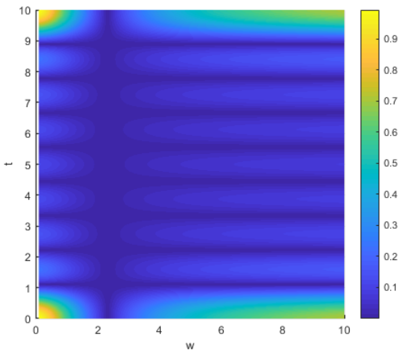
$$A = \frac{2\arctan(w)}{w} - 1 \tag{22}$$

これを，POC 関数の一般式に代入すると，期待値と分散の理論式は以下のように求められる．

$$\mathrm{E}[r(t)] = \begin{cases} \dfrac{1}{2N+1}\left(\dfrac{2\arctan(w)}{w} - 1\right)\dfrac{\sin\left(\frac{(2N+1)\omega_0 t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)} & (t \neq 0, T) \\ \dfrac{2\arctan(w)}{w} - 1\ (t = 0, T) \end{cases}$$

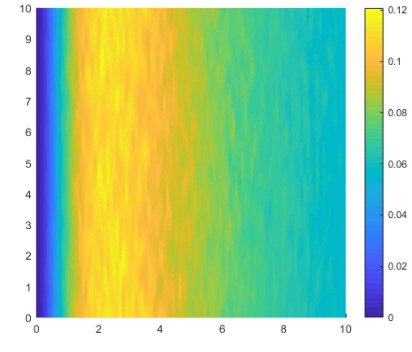


(a) 実測値

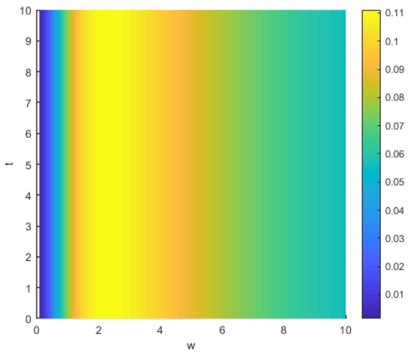


(b) 理論式

Fig. 3: 連続時間信号の
POC 関数の期待値



(a) 実測値



(b) 理論式

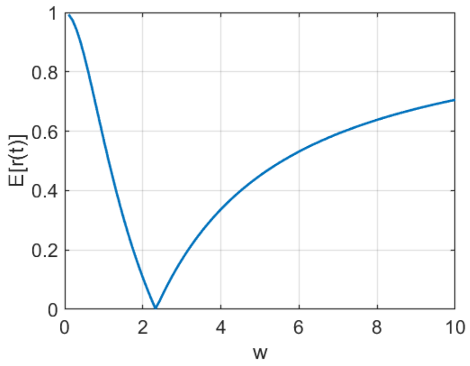
Fig. 4: 周波数変換後の
POC 関数の分散

$$\mathrm{Var}[r(t)] = \frac{1}{2N+1}\left(1-\left(\frac{2\arctan(w)}{w}-1\right)^2\right)$$

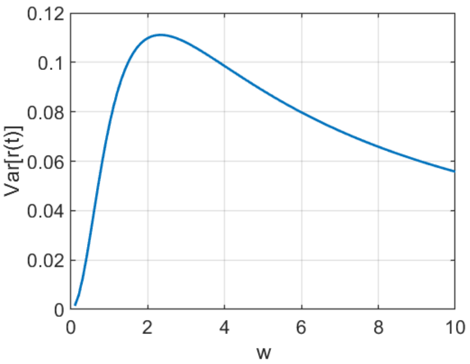
シミュレーションによって得られた実測値と，連続時間信号の POC 関数の期待値と分散の理論式がそれぞれ次の図 3(a), 図 3(b), 図 4(a), 図 4(b) になる．図 3(a) と図 3(b)，図 4(a) と図 4(b) から，周波数変換後の POC 関数の期待値と分散の理論式が実測値に合致しているといえる．またこの図から，周波数変換を施した場合の POC 関数の期待値と分散の挙動は周波数変換を施していない場合と異なり，w の値の増加に伴って増減しないことがわかる．図 3(b),4(b) の $t=0$ のとき，POC 関数が w の値に伴って変化する様子を表した図が図 5(a),5(b) である．この図から，POC 関数の期待値の最小値を与える w の値と分散の最大値を与える w の値は等しいことがわかる．この w の値を w_1 とすると，$w \leqq w_1$ では w の値の増加に伴い，期待値は単調減少し分散は w の値の増加に伴い単調に増加する．$w > w_1$ では，w の値の増加に伴い，期待値は単調減少し分散は単調増加することがわかる．

5. おわりに

本研究では，連続時間信号をサンプリングして得られる離散時間信号の POC 関数の挙動について調べる前段階として連続時間信号における POC 関数の挙動の解析と，位相スペクトル差の巻き込み変換による影響を回避する手段としての位相スペクトル差の非線形変換を考えた．今後の研究として，位相スペクトルの周波数変換を行った連続時間信号と周波数変換を行わない連続時間信号のそれぞれをサンプリングして離散時間信号にした場合の POC 関数の挙動について調べる必要がある．



(a) 期待値 ($t = 0$)



(b) 分散 ($t = 0$)

Fig. 5: 周波数変換後の POC 関数の w に伴う変化

参考文献

1) C. D. KUGLIN. The phase correlation image alignment mathod. Proc. Int. Conf. on Cibernetics and Society, 1975, pages 163-165, 1975.

2) K. Miyazawa, K. Ito, T. Aoki, K. Kobayashi and H. Nakajima, "An Effective Approach for Iris Recognition Using Phase-Based Image Matching," in IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 30, no. 10, pp. 1741-1756, Oct. 2008.

3) Mizuki HAGIWARA, Masahide ABE, Masayuki KAWAMATA, Estimation Method of Frame Displacement for Old Films Using Phase-Only Correlation, Journal of Signal Processing, 2004, 8 巻, 5 号, p. 421-429.

4) A. K. Brodzik, "Phase-only filtering for the masses (of DNA Data): a new approach to sequence alignment," in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 54, no. 6, pp. 2456-2466, June 2006.

5) S. Yamaki, J. Odagiri, M. Abe and M. Kawamata, "Effects of stochastic phase spectrum differences on phase-only correlation functions: Part I: Statistically constant phase spectrum differences for frequency indices," 2012 3rd IEEE International Conference on Network Infrastructure and Digital Content, Beijing, 2012, pp. 360-364.

6) Shunsuke YAMAKI, Masahide ABE, Masayuki KAWAMATA, Statistical Analysis of Phase-Only Correlation Functions with Phase-Spectrum Differences Following Wrapped Distributions, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2016, Volume E99.A, Issue 10, Pages 1790-1798, Released October 01, 2016.