計測自動制御学会東北支部 第 329 回研究集会 (2020.10.30)
資料番号 329-1

座標系の切り替えを用いた剛体の姿勢制御

Rigid-body Attitude Control with Switched Coordinate Systems

○熊谷竜太 *，村松鋭一 **

○ Ryuta Kumagai*, Eiichi Muramatsu**

*山形大学

*Yamagata University

キーワード： 剛体（Rigid-body），姿勢制御（Attitude control），回転行列 (Rotation matrix)，平衡点（equilibrium），

連絡先： 〒 992-8510　米沢市城南 4-3-16 山形大学大学院 理工学研究科 応用生命システム工学専攻
村松鋭一，Tel.: (0238)26-3327，E-mail: muramatu@yz.yamagata-u.ac.jp

---

1.　はじめに

宇宙空間における人工衛星や，回転翼によって空中を浮遊する飛行体，海中で動作するロボットなどにおいては，ボディがどの方向を向くか，すなわち姿勢の高精度な制御が必要とされる．そのため，これらの姿勢制御の問題は 3 次元空間における剛体の回転運動の制御の問題として考えることができる．

文献 [1] において，剛体の姿勢制御系について解析されている．その制御系の回転運動を行う剛体の閉ループシステムにおいて，1 つの安定な平衡点と 3 つの不安定な平衡点が存在する．これらの局所的構造を解析すると，不安定な平衡点付近において安定な部分空間，不安定な部分空間が存在し，従来の制御則を用いて制御を行った場合，不安定な平衡点の安定な部分空間に近いほど所望する目的姿勢までの収束が遅くなる問題が生じる．

本研究では，剛体の姿勢に対して数理モデルに基づく制御系設計理論の考察を行い，初期姿勢から所望する目標姿勢へ回転させる制御系設計を考える．オイラー方程式と回転行列で表される剛体を制御対象とし，剛体の姿勢と角速度をコントローラにフィードバックする制御系を考える．前述した問題点に対し，座標系を切り替えることによって過渡特性を向上させ，目標姿勢に速く到達させることができるコントローラの設計法を提案する．

2.　剛体の姿勢表現と運動方程式

2.1　回転行列

本研究では剛体の姿勢を表すために回転軸と回転角を用いて表される回転行列 $\boldsymbol{R}$ を用いる．3 次元空間における静止座標系に対し，回転する剛体に固定した機体座標系を考え，静止座標系の座標軸を回転軸ベクトル $\boldsymbol{a}$ のまわりに回転角 θ だけ回転させると機体座標系の座標軸に一致するとき，剛体は回転行列 $\boldsymbol{R}$ で回転してい

ると見なす．回転行列を以下のように示す．

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{a}^{\times}\sin(\theta) + (\boldsymbol{a}^{\times})^2(1-\cos(\theta)) \quad (1)$$

ただし，(1) 式の θ は回転角，$\boldsymbol{a}$ は回転軸のベクトル，$\boldsymbol{I}$ は 3×3 の単位行列を表す．$\boldsymbol{a}^{\times}$ は交代行列であり，$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T$ に対して

$$\boldsymbol{a}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

で表されるものとする．

2.2 回転を表す運動方程式

回転行列 $\boldsymbol{R}$，角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を用いて剛体の運動方程式を以下に示す式で表現する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{u} && (2) \\ \dot{\boldsymbol{R}} &= \boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}^{\times} && (3) \end{aligned}$$

(2) 式の $\boldsymbol{J}$ は慣性テンソル，$\boldsymbol{u}$ は剛体に加える制御トルクを表す．姿勢安定化の目的として，所望する姿勢 $\boldsymbol{R}_d$ および角速度 $\boldsymbol{\omega}=0$ によって与えられる所望の平衡点を漸近的に安定させるフィードバックコントローラを設計することである．

3. 剛体の制御系とその特性

この章では文献[1)] で述べられている制御系の特性についてまとめておく．

3.1 コントローラ

制御においてフィードバックコントローラは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= -\boldsymbol{K}_v\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{K}_p\boldsymbol{\Omega}_a(\boldsymbol{R}) && (4) \\ \boldsymbol{\Omega}_a(\boldsymbol{R}) &\triangleq \sum_{i=1}^{3} a_i e_i \times (\boldsymbol{R}_d^T\boldsymbol{R}e_i) && (5) \end{aligned}$$

を使用する．ただし，(4)，(5) 式における $\boldsymbol{K}_v$，$\boldsymbol{K}_p$ はゲイン行列，$a_i(i=1,2,3)$ は制御パラメータ，$e_i(i=1,2,3)$ は $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$ が単位行列となるようなベクトルを表す．制御対象とフィードバックコントローラは $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{\omega}$ に関して非線形であるため，制御において扱う問題は非線形制御系の設計問題となる．

3.2 閉ループシステムのダイナミクスと平衡点の導出

回転運動を行う剛体の状態量を $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{\omega})$ としたとき，コントローラ (4) 使用した閉ループシステムのダイナミクスは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} \\ &\quad -\boldsymbol{K}_v\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{K}_p\boldsymbol{\Omega}_a(\boldsymbol{R}) && (6) \\ \dot{\boldsymbol{R}} &= \boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}^{\times} && (7) \end{aligned}$$

で表される．ここで平衡点を求めるため，(6)，(7) 式の右辺をゼロに等しくする．(7) 式より $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}^{\times}=0$ になるため，$\boldsymbol{R}$ は可逆より $\boldsymbol{\omega}=0$ を得る．(6) 式に $\boldsymbol{\omega}=0$ を代入すると $\boldsymbol{\Omega}_a(\boldsymbol{R})=0$ になる．$\boldsymbol{\Omega}_a(\boldsymbol{R}_e)=0$ とすると，(5) 式は下記の (8) 式で表すことができる．

$$\begin{aligned} & a_1e_1\times\boldsymbol{R}_d^T\boldsymbol{R}_e e_1 + a_2e_2\times\boldsymbol{R}_d^T\boldsymbol{R}_e e_2 \\ & +a_3e_3\times\boldsymbol{R}_d^T\boldsymbol{R}_e e_3 = 0. && (8) \end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{R}_d^T\boldsymbol{R}_e = [r_{i,j}]_{i,j\in1,2,3}$ である．(8) 式をまとめると以下のようにあらわすことができる．

$$\therefore \begin{cases} a_2r_{32} = a_3r_{23} \\ a_3r_{13} = a_1r_{31} \\ a_1r_{21} = a_2r_{12} \end{cases} \quad (9)$$

$a_1,a_2,a_3 > 0$ であることから，(9) 式より $\boldsymbol{R}_d^T\boldsymbol{R}_e$ は以下のように表すことができる．

$$\boldsymbol{R}_d^T\boldsymbol{R}_e = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ \frac{a_2}{a_1}r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ \frac{a_3}{a_1}r_{13} & \frac{a_3}{a_2}r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (10)$$

直交行列の性質 $(\boldsymbol{R}_d^T\boldsymbol{R}_e)(\boldsymbol{R}_d^T\boldsymbol{R}_e)^T = (\boldsymbol{R}_d^T\boldsymbol{R}_e)^T(\boldsymbol{R}_d^T\boldsymbol{R}_e) = \boldsymbol{I}$ を用いると，(10) は以下のようにまとめることができる．

$$\therefore \begin{cases} (1-\frac{a_2^2}{a_1^2})r_{12}^2 + (1-\frac{a_3^2}{a_1^2})r_{13}^2 = 0 & (11) \\ (1-\frac{a_2^2}{a_1^2})r_{12}^2 - (1-\frac{a_3^2}{a_2^2})r_{23}^2 = 0 & (12) \\ (1-\frac{a_3^2}{a_1^2})r_{13}^2 + (1-\frac{a_3^2}{a_2^2})r_{23}^2 = 0 & (13) \end{cases}$$

a_1, a_2 および a_3 は異なる値をとるため，(11)-(13) 式の解は以下の a),b) のいずれかを満たす．

$$a) \quad r_{12} = r_{13} = r_{23} = 0$$
$$b) \quad r_{i,j}(i \neq j) \neq 0$$

はじめに a) について，(11)-(13) 式の自明な解であることに注意しながら考える．$r_{12} \neq 0$ とすると，a_1, a_2 および a_3 は異なる値をとるため，$(1-\frac{a_2^2}{a_1^2}) \neq 0, (1-\frac{a_3^2}{a_1^2}) \neq 0, (1-\frac{a_3^2}{a_2^2}) \neq 0$ ということになる．また $r_{12} \neq 0$ であることから，(11) 式は $r_{13} \neq 0$ をもたらし，(12) 式からは $r_{23} \neq 0$ が生じる．同様の議論が $r_{13} \neq 0$ および $r_{23} \neq 0$ の場合にも成り立つ．したがって，(11)-(13) 式のすべての解は a)，b) のいずれかを満たす．

次に b) の場合について考える．$a_1 > a_2$ とすると，$r_{12} \neq 0$ より $(1-\frac{a_2^2}{a_1^2})r_{12}^2 > 0$ であるため，(11) 式は $(1-\frac{a_3^2}{a_1^2})r_{13}^2 < 0$ をもたらす．r_{13}^2 は正の値より $a_3 > a_1$ となるため，$a_3 > a_1 > a_2$ となる．この不等式は以下のことを表す．

$$(1-\frac{a_3^2}{a_1^2})r_{13}^2 < 0, \qquad (1-\frac{a_3^2}{a_2^2})r_{23}^2 < 0$$

したがって，(12) 式の左辺は負の値となり矛盾が生じる．これと同様の議論は $a_1 < a_2$ について，(11)-(13) 式が b) の場合に対して矛盾を生じさせることを示している．したがって，a_1, a_2, a_3 は異なる値をとることから，b) の場合は矛盾を生じるため，(11)-(13) 式に対する唯一の解は a) の場合，すなわち $r_{12} = r_{13} = r_{23} = 0$ である．また，(10) 式に $r_{12} = r_{13} = r_{23} = 0$ を代入すると，r_{11}, r_{22}, r_{33} はそれぞれ+1 または-1 の値をとることになる．以上のことから，下記のように定義することができる．

Proposition1

$(\boldsymbol{R}_e, 0)$ は以下に示す (14) 式を満たすような，閉ループ姿勢の運動方程式 (6)-(7) における平衡点である．

$$\boldsymbol{R}_d^T\boldsymbol{R}_e \in \boldsymbol{S} \triangleq \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array}\right], \\ \left[\begin{array}{ccc} e_1 & -e_2 & -e_3 \end{array}\right], \\ \left[\begin{array}{ccc} -e_1 & -e_2 & e_3 \end{array}\right], \\ \left[\begin{array}{ccc} -e_1 & e_2 & -e_3 \end{array}\right], \end{array} \tag{14}$$

つまり，平衡点 $(\boldsymbol{R}_e, 0)$ は

$$\xi \triangleq \{(\boldsymbol{R}_d, 0), (\boldsymbol{R}_\alpha, 0), (\boldsymbol{R}_\beta, 0), (\boldsymbol{R}_\gamma, 0), \} \tag{15}$$

に対して $(\boldsymbol{R}_e, 0) \in \xi$ となるものであり，ここで姿勢 $\boldsymbol{R}_\alpha, \boldsymbol{R}_\beta, \boldsymbol{R}_\gamma$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_\alpha &\triangleq \boldsymbol{R}_d \left[\begin{array}{ccc} e_1 & -e_2 & -e_3 \end{array}\right], \\ \boldsymbol{R}_\beta &\triangleq \boldsymbol{R}_d \left[\begin{array}{ccc} -e_1 & -e_2 & e_3 \end{array}\right], \\ \boldsymbol{R}\gamma &\triangleq \boldsymbol{R}_d \left[\begin{array}{ccc} -e_1 & e_2 & -e_3 \end{array}\right], \end{aligned}$$

である．

Proposition 1 は，閉ループシステムは 4 つの異なる平衡点をもつことを意味する．これらの平衡点のうちの一つは，姿勢 $\boldsymbol{R}_d$ によって特定される所望の平衡点であり，一方で残りの平衡点は姿勢 $\boldsymbol{R}_\alpha, \boldsymbol{R}_\beta$ および $\boldsymbol{R}_\gamma$ によって指定される．これらの姿勢 $\boldsymbol{R}_\alpha, \boldsymbol{R}_\beta, \boldsymbol{R}_\gamma$ は，剛体のボディに固定された 3 つの座標軸の周りをそれぞれ 180 度回転した点であり，所望の姿勢 $\boldsymbol{R}_d$ とは異なる．

3.3 非線形方程式の線形化

次に，所望の平衡点と残りの 3 つの平衡点のそれぞれの安定性を解析し，これらの平衡点付近における閉ループベクトル場の局所的構造を解

析する．各線形化は$\mathbb{R}^6$で展開される．閉ループシステムにおけるダイナミクスの局所的構造を解析するうえで，各平衡点についての閉ループ方程式を線形化する必要がある．$(\boldsymbol{R}_e, 0) \in \xi$を閉ループシステム(6)-(7)の平衡解とする．摂動パラメータ$\varepsilon \in \mathbb{R}$に関して，平衡点$(\boldsymbol{R}_e, 0) \in \xi$の摂動を考える．

初期姿勢の摂動を$\boldsymbol{R}(0,\varepsilon) = \boldsymbol{R}_e e^{\varepsilon \boldsymbol{\Theta}_0^{\times}}$とする．ここで，$\boldsymbol{R}_d^T \boldsymbol{R}_e \in \boldsymbol{S}$は(14)式で与えられ，$\boldsymbol{\Theta}_0 \in \mathbb{R}^3$である．また，初期角速度は$\boldsymbol{\omega}(0,\varepsilon) = \varepsilon \boldsymbol{\omega}_0$とし，$\boldsymbol{\omega}_0 \in \mathbb{R}^3$である．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}(t,\varepsilon) &= \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}(t,\varepsilon) \times \boldsymbol{\omega}(t,\varepsilon) \\ &\quad -\boldsymbol{K}_v \boldsymbol{\omega}(t,\varepsilon) \\ &\quad -\boldsymbol{K}_p \boldsymbol{\Omega}_a(\boldsymbol{R}(t,\varepsilon)) \qquad (16) \\ \dot{\boldsymbol{R}}(t,\varepsilon) &= \boldsymbol{R}(t,\varepsilon)\boldsymbol{\omega}(t,\varepsilon)^{\times} \qquad (17) \end{aligned}$$

次に，線形化された状態量$\Delta\boldsymbol{\omega}, \Delta\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^3$を$\Delta\boldsymbol{\omega}(t) \triangleq \boldsymbol{\omega}_{\varepsilon}(t,0), \Delta\boldsymbol{\Theta}(t)^{\times} \triangleq \boldsymbol{R}_e^T \boldsymbol{R}_{\varepsilon}(t,0)$として定義する．それによって，以下の式が得られる．

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \Delta\boldsymbol{\omega} \qquad (18) \\ \boldsymbol{J}\Delta\dot{\boldsymbol{\omega}} &= -\boldsymbol{K}_v \Delta\boldsymbol{\omega} \\ &\quad -\boldsymbol{K}_p \boldsymbol{\Omega}_a(\boldsymbol{R}_e \Delta\boldsymbol{\Theta}^{\times}) \qquad (19) \end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{\Omega}_a(\boldsymbol{R}_e \Delta\boldsymbol{\Theta}^{\times})$は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_a(\boldsymbol{R}_e \Delta\boldsymbol{\Theta}^{\times}) &= a_1 e_1 \times (\boldsymbol{R}_d^T \boldsymbol{R}_e \Delta\boldsymbol{\Theta}^{\times} e_1) \\ &\quad + a_2 e_2 \times (\boldsymbol{R}_d^T \boldsymbol{R}_e \Delta\boldsymbol{\Theta}^{\times} e_2) \\ &\quad + a_3 e_3 \times (\boldsymbol{R}_d^T \boldsymbol{R}_e \Delta\boldsymbol{\Theta}^{\times} e_3) \\ &= -(a_1 e_1^{\times} \boldsymbol{R}_d^T \boldsymbol{R}_e e_1^{\times} \\ &\quad + a_2 e_2^{\times} \boldsymbol{R}_d^T \boldsymbol{R}_e e_2^{\times} \\ &\quad + a_3 e_3^{\times} \boldsymbol{R}_d^T \boldsymbol{R}_e e_3^{\times})\Delta\boldsymbol{\Theta} \qquad (20) \end{aligned}$$

であり，$\boldsymbol{R}_d^T \boldsymbol{R}_e$はProposition 1における(14)式で与えられる$\boldsymbol{S}$に属する．

(19)-(20)式を組み合わせると，(15)式の各平衡点について閉ループシステム(6)-(7)式の線形化が以下に示す線形化方程式で得られる．

$$\boldsymbol{J}\Delta\ddot{\boldsymbol{\Theta}} + \boldsymbol{K}_v \Delta\dot{\boldsymbol{\Theta}} + \mathsf{K}\Delta\boldsymbol{\Theta} = 0 \qquad (21)$$

ここで，定数行列Kは各平衡姿勢に応じて次式で与えられる．

$$\mathsf{K} = \begin{cases} \boldsymbol{K}_p \mathrm{diag}(a_2 + a_3, a_1 + a_3, a_1 + a_2), \\ -\boldsymbol{K}_p \mathrm{diag}(a_2 + a_3, a_1 - a_3, a_1 - a_2), \\ -\boldsymbol{K}_p \mathrm{diag}(a_3 - a_2, a_3 - a_1, a_1 + a_2), \\ -\boldsymbol{K}_p \mathrm{diag}(a_2 - a_3, a_1 + a_3, a_2 - a_1), \end{cases} \qquad (22)$$

ただし，(22)式におけるKは上から$\boldsymbol{R}_e = \boldsymbol{R}_d$，$\boldsymbol{R}_e = \boldsymbol{R}_{\alpha}$，$\boldsymbol{R}_e = \boldsymbol{R}_{\beta}$，$\boldsymbol{R}_e = \boldsymbol{R}_{\gamma}$の条件に対応するものとする．したがって，4つの平衡点付近における局所的なダイナミクスは，正の減衰を持つ線形二次システムによって与えられる．その剛性は各平衡点に依存する．所望の平衡点に近づくと剛性は正定値を示す．すなわち所望の平衡点付近における局所的なダイナミクスは局所的指数関数的に安定となる．姿勢$\boldsymbol{R}_{\alpha}, \boldsymbol{R}_{\beta}$および$\boldsymbol{R}_{\gamma}$に対応する3つの平衡点付近においては，それらの剛性行列は少なくとも一つの負の固有値を持ち，その結果不安定となり鞍点を生じる．したがって，3つの各平衡点付近における閉ループダイナミクスは不安定となる．さらに，これらの平衡点の固有値はゼロではないことにより，次のことが言える．

Proposition2

閉ループシステム(6)-(7)における所望の平衡点$(\boldsymbol{R}_d, 0)$は局所指数関数的収束で漸近的に安定である．平衡点$(\boldsymbol{R}_{\alpha}, 0), (\boldsymbol{R}_{\beta}, 0)$および$(\boldsymbol{R}_{\gamma}, 0)$は双曲型関数的に不安定である．

3.4　固有値と固有ベクトル

(21)式より

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\boldsymbol{\Theta}} \\ \Delta\ddot{\boldsymbol{\Theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{J}^{-1}\mathsf{K} & -\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{K}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\Theta} \\ \Delta\dot{\boldsymbol{\Theta}} \end{bmatrix} \qquad (23)$$

と表現できる．例として，姿勢$\boldsymbol{R}_{\gamma}$に対応する不安定な平衡点のおける線形方程式の固有値を調

べると，正の固有値と負の固有値がある．このようにして，不安定平衡点の近くにおいて，安定な部分空間と不安定な部分空間が存在することを確認した．

不安定平衡点の近くに初期状態がある場合を考える．安定な固有値に対応する固有ベクトルの線形結合 $v_a = [\Delta\boldsymbol{\Theta}_a, \Delta\boldsymbol{\omega}_a]$ および不安定な固有値に対応する固有ベクトルの線形結合 $v_b = [\Delta\boldsymbol{\Theta}_b, \Delta\boldsymbol{\omega}_b]$ を以下に示す．

$$\Delta\boldsymbol{\Theta}_a = \begin{bmatrix} 0.4021 \\ 0.3037 \\ 0.2993 \end{bmatrix}, \Delta\boldsymbol{\omega}_a = \begin{bmatrix} 0.5939 \\ -0.9528 \\ -0.9542 \end{bmatrix},$$

$$\Delta\boldsymbol{\Theta}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8432 \\ 0.9827 \end{bmatrix}, \Delta\boldsymbol{\omega}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5375 \\ 0.1849 \end{bmatrix},$$

これらを用いた初期条件を以下に示す．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}(0) &= \mathrm{diag}(-1, 1, -1) \\ &\quad \exp(\delta\Delta\boldsymbol{\Theta}_a^\times + \varepsilon\Delta\boldsymbol{\Theta}_b^\times), \quad (24) \\ \boldsymbol{\omega}(0) &= \delta\Delta\boldsymbol{\omega}_a + \varepsilon\Delta\boldsymbol{\omega}_b, \quad (25) \end{aligned}$$

上記の初期条件において，$0 < \delta \ll 1$ に設定して制御を行う．制御結果を Fig.1 に示す．

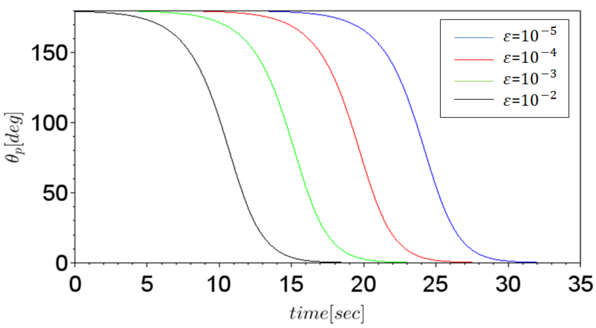

Fig. 1　姿勢角の偏差

Fig.1 において，本研究では，初期条件 (22), (23) に $\delta = 10^{-4}$，$\varepsilon = \{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$ を設定し制御を行った場合の姿勢誤差をプロットした．Fig.1 で示すように，ε の値が小さくなると収束時間が長くなる. さらに姿勢誤差が 180 度に近い場合に過渡期間の増加が発生する．これは，解が長期間にわたって不安定な平衡点 $(\boldsymbol{R}_\gamma, 0)$ に近いままであることを示している．この動作は，初期状態が所望の平衡点 $(\boldsymbol{R}_d, 0)$ の吸力領域に近いほど平衡点 $(\boldsymbol{R}_d, 0)$ に収束するのに時間がかかることを示している．

4.　座標系の切り替えを用いた制御系設計

4.1　制御方法の提案

前章では，所望する平衡点 $(\boldsymbol{R}_d, 0)$ の他に 3 つの平衡点 $(\boldsymbol{R}_\alpha, 0)$, $(\boldsymbol{R}_\beta, 0)$, $(\boldsymbol{R}_\gamma, 0)$ の存在を確認した．平衡点 $(\boldsymbol{R}_\alpha, 0)$, $(\boldsymbol{R}_\beta, 0)$, $(\boldsymbol{R}_\gamma, 0)$ の局所的な構造の解析により，これらの平衡点の安定性は双曲型関数的に不安定であったため，安定な部分空間と不安定な部分空間が存在する．不安定な平衡点付近からの制御において，安定な部分空間に近いほど過渡期間が増加し，所望の平衡点 $(\boldsymbol{R}_d, 0)$ までの収束時間が長くなる問題を確認した．

本研究ではこの問題に対し，初期姿勢が不安定平衡点における安定な部分空間から大きく離れるように角度を調整した座標系を作成する．作成した座標系と従来の座標系をつなぎ合わせて，座標系の切り替えを可能とする新たな座標系を提案する．これにより制御の有効性を検討する．

4.2　座標系切り替えの手順

はじめに，座標系について説明する．提案する座標系を Fig.2 に示す．A 座標系は目標姿勢が単位行列となるような座標系，B 座標系は A 座標系を回転行列 $\boldsymbol{R}_{AB}$ によって回転させた座標系とする．それぞれの座標系における剛体の姿勢を表す回転行列を $\boldsymbol{R}_A, \boldsymbol{R}_B$ とする．B 座標系では B 座標系における単位行列 $\boldsymbol{I}_B$ を目標姿

勢とする制御を行い，A 座標系では目標姿勢 $\boldsymbol{R}_d$ まで剛体を回転させる制御を行う．

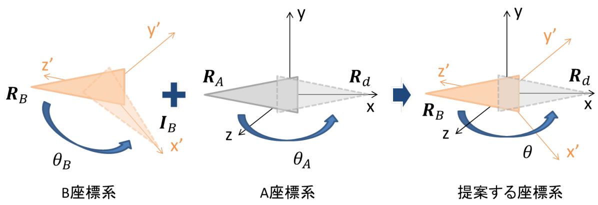

Fig. 2　提案する座標系

Fig.2 に示す座標系を用いる制御の手順を以下に示す．

1) はじめに，B 座標系で制御を行う．現時点では B 座標系において回転行列 $\boldsymbol{R}_B$ を用いて目標姿勢 $\boldsymbol{I}_B$ へ姿勢を到達させる制御を行う．

2) 剛体が初期姿勢から 90 度回転した時点で B 座標系から A 座標系へと切り替えを行う．座標系の切り替えは $\boldsymbol{R}_A = \boldsymbol{R}_{AB}\boldsymbol{R}_B$ を用いて行う．この操作により，最終的な目標姿勢も A 座標系における $\boldsymbol{R}_d$ に切り替わる．

3) A 座標系において回転行列 $\boldsymbol{R}_A$ を用いて目標姿勢 $\boldsymbol{R}_d$ へと姿勢を到達させる．

上記の制御における制御結果を Fig.3 に示す．ただし，初期条件 (24)，(25) に設定する δ, ε については，δ は前回の制御と同様に $\delta = 10^{-4}$ を設定するが，ε は Fig.1 にて最も収束時間が長かった $\varepsilon = 10^{-5}$ を設定して制御を行う．また，従来の制御法を用いた制御結果を破線で示し，提案する制御法を用いた制御結果を実線で示す．

Fig.3 より，提案する手法によって過渡応答が改善され，収束時間を短縮できることを確認した．

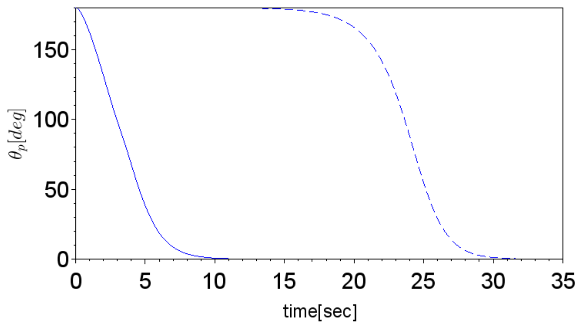

Fig. 3　姿勢角の偏差

5.　総括

従来の制御方法で制御を行った場合，３つの不安定平衡点における安定な部分空間からの制御は所望する平衡点までの収束時間が長くなるという問題点が確認できた．これに対し，座標系を切り替えて制御を行うことにより収束時間が長くなる問題点を改善した．異なる座標系を用いることによって，制御開始地点が安定な部分空間付近ではなくなったため，制御の立ち上がりが遅くならずに素早く目標姿勢に到達した．すなわち，安定な部分空間付近から離れた地点からの全ての制御においてこのことが成り立つと考えられる．

今後の展望として，B 座標系に対して合理的な姿勢角の偏差の設定や用いる座標系の個数を変更することにより，コントローラの有効性を評価する．

参考文献

[1] N. A. Chaturvedi, A. K. Sanyal, and N. H. McClamroch : "Rigid-Body Attitude Control, IEEE Control System Magazine, June, 2011.

[2] 長谷川律雄：回転の表現，計測と制御，Vol.41, No.9, 2002.