

結合振動子系の同期現象の解析と制御

Analysis and Control for Synchronization of Coupled Oscillators

○谷藤寛崇*, 村松鋭一**

○Hiroataka Tanifuji*, Eiichi Muramatsu**,

*山形大学

*Yamagata University

キーワード：同期現象 (Synchronization), 結合振動子 (Coupled Oscillators), 蔵本モデル (Kuramoto model)

連絡先：〒992-0038 米沢市城南 4-3-16 山形大学大学院理工学研究科 応用生命システム工学専攻
村松鋭一, Tel.: (0238)26-3327 E-mail: muramatu@yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

心臓の拍動, 概日時計による睡眠と活動のリズムなど, 生物の世界では様々な種類の周期的な活動が営まれており, それらは生物リズムと呼ばれている. さらに, 蛍の集団において発光の同期が見られたり, 同じ机に置いた二つのメトロノームを異なるタイミング, 角度で動かし始めると, 最初は異なるタイミングで振り続けるが次第に動きが揃い, 最終的には全く同じ動きになる. これらの例に見られるように, 複数の振動するシステムの状態変数の時間的推移が相互作用によって同じ振動の特性を示すようになる現象が存在する. 複数のシステムの位相が同じになり, 動きが揃うことを同期現象と呼ぶ. ほとんどの生物リズムの背後には振動子集団の同期現象があり, 複数個の振動子が相互作用することによってさまざまな現象を生み出す.

本研究では, 複数の非線形振動子の相互作用を解析し, 同期の発生条件, 発生・抑制の制御可能条件および制御方法を考える. 複数の相互

作用を考え, その構造を表す数学的モデルの特性の観点から, 同期発生条件や制御方法を考察する. 相互作用を有する非線形振動子集団で知られている蔵本モデルに着目する.

2. 結合振動子系

2.1 振動子のモデル

N 個の振動子が相互作用しているとする.

$$\dot{X}_l(t) = F_l(X_l) + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N H(X_j) \quad (1)$$

ここで X_l は $l (= 1, \dots, N)$ 番目の振動子の状態, $F_l(X_l)$ はそのダイナミクス, $K \geq 0$ は結合強度, $H(X)$ は各振動子への寄与を表す関数である. 振動子が周期的に動き, その位相のみに着目すると,

$$\dot{\theta}_l(t) = \omega_l + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\theta_l - \theta_j) \quad (2)$$

という形の結合位相振動子系に近似できる。ここで θ_l は l 番目の振動子の位相, ω_l は振動数を表し, Γ は振動子間の相互作用を表す関数である。

結合位相振動子系の典型例として, 蔵本モデルがあり次の式で表される。

$$\dot{\theta}_l(t) = \omega_l - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_l - \theta_j) \quad (3)$$

ここで, ω_l は固有振動数, N は振動子の数, $K \geq 0$ は結合強度を表す。

2.2 秩序パラメータ

系の振動子の同期の度合いは, 下記で与えられる秩序パラメータの振幅 R と Θ , およびそれらによって決まる複素数 z によって定量化できる。

$$z = R \exp(i\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(i\theta_j) \quad (4)$$

R は 0 から 1 までの値を取る。系の振動子が全く同期しておらず, 各 θ_j がばらばらに運動していれば $R = 0$ となる。一方, 系のすべての振動子が完全に同期しており, すべての θ_j が等しければ, $R = 1$ となる。 Θ は, 結合振動子全体を平均化して 1 つの振動子にまとめたものの位相を意味する。

3. 同期現象の解析

初期位相をランダムに与えた N 個の振動子がある場合を考える。ここで, 結合強度 K は 0.0 から 0.4 とし, ω_l は正規分布の確率分布による確率変数として値を与えた。図の横軸は時間 $t[\text{sec}]$, 縦軸は相対位相 $\theta_j - \Theta$ とした。

3.1 同期しない場合

振動子数 $N = 20$, $K = 0.0$ とした場合の結果を Fig.1 に示す。

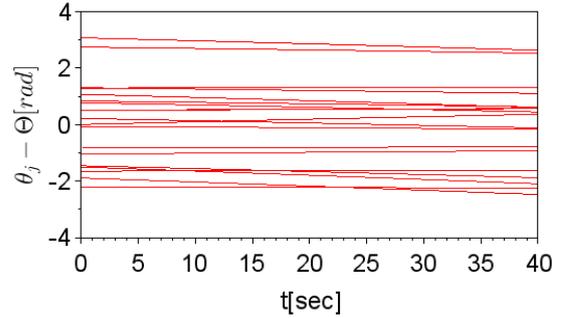


Fig. 1 $N = 20$, $K = 0.0$ の時の時間と相対位相

K が 0.0 に近い値の時は, 時間が経っても振動子の位相が同じになることはない。

3.2 同期する場合

振動子数 $N = 20, 200$, $K = 0.1, 0.4$, と与えた場合, 相対位相 $\theta_j - \Theta$ の時間発展は以下の図になる。

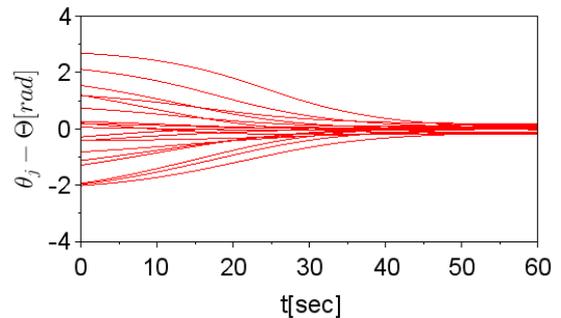


Fig. 2 $N = 20$, $K = 0.1$ の時の時間と相対位相

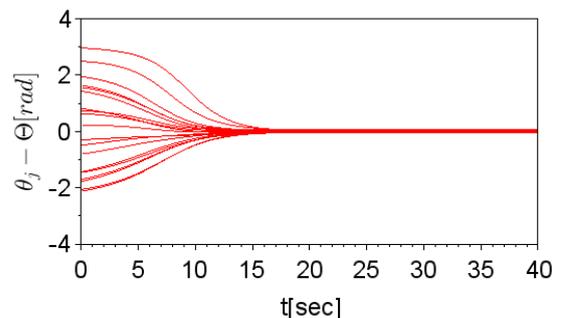


Fig. 3 $N = 20$, $K = 0.4$ の時の時間と相対位相

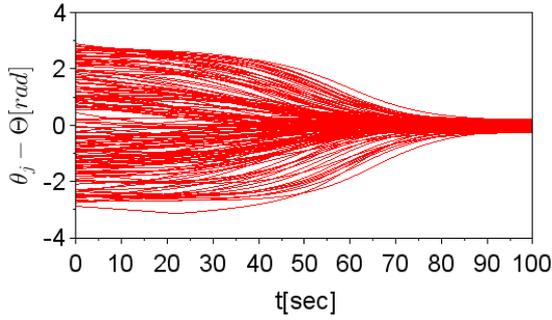


Fig. 4 $N = 200$, $K = 0.1$ の時の時間と相対位相

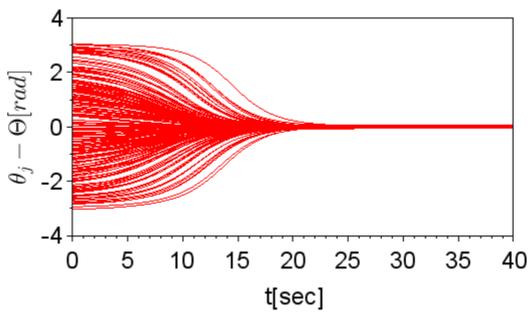


Fig. 5 $N = 200$, $K = 0.4$ の時の時間と相対位相

Fig.2, Fig.3, Fig.4, Fig.5の図より、最初は位相がバラバラだった振動子が時間と共に収束し、同期している。また、 K の値が大きくなると同期までの時間が短くなる。また、振動子数が増えると同期するまでの時間が長くなることが分かる。

4. 結合強度依存

次に定常状態における系の秩序パラメータの振幅 R をさまざまな結合強度 K に対してプロットしたグラフを示す。 $K = 0.1$ あたりから R が増加していることが分かる。この値を分岐点 K_c とする。 K_c を境に同期現象が生じる。結合強度が $K < K_c$ の時には、系の個々の振動子がばらばらになり、 R が0に近くなる、つまり非同期となる。 $K > K_c$ の時には、多数の振動子が同期を起こし、 R が増加する。なお、 K_c の値は系

によって異なり、 $\Gamma(\phi)$ の形状、振動数分布 $g(\omega)$ などによって決まる。どの場合においても、分岐点 K_c は0.1付近である。

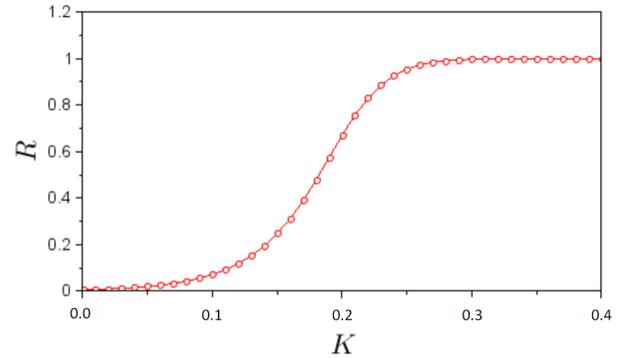


Fig. 6 $N = 8000$ の秩序パラメータの結合強度依存性

5. 結合が疎な場合

本研究で蔵本モデルを用いているが、このモデルはそれぞれの振動子がすべての振動子と結合している。しかし、結合を疎にしても、同期は起こるのではないかと考えている。また、それぞれの振動子には番号が定められている。例えば振動子 $N = 20$ の場合、0番目の振動子から19番目の振動子までの合計20個の振動子が構築される。結合を疎にするため、以下の2つの場合分けをする。

場合分け (1) 奇数番号と偶数番号の振動子が結合

振動子 θ_l の番号 l が奇数の場合なら偶数 ($l = 0, 2, \dots, N$) 番号と、振動子 θ_l の番号 l が偶数の場合なら奇数 ($l = 1, 3, \dots, N - 1$) 番号と相互作用している状態。

場合分け (2) 奇数番号同士、偶数番号同士の振動子が結合かつ奇数偶数間一か所のみ結合

振動子 θ_l の番号 l が奇数 ($l = 1, 3, 5, \dots, N - 1$) 同士または偶数 ($l =$

0, 2, 4, ..., N) 同士で相互作用している状態。

以上の2つの場合分けをし、振動子数 $N = 20$, $K = 0.4$ とした場合の結果を以下に示す。

5.1 奇数番号と偶数番号の振動子が結合

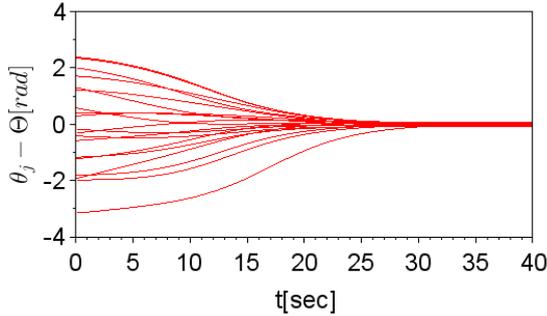


Fig. 7 奇数番号と偶数番号の振動子が結合した場合の時間と相対位相

Fig.7より同期することが分かる。ただし同期にかかる時間は全ての振動子が結合する時と比べて約2倍になる。

5.2 奇数番号同士、偶数番号同士の振動子が結合かつ奇数偶数間一か所のみ結合

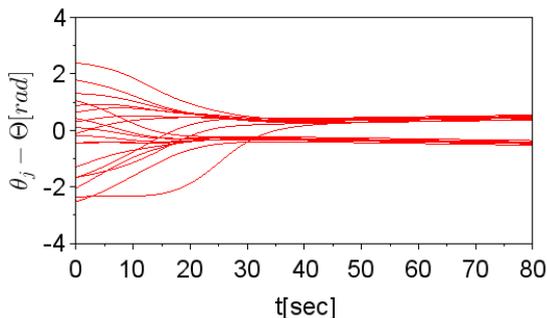


Fig. 8 奇数番号同士、偶数番号同士の結合かつ奇数偶数間一か所のみ結合した場合の時間と相対位相

Fig.8より、最初は位相がバラバラだった振動子が時間と共に収束していることが分かる。し

かし、最終的に2つのグループに分かれて同期する。奇数偶数間に一か所だけ結合しているが、結合が弱すぎたためすべての振動子が同期しないと考えられる。

6. 非同期化の制御

実際の現象において、集団同期現象が望ましい場合もそうでない場合もあり、同期を発生させる、あるいは同期をなくす制御の両方が必要となってくる。これまでのシミュレーションでは、初期位相がバラバラな振動子が時間が経つにつれて位相が同じになるという非同期から同期することを確認した。この章では、制御入力 u を用い、各振動子に入力することで同期している複数のシステムを非同期させる制御を行う。

6.1 制御入力 u の値設定

蔵本モデルに制御入力 u を加える。制御入力 u はそれぞれの振動子 θ_l, θ_j , 秩序パラメータの振幅 R , Θ などを用いることにより制御を期待できる。蔵本モデル ((3) 参照) は全ての振動子が結合する項 $\frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_l - \theta_j)$ があるため同期すると考えられる。本研究ではこの同期に関する項を u に加え、倍率を変化させることで制御を行う。(5) に外部入力 u の式を示す。ただし、 G は制御ゲインを表す。

$$u = \left\{ \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_l - \theta_j) \right\} \times G \quad (5)$$

6.2 ゲイン G の設定法

制御入力 u の値は、秩序パラメータの $\exp(i\Theta)$ と系の振動子 θ_j の正弦の差を用い、結合振動子全体を平均化して得られた1つの振動子に近い場合には制御入力 u の値を小さく、遠い場合には制御入力 u の値を大きくなるように設定した。また第2.2節で述べたように、秩序パラメータ

の振幅 R は、まったく同期しないとき $R = 0$ 、完全に同期すると $R = 1$ となる。制御ゲイン G を (6), A を (7) とする。

$$G = R + A \quad (6)$$

$$A = 1.0 - \sin \frac{|\Theta - \theta_l|}{2.0} \quad (7)$$

(7) より、位相差 $\Theta - \theta_l$ は最短距離 ($0 \sim 180^\circ$) を表すため、 A は最大で 1.0, 最小で 0.0 で変化する。よって秩序パラメータの振幅 R , A どちらも非同期の際値が小さい値, 同期の際大きい値に変化するため制御が期待できる。

6.3 制御方法

同期している際各振動子に制御入力 u を作用させ、(5)(6) より、制御入力 u は (8), 制御入力 u を加えた振動子の式を (9) に示す。

$$u = \left\{ \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_l - \theta_j) \right\} (R + A) \quad (8)$$

$$\dot{\theta}_l(t) = \omega_l - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_l - \theta_j) + u \quad (9)$$

振動子数 $N = 20$, $K = 0.4$ とし、時間 t が 20 秒を超えた時制御入力 u を加えた場合の結果を Fig.9 に示す。

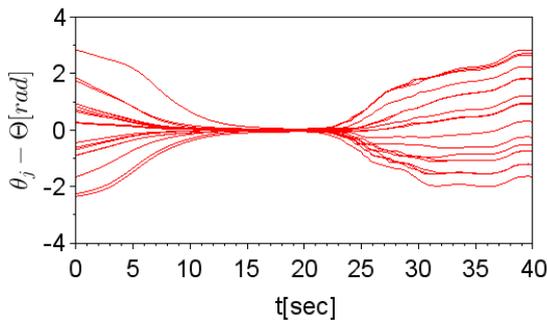


Fig. 9 20 秒後に外部入力 u を加えた場合の時間と相対位相

Fig.9 より、初期位相がバラバラな振動子が時間が経つにつれ同期に向かい、20 秒を境に同期がなくなることが分かる。したがって、同期をなくす制御が出来たと言える。

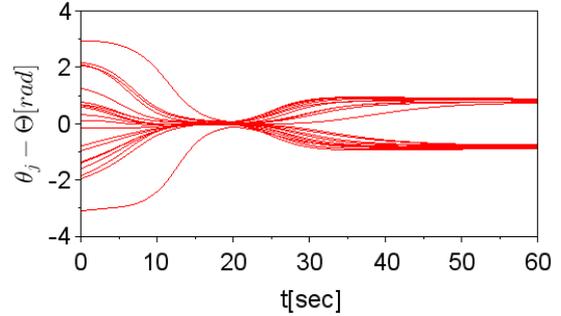


Fig. 10 20 秒後に外部入力 u を加えた場合の時間と相対位相

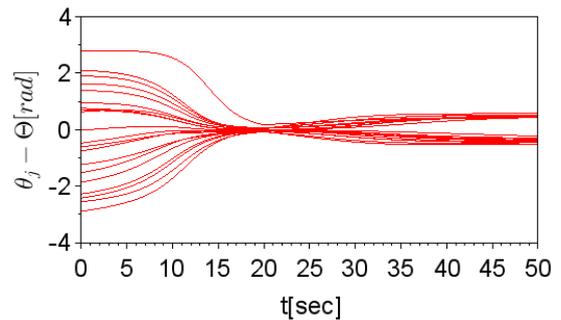


Fig. 11 20 秒後に外部入力 u を加えた場合の時間と相対位相

また、Fig.10, Fig.11 は、Fig.9 同様、非同期から同期に向かうまでは同じだが、20 秒を超え外部入力 u が加わると初めは非同期に向かう挙動を表し、最終的に 2 つのグループに分かれ同期していることが確認できる。また、2 つのグループの位相の差は Fig.10 では 90° 、Fig.11 では約 45° であった。ただ制御入力 u を加え、同期から非同期にさせるだけではなく、数グループに分け非同期または同期させることも可能ではないかと考える。

7. おわりに

結合振動子系において位相がバラバラの複数の振動子が時間が経つにつれ同期することが確認できた。振動子 N の数，結合強度 K の値によって同期や非同期の有無，また同期するまでの時間 t が変化した。シミュレーション結果より，結合強度 K には秩序パラメータの振幅 R が増加する境があり，その境を分岐点 K_c とした。分岐点 $K_c = 0.1$ であり， $K < K_c$ の場合非同期， $K_c < K$ の場合同期の挙動が見られる。結合を疎にしても同期すると考えた。偶数番号と奇数番号の振動子が結合した場合，時間は遅くなるが同期する。最後に制御を行った。制御入力 u を用いることにより，同期している振動子集団を非同期させることができた。

本研究では制御入力 u を R や正弦で設定し，それぞれの振動子を平均化させた $e^{i\theta}$ とそれぞれの振動子 $e^{i\theta_N}$ が離れているとき大きな制御，近いとき小さな制御を加えた。同期から非同期の制御を行うことはできたが，制御後ノイズが生じてしまったため新たな制御方法を提案したい (Fig.9 参照)。制御入力 u の値を変え，同期から非同期に向けての効率の良い制御，数グループに分けて同期させる制御方法も今後の課題である。また本研究では，同期している振動子を非同期させる制御を行ったが，同期から非同期までの一方的な制御だけではなく，同期から非同期，非同期から同期と挙動が繰り返す制御を行いたいと考えている。振動子の挙動を踏まえて効率的な同期の制御を目指す研究を行ってきたい。

参考文献

- [1] 郡宏，森田善久：生物リズムと力学系，共立出版，2011
- [2] 中尾裕也：結合位相振動子系の安定性と同期現象，2016