

非線形システムに対する状態推定フィルタの設計

Design of State Estimation Filter for Non-linear Systems

田中燎磨*, 村松鋭一*

Ryoma Tanaka*, Eiichi Muramatsu*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード： 状態推定 (state estimation), 非線形システム (nonlinear system), 拡張カルマンフィルタ (extended Kalman filter), UKF (unscented Kalman filter), 雑音除去 (noise elimination)

連絡先： 〒 992-8510 米沢市城南町 4-3-16 山形大学大学院応用生命システム工学専攻
村松鋭一, Tel.: (0238)26-3327, Fax.: (0238)26-3327, E-mail: muramatu@yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

1960 年代初頭にカルマンによって提案されたカルマンフィルタ (KF) は現代でもなお代表的なシステムの状態推定の方法として様々な分野への応用が期待されている。

カルマンフィルタは線形なシステム方程式に対して最適な推定値を求めるものであるが、実際に取り扱う問題の多くは非線形であり汎用性が低いといった問題点がある。

そうしたことから近年、非線形システムに対しても適用可能なフィルタとして拡張カルマンフィルタ (EKF) やアンセンテッドカルマンフィルタ (UKF) についての研究が進められている。その中でも 1990 年代半ばに S. J. Julier と J. K. Uhlman の二人によって提案された UKF はシグマポイントという少数個のサンプル点を用いて推定値を求める手法であり拡張カルマンフィルタ (EKF) と比較すると精度がよい優位性を持っていることから特に活用が期待されているフィルタである。

また UKF は EKF では推定できなかった微小不可能な不連続な非線形システムに対しても対応可能である。

本研究では非線形状態推定フィルタである UKF の推定精度を検証し、これをもとに新しく改良した UKF を提案しその有効性について考える。

2. 非線形状態推定フィルタ

2.1 非線形なモデルの状態方程式

本研究で研究対象とするのはつぎの状態方程式で表されるシステムである。

$$x[k+1] = f(x[k]) + v[k] \quad (1)$$

$$y[k] = h(x[k]) + w[k] \quad (2)$$

ここで $v[k]$ と $w[k]$ はシステム雑音と観測雑音を表しており、互いに独立である。そして関数 $f(\cdot)$ と $h(\cdot)$ はどちらも非線形関数であるものとする。

2.2 アンセンテッドカルマンフィルタ (UKF) 算する .

アンセンテッドカルマンフィルタ (UKF) は拡張カルマンフィルタ (EKF) の手法である関数の線形近似を用いる代わりに、非線形変換を受けた確率変数の統計量を近似的に求める手法となっている . そして U 変換を用いることによって推定精度の向上を図っている .

また UKF は EKF と比べて非線形変換を受けた状態の平均ベクトルや共分散行列をより正確に求めることが可能なのでシステムの非線形性が強い場合に有効であり小数のサンプル点を用いて推定を行っていることより計算量が少ない優位性がある .

UKF のアルゴリズムについては大きく分けて以下の 2 つのステップがある .

- ・ 予測ステップ
- ・ フィルタリングステップ

予測ステップにおいて推定した値と観測した値の誤差をフィルタリングステップにおいてフィードバックすることにより誤差の低減を図っている .

予測ステップでは 1 時刻前の推定値 から現時刻での 事前状態推定値を求め、またフィルタリングステップでは予測ステップにおいて求めた事前状態推定値を最新の観測値を用いて修正して事後状態推定値を求める流れとなっている .

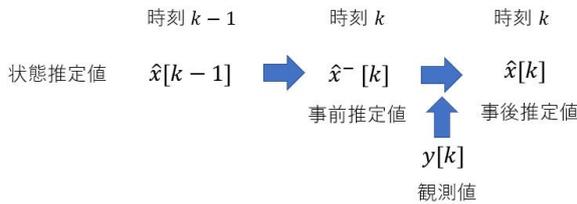


Fig. 1 UKF の大まかなアルゴリズム

従来から知られている UKF のアルゴリズムの詳細については以下の通りである ¹⁾ .

最初に 1 時刻前に得られた状態推定値 $\hat{x}(k-1)$ $P(k-1)$ とし $2n+1$ 個のシグマポイントを計

$$X_0(k-1) = \hat{x}(k-1) \quad (3)$$

$$X_i(k-1) = \hat{x}(k-1) + \sqrt{n+k}(\sqrt{P(k-1)})_i \quad (4)$$

$$X_{n+i}(k-1) = \hat{x}(k-1) - \sqrt{n+k}(\sqrt{P(k-1)})_i \quad (5)$$

また、重みをつぎのようにおく .

$$w_0 = \frac{k}{n+k}, \quad w_i = \frac{1}{2(n+k)} \quad (6)$$

予測ステップは次の式で表される .

$$X_i^-(k) = F(X_i(k-1)) \quad \text{ここで } i = 0, 1, \dots, 2n \quad (7)$$

$$\hat{x}^-(k) = \sum_{i=0}^{2n} w_i X_i^-(k) \quad (8)$$

$$P^-(k) = \sum_{i=0}^{2n} w_i (X_i^-(k) - \hat{x}^-(k))(X_i^-(k) - \hat{x}^-(k))^T + \sigma_v^2 b b^T \quad (9)$$

ただし、 $\hat{x}^-(k)$ は事前状態推定値、 $P^-(k)$ は事前誤差共分散行列である . また、シグマポイントの再計算を $\hat{x}_0(k-1) = \hat{x}(k-1)$ で行い、以下の計算を行う .

$$X_0^-(k) = \hat{x}^-(k) \quad (10)$$

$$X_i^-(k) = \hat{x}^-(k) + \sqrt{n+k}(\sqrt{P^-(k)})_i \quad (11)$$

ここで $i=0, 1, \dots, 2n$

$$X_{n+i}^-(k) = \hat{x}^-(k) - \sqrt{n+k}(\sqrt{P^-(k)})_i \quad (12)$$

ここで $i=0, 1, \dots, 2n$

$$Y_i^-(k) = h(X_i^-(k)) \quad (13)$$

$$\hat{y}^-(k) = \sum_{i=0}^{2n} w_i Y_i^-(k) \quad (14)$$

$$P_{yy}^-(k) = \sum_{i=0}^{2n} w_i (Y_i^-(k) - \hat{y}^-(k))^2 \quad (15)$$

$$P_{xy}^-(k) = \sum_{i=0}^{2n} w_i (X_i^-(k) - \hat{x}^-(k))(Y_i^-(k) - \hat{y}^-(k)) \quad (16)$$

ただし, $Y_i^-(k)$ は出力のシグマポイントの更新, $\hat{y}^-(k)$ は事前出力推定値, $P_{yy}^-(k)$ は事前出力誤差共分散行列, $P_{xy}^-(k)$ は事前状態・出力誤差共分散行列である.

フィルタリングステップは次の式で表される.

$$g(k) = \frac{P_{xy}^-(k)}{P_{yy}^-(k) + \sigma_w^2} \quad (17)$$

$$\hat{x}(k) = \hat{x}^-(k) + g(k)(y(k) - \hat{y}^-(k)) \quad (18)$$

$$P(k) = P^-(k) - g(k)(P_{xy}^-(k))^T \quad (19)$$

を求める.

ここで $g(k)$ はカルマンゲイン, $\hat{x}(k)$ は状態推定値, $P(k)$ は事後誤差共分散行列である. 以上が UKF のアルゴリズムである.

3. 新しい手法の提案

3.1 従来の UKF

まず初めに雑音を考慮した対象となる非線形離散時間システムを考える.

$$x[k+1] = f(x[k]) + v[k] \quad (20)$$

$$y[k] = h(x[k]) + w[k] \quad (21)$$

ここで $v[k]$ と $w[k]$ はシステム雑音と観測雑音を表しており互いに独立であり, 関数 $f(\cdot)$ と $h(\cdot)$ はどちらも非線形関数である.

出力 $y[k]$ から x の推定値を逐的に求めていくのがアンセンテッドカルマンフィルタ (UKF) である.

次に本研究で例として用いる推定対象は非線形状態方程式で表される次のシステムである.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k)) + v(k) \\ &= 0.23x + 9 \sin(0.4x) + v(k) \end{aligned} \quad (22)$$

$$y(k) = h(x(k)) + w(k) = x + 1.5 \sin(x) + w(k) \quad (23)$$

ここで $v(k)$ は平均 0, 分散 1, $w(k)$ は平均 0, 分散 3 の正規性白色雑音とする.

この非線形状態方程式に従来の UKF を適用しシミュレーションを行ったところ以下の Fig.2 が得られた. また平均二乗誤差である RMSE(Root Mean Squared Error) の値は 5.9676 となった.

Fig.2 において赤線は真値, 青線は UKF による推定値を表している.

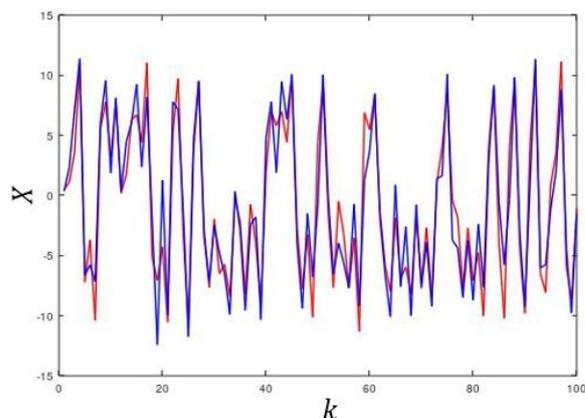


Fig. 2 UKF を適用した場合の出力結果

3.2 改良型 UKF の提案

ここで RMSE をより小さくするために改良型 UKF を次のように考える.

本研究では非線形関数 $f(\cdot)$ の非線形性の強さに応じて予測ステップの計算式を切り替える方法を提案する. 非線形性の強さは $f(\cdot)$ の 2 階微分に x の推定値である \hat{x} を代入した値の大きさによって測る. 非線形性が強い場合, 予測ステップに誤差が生じる可能性がある. そこで 2 階微分の値がしきい値 β を超えたら従来の UKF の予測ステップの式を用いずパラメータ α を用いて予測の更新幅を変える方法を試みる.

このシステムの状態方程式 $f(\cdot)$ の 2 階微分は以下のような式となり Fig.3 が得られる. Fig.3 から ± 1.3 の範囲内で値が変化していることが分かる.

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -1.44 \sin(0.4x) \quad (24)$$

この x に推定値 \hat{x} を代入した値が Fig.3 である.

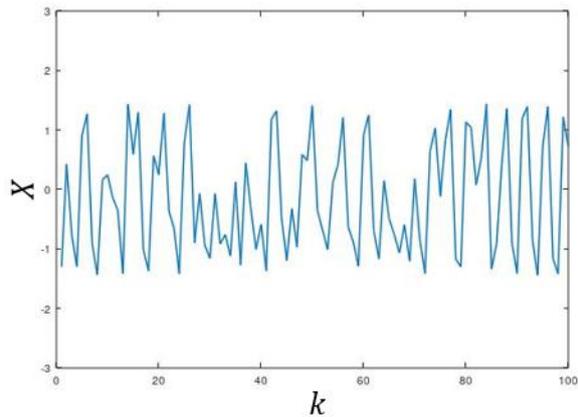


Fig. 3 関数 $f(\cdot)$ の 2 階微分に \hat{x} を代入した値

fig.3 からここで UKF の予測ステップにおける

$$X_i^-(k) = F(X_i(k-1)) \quad (25)$$

2 階微分の値が 1.0 を超えた場合は以下を適用してシミュレーションを行う。

$$X_i^-(k) = X_i(k-1) + \alpha(F(X_i(k-1)) - X_i(k-1)) \quad (26)$$

このとき α を 1.0 とすると (23) 式と (24) 式は一致することが分かる。

α を 1.2 としたときのシミュレーション結果を以下に示す。このときの RMSE は 2.7048 となり従来の手法よりも推定精度が上がったことが確認できた。

Fig.4 において赤線は真値, 青線は UKF による推定値を表している。

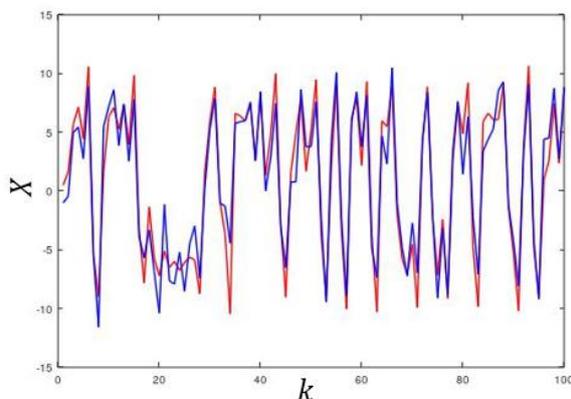


Fig. 4 $\alpha=1.2$ を UKF に適用した時の出力結果

次に $\alpha=0.5$ としたときの場合を考え, シミュレーションを行うと以下のような結果が得られその時の RMSE は 19.0030 となり $\alpha=1.0$ と設定したときに比べ推定精度が低下することが分かった。Fig.5 においても赤線は真値, 青線は UKF による推定値を表している。

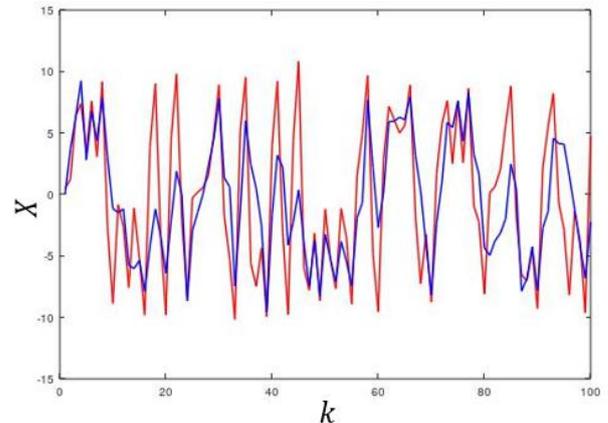


Fig. 5 $\alpha=0.5$ を UKF に適用した時の出力結果

4. シミュレーション結果に基づく考察

本研究では $\alpha=1.0$, $\alpha=1.2$, $\alpha=0.5$ とした 3 つの場合のシミュレーションを行うことで真値と推定値との推定誤差を検証した。

またそれぞれの数値におけるシミュレーションを 10 回を行いその RMSE の平均を求めるとそれぞれ 4.227, 3.689, 19.405 となり $\alpha=1.2$ と設定すると従来の手法よりも推定精度が向上し $\alpha=0.5$ と設定すると推定精度は低下することが確認できた。以下にその結果を示す。

以上から非線形関数の 2 階微分の値が大きいときはあらかじめ設定したシグマポイントを非線形関数 $f(\cdot)$ により非線形変換したときに誤差が大きくなることがある。そこで $\alpha=1.2$ と設定した方が誤差が小さくなり推定精度が向上したと考えられる。

Table 1 各パラメータ値における RMSE

	$\alpha=1.0$	$\alpha=1.2$	$\alpha = 0.5$
case1	5.9676	2.7048	19.003
case2	4.0310	3.3267	16.363
case3	3.5861	4.1326	20.963
case4	5.5535	3.5708	18.145
case5	4.3238	3.9879	18.458
case6	3.9900	3.7489	23.273
case7	4.4629	2.8761	17.883
case8	3.8553	5.2286	21.260
case9	3.1970	3.9675	18.395
case10	3.3079	3.3515	20.305
avarage	4.2275	3.6896	19.405

- 4) 山北昌毅:UKF(Unscented Kalman Filter)って何?*Systems, control and information*, vol.50, no. 7, pp. 261-266, 2006-07-15.
- 5) 山北昌毅:UKF(Unscented Kalman Filter)と KF はどう違うの?アイサイ問答教室 *Systems, control and information* Vol.53, No7, pp. 282-283, 2009
- 6) S.Julier and J.Uhlmann:Unscented filtering and nonlinear estimation *Proceedings of The IEEE* Vol 92 , No . 3 , pp . 401 - 421 (2004)

5. おわりに

本研究では対象となるスカラーの非線形関数の2階微分値を考慮して新しいフィルタを提案しそのシミュレーションを行うことで推定精度を比較した。そして従来手法よりも有効であることを確認した。

今後は α を別の値にした場合には出力誤差にどう影響するかだけでなく β の値も考慮しながら各パラメータを変えることで推定精度の向上がどう変化するかさらなる検討を深めたいと考えている。

また本研究においては様々な値でシミュレーションをしていく中で α や β のパラメータ値を決定したが今後はその値を理論的に求める手法やUKFのアルゴリズムを改良した少ない計算量で高精度な新しいフィルタについても視野に入れながら研究を進めていきたい。

参考文献

- 1) 足立修一, 丸田一郎: カルマンフィルタの基礎, 東京電機大学出版, 95/191 (2013)
- 2) 片山徹: 新版応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, (2000)
- 3) 大住晃, 亀山 建太郎, 松田 吉隆: カルマンフィルタとシステムの同定:動的逆問題へのアプローチ, 森北出版, (2016)