計測自動制御学会東北支部 第 336 回研究集会 (2021.12.1)
資料番号 336-4

グレイスコットモデルに対するオブザーバの設計

Design of Observer for the Gray-Scott Model

○石井つぼみ *，村松鋭一 *

○ Tsubomi Ishii*, Eiichi Muramatsu*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード： 反応拡散方程式 (reaction-diffusion equation), パターン形成 (pattern formation), グレイスコットモデル (Gray-Scott model), オブザーバ (observer), 制御系設計 (control system design)

連絡先： 〒 992-8510　米沢市城南町 4–3–16 山形大学大学院応用生命システム工学専攻
村松鋭一，Tel.: (0238)26-3327，Fax.: (0238)26-3327，E-mail: muramatu@yz.yamagata-u.ac.jp

1.　研究の背景と目的

1.1　背景

容器内の物質の濃度分布，部屋の中の温度分布，ある地域内での感染の分布などは，個体がその周囲から影響をうけて状態がどう変化するかで決まる．近年，ある空間内のおいて多数の個体がどのような状態の分布を示しているかの様子を，空間内の模様（パターン）としてとらえ，パターンの形成のメカニズムを数理的に探ることが研究されている [1)~4)]．反応拡散方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式は，その解がさまざまなパターンを形成することから興味深い研究対象となっている．

文献 5) において筆者らは，グレイスコットモデルと呼ばれる反応拡散方程式に対して，それが持つ 3 つの平衡点を求め安定性解析を行った．また，線形化したモデルの固有値解析によって，パターン形成の原因となる平衡点の不安定性を示した．また筆者らはグレイスコットモデルを制御対象と考え，上記の解析結果を制御対象の特性と見なし，パターンを制御する問題について研究を進めている．

反応拡散方程式によるパターン形成の制御問題は文献 6),7) で考察されている．ここでの対象モデルは反応項の非線形項が本研究とは異なるものでありグレイスコットモデルではない．本研究では 2 つの物質 U, V の化学反応との関連をもち，U と V の相互作用を反応項に含むグレイスコットモデルを研究の対象としている．

1.2　目的

文献 5) で提案された制御問題に関連して，本報告では制御対象の状態を推定するためのオブザーバの設計法を述べる．本研究で考察の対象となっているグレイスコットモデルの制御問題では 2 つの成分 u と v のうち u は測定可能，v は測定できず推定が必要な変数となっている．本稿においては v の推定値 $\hat{v}$ を生成するオブザーバの構成法を考え，数値シミュレーションによっ

てその有効性を確認する．

2. 反応拡散方程式

2.1 グレイスコットモデル

本研究で扱う反応拡散方程式 1)~4) はつぎに示すグレイスコットモデルと呼ばれる方程式である．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_1\Delta u - uv^2 + a(1-u) \tag{1}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_2\Delta v + uv^2 - (a+k)v \tag{2}$$

ここで，d_1, d_2 は拡散係数, a, k は反応項の定数で正の値をとる．u と v は時間 t と空間の位置座標 x, y の関数であり，$u(t,x,y), v(t,x,y)$ と表され，値は実数とする．記号 Δ はラプラシアンで，空間の次元として二次元（x 座標と y 座標）を考えている本研究では，

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{3}$$

を表す．また，グレイスコットモデルを u, v という 2 種類の物質の濃度変化を表すと考えると，右辺第 1 項は空間内での物質の拡散を，右辺第 2, 3 項は 2 つの物質の間に生じる化学反応が物質の濃度の時間的変化を生じさせていると解釈できる．グレイスコットモデルはゲル媒質中での自己触媒化学反応として

$$2V + U \rightarrow 3V \ , \ V \rightarrow P \tag{4}$$

という反応を微分方程式でモデル化したものである．ここで，U は原材料となる化学物質，V は中間生成物であり，かつ自己触媒物質である．P は化学的に安定な最終生成物である．P は化学的に安定であるため，U や V と反応しない．U は外部から供給され，永続的な反応が可能となっている．拡散と反応が同時進行するとき，場所による濃度の違いと時間による濃度の推移が生じて，時間とともに変化する模様が発生する．

2.2 境界条件

本研究での境界条件はノイマン条件を採用している．

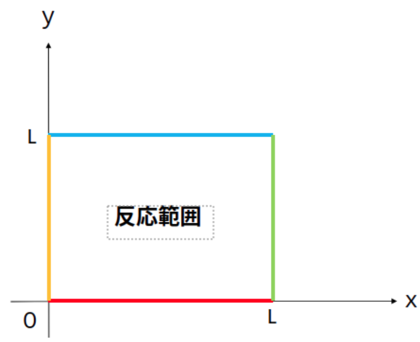

Fig. 1 反応観察範囲と境界条件

Fig.1 のように x, y 平面上の反応範囲を辺の長さ L の長方形とする．$u(t,x,y)$ と $v(t,x,y)$ に対して，$\frac{\partial u}{\partial x}$ を u_x，$\frac{\partial u}{\partial y}$ を u_y，$\frac{\partial v}{\partial x}$ を v_x，$\frac{\partial v}{\partial y}$ を v_y と表すとすると，ノイマン条件の式は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&(\text{黄色線}) \quad u_x(0,0,y)=0,\ \ v_x(0,0,y)=0 \\
&(\text{青線}) \quad u_y(0,x,L)=0,\ \ v_y(0,x,L)=0 \\
&(\text{緑線}) \quad u_x(0,L,y)=0,\ \ v_x(0,L,y)=0 \\
&(\text{赤線}) \quad u_y(0,x,0)=0,\ \ v_y(0,x,0)=0
\end{aligned} \tag{5}$$

2.3 数値シミュレーションの方法

(1),(2) 式を離散化することによって，u, v の空間分布の時間変化を数値的に求めることができる．u, v を物質の濃度とするなら，初期値を与えることで時間 t の経過とともに変化するある点における濃度の変化を観察することができる．本研究のシミュレーションプログラムでは濃度の変化を次のように色を使い表現している．

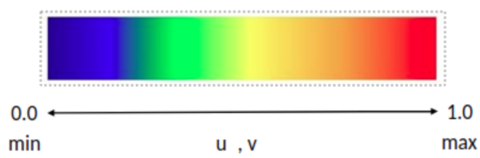

Fig. 2 濃度を色で表現

3. グレイスコットモデルの安定性解析

文献5) において筆者らはグレイスコットモデルに対して平衡点を求め，安定性解析を行った．ここで文献5) で得られた結果をまとめておく．

3.1 反応項の平衡点

まず，グレイスコットモデルの反応項から得られる平衡点を求めた．反応項を常微分方程式で表す．すると以下の式になる．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -uv^2 + a(1-u) \\ uv^2 - (a+k)v \end{bmatrix} \tag{6}$$

右辺は3次式であるため，3組の平衡点 (u_a, v_a), (u_b, v_b), (u_c, v_c) が存在し，次の式で表されることがわかった．

$$u_a = 1, \quad v_a = 0 \tag{7}$$

$$u_b = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \tfrac{4(a+k)^2}{a}}\right)$$

$$v_b = \tfrac{a}{2(a+k)}\left(1 - \sqrt{1 - \tfrac{4(a+k)^2}{a}}\right) \tag{8}$$

$$u_c = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \tfrac{4(a+k)^2}{a}}\right)$$

$$v_c = \tfrac{a}{2(a+k)}\left(1 + \sqrt{1 - \tfrac{4(a+k)^2}{a}}\right) \tag{9}$$

3.2 平衡点近傍の線形化

求めた平衡点の安定化解析を行うため，(6) 式に対して平衡点 P の近傍で線形化を行った．$f(u,v) = -uv^2 + a(1-u)$, $g(u,v) = uv^2 - (a+k)v$ として得られた反応項の線形化方程式は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}'(P)\boldsymbol{v} \tag{10}$$

である．ただし，$\boldsymbol{v} = {}^t[u, v]$ であり，$\boldsymbol{F}'(P)$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}'(P) &= \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix}\right|_{u,v=P} \\ &= \left.\begin{bmatrix} -v^2 - a & -2uv \\ v^2 & 2uv - a - k \end{bmatrix}\right|_{u,v=P} \end{aligned} \tag{11}$$

である．特に (8),(9) 式の第2, 第3の平衡点に関しては

$$\boldsymbol{F}'(P) = \left.\begin{bmatrix} -v^2 - a & -2(a+k) \\ v^2 & a+k \end{bmatrix}\right|_{u,v=P} \tag{12}$$

$$:= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \tag{13}$$

となる．定数 a と k は正であることと，(12) 式と (13) 式から

$$\alpha < 0, \quad \beta < 0, \quad \gamma > 0, \quad \delta > 0 \tag{14}$$

であることに注意する．

3.3 3つの平衡点の安定性

文献5) においては3組の平衡点に対して (11) 式の行列 $\boldsymbol{F}'(P)$ およびその固有方程式から安定性を判別した．その結果，(7) 式の平衡点 u_a, v_a は安定，(8) 式の第2の平衡点 u_b, v_b は不安定，(9) 式の第3の平衡点 u_c, v_c は a, k の値により，安定にも不安定にもなり得ることが明らかになった．

3.4 グレイスコットモデルの平衡点の不安定性

(7) 式 ～ (9) 式の拡散項を含むグレイスコットモデルの平衡点でもある．文献5) ではグレイスコットモデルの右辺

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} -uv^2 + a(1-v) \\ uv^2 - (a+k)v \end{bmatrix} \tag{17}$$

から得られる線形化用素

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{D}\Delta + \boldsymbol{F}'(P) \tag{18}$$

の固有値問題を考察した．この問題に対し，解がフーリエ余弦級数で表されることを用いて行

列の固有値問題へ帰着し，行列の固有方程式の係数から (8) 式と (9) 式の平衡点が不安定であることを示し，パターン形成の原因となっていることを明らかにした．

文献 5) で明らかとなったこれらのグレイスコットモデルを性質を制御対象の特性と見なし，次節ではグレイスコットモデルの制御問題を考える．

4.　パターン形成の制御

4.1　制御系設計問題

本研究ではグレイスコットモデルにおける u と v の値をフィードバック制御によって変化させることを考える．この制御は u, v を化学物質の濃度と考えるならば，u の濃度の変化率に影響を与える w_u という物質を，v の濃度の変化率に影響を与える w_v という物質を加えることに相当する．これらの影響はグレイスコットモデルの右辺にそれぞれ w_u, w_v という項を加えることによって定式化される．制御対象はつぎの方程式で表される．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u - uv^2 + a(1-u) + w_u \tag{19}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + uv^2 - (a+k)v + w_v \tag{20}$$

ここで w_u, w_v としてどのような式を用いるかを考えることが制御系設計の問題となる．(Fig.4)

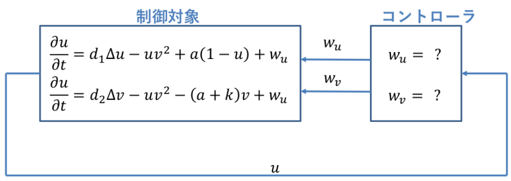

Fig. 3　制御系設計の問題

4.2　制御問題における仮定

制御の問題を考える上で次の仮定を置く．

- (1), (2) 式の a, k の値は既知とする．
- グレイスコットモデルの平衡点の値は a, k の値と第 3 節の計算式を用いて計算可能である．
- u の値は測定可能であり，フィードバック制御に用いることができる．
- v の値は測定できず，フィードバック制御に用いることができない．

5.　オブザーバの設計

5.1　制御の目的と推定の必要性

Fig.3 の制御の目的は u と v の値の分布を所望の分布に変化させることである．その目的のためには制御対象となっているグレイスコットモデルにおける u と v の値をコントローラへフィードバックして制御入力を算出することが有効である．ここで注意すべきは前節の仮定より v の値が測定できないことである．そこで v の推定値 $\hat{v}$ を算出するオブザーバを構成することを考える（Fig.4）．オブザーバに要求される機能は，時間の経過とともに推定値 $\hat{v}$ が真の値 v に限りなく近づくことである．

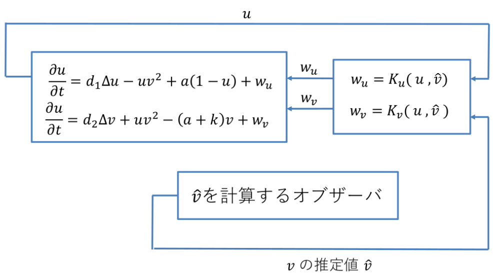

Fig. 4　v を推定するオブザーバ

5.1.1　オブザーバの構成の考え方

この節ではオブザーバをどのように構成するかを，初歩的な考えから順次問題点を解決する手順で説明する．まず，推定値 $\hat{v}$ を計算する初歩的な考えは，(2) 式を同じ形の式で模倣して $\hat{v}$ を算出するものである（Fig.5）．

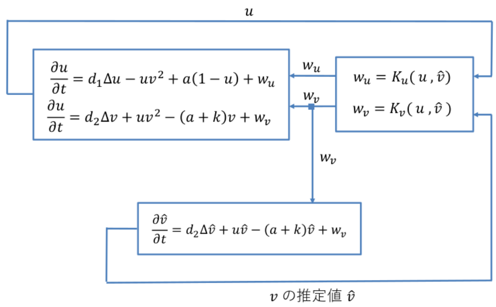

Fig. 5　v の模倣による推定

これは $\hat{v}$ をグレイスコットモデルに従って動かせば真の値 v と同じ動きをするであろうという考えに基づいている．しかし，この方法では初期値 $v(0,x,y)$ と $\hat{v}(0,x,y)$ が異なると $v(t,x,y)$ と $\hat{v}(t,x,y)$ の誤差を解消できない．

初期値が不明でも v と $\hat{v}$ の誤差を時間とともに限りなく 0 に近づけるには推定誤差に比例した補正項を加えることが有効である（Fig.6）．

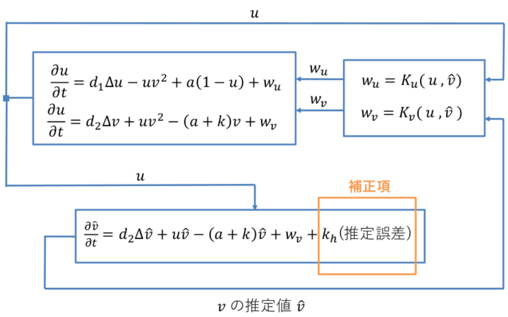

Fig. 6　補正項を加えたオブザーバ

ただし，推定誤差の計算において $\hat{v} - v$ という直接的な計算式を用いることはできない．なぜなら v は測定不可能だからである．

そこで本報告ではつぎの方法を提案する．まず，$\hat{v}$ との相互作用で値が決まる $\hat{u}$ を導入する．これと v との相互作用で値が決まる u との誤差を考える．こうして $\hat{v} - v$ という直接的な推定誤差の代わりに，$\hat{u} - u$ という相互作用を介した間接的な誤差を推定誤差とみなす．この推定誤差に補正ゲイン k_h を掛けて $\hat{v}$ の計算式に補正項として加える．この考えに基づくオブザーバはつぎの式で表される．

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = d_1\Delta\hat{u} - \hat{u}\hat{v}^2 + a(1-\hat{u}) + w_u \quad (21)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = d_2\Delta\hat{v} + \hat{u}\hat{v}^2 - (a+k)\hat{v} + w_v + k_h(\hat{u} - u) \quad (22)$$

また，このオブザーバを組み込んだ制御系はFig.7で表される．

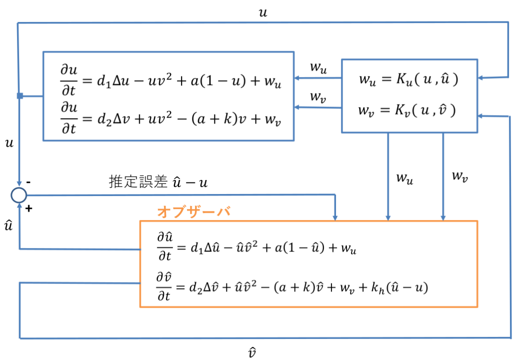

Fig. 7　提案するオブザーバ

5.2　オブザーバゲイン k_h の値

本研究で提案する (21),(22) 式のオブザーバにおいて，(22) 式に含まれている $k_h(\hat{u} - u)$ は補正項であり，k_h をオブザーバゲインと呼ぶことにする．この節ではオブザーバゲイン k_h の値は正とすべきか，あるいは負とすべきかについて考察する．

補正項がもし $k_h(\hat{u} - u)$ でなく $k_h(\hat{v} - v)$ であれば，ネガティブフィードバックが働くように k_h は負の値にすべきである（例えば $\hat{v}$ が v よりも大きな値になっているときには $\hat{v} - v$ が正であり，k_h が負であれば $k_h(\hat{v} - v)$ が負の値となり，(22) 式で $\frac{\partial \hat{v}}{\partial t}$ を負の方向に変化させて $\hat{v}$ の値を減少させることができる）．

本研究では v が測定不可能であることから補正項を $k_h(\hat{u} - u)$ としている．間接的な推定誤差 $\hat{u} - u$ に掛けるゲイン k_h の値を正とすべきか負とすべきかは自明ではなく，前節の考察でも不明である．この問題に対してこの節では k_h の値は正とすべきであることを示す．

まず，制御対象の状態ベクトルを

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{23}$$

とし，オブザーバの状態ベクトルを

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} \tag{24}$$

とする．状態推定誤差ベクトルを

$$\boldsymbol{e} := \hat{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v} \tag{25}$$

と定義する．$\boldsymbol{e}$ は $\boldsymbol{0}$ へ収束することが望まれる．

(21),(22) 式のオブザーバは (24) 式のベクトルを用いて

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{D}\Delta\hat{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{v}}) + \boldsymbol{w} + \boldsymbol{K}(\hat{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}) \tag{26}$$

と表される．ただし，$\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{v}})$ の $\boldsymbol{F}$ は (16), (17) 式で定義されたものであり，

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_u \\ w_v \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_h & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

である．また，(19),(20) 式の制御対象は (23) 式のベクトルを用いて

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} \tag{28}$$

と表される．

グレイスコットモデルの第 2, 第 3 の平衡点 P の近傍での推定誤差を解析するため，(26) 式および (28) 式の線形化方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\hat{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{D}\Delta\hat{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{F}'(P)\hat{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{w} + \boldsymbol{K}(\hat{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}) \\ \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}'(P)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \end{aligned} \tag{29}$$

を用いる．ただし，$\boldsymbol{F}'(P)$ は (12) 式のヤコビ行列である．上の 2 つの式の両辺を引き算すると，(25) 式の状態推定誤差ベクトル $\boldsymbol{e}$ が

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{e} + \boldsymbol{F}'(P)\boldsymbol{e} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{e} \tag{30}$$

で表されることがわかる．

本研究で仮定している境界条件がノイマン条件であることから，$\hat{\boldsymbol{v}}$ と $\boldsymbol{v}$ はフーリエ余弦展開を用いてつぎのように表される．

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{a}}_{mn}\psi_m(x)\psi_n(y) \tag{31}$$

$$\boldsymbol{v} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{a}_{mn}\psi_m(x)\psi_n(y) \tag{32}$$

ただし，

$$\psi_m(x) = \cos\frac{m\pi}{L}x\ ,\ \psi_n(x) = \cos\frac{n\pi}{L}y \tag{33}$$

はフーリエ余弦展開の基底関数であり，

$$\hat{\boldsymbol{a}}_{mn} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{mn} \\ \hat{b}_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_{mn} = \begin{bmatrix} a_{mn} \\ b_{mn} \end{bmatrix} \tag{34}$$

はそれぞれ $\hat{u}$ と $\hat{v}$, u と v のフーリエ係数をまとめたベクトルである．ここで (31) 式と (32) 式の両辺を引き算すると，(25) 式の状態推定誤差ベクトル $\boldsymbol{e}$ が

$$\boldsymbol{e} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{e}}_{mn}\psi_m(x)\psi_n(y) \tag{35}$$

と表される．ただし，

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_{mn} = \hat{\boldsymbol{a}}_{mn} - \boldsymbol{a}_{mn} \tag{36}$$

である．

(35) 式を (30) 式へ代入して Δ の偏微分を計算すると，

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(y)\frac{d}{dt}\tilde{\boldsymbol{e}}_{mn} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(y)(-(\sigma_m + \sigma_n)\boldsymbol{D} \\ &\qquad + \boldsymbol{F}'(P) + \boldsymbol{K})\tilde{\boldsymbol{e}}_{mn} \end{aligned} \tag{37}$$

となる．ただし，

$$\sigma_m = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2, \quad \sigma_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tag{38}$$

である．(37) 式の両辺の係数比較により

$$\frac{d}{dt}\tilde{\boldsymbol{e}}_{mn} = \{-(\sigma_m + \sigma_n)\boldsymbol{D} + \boldsymbol{F}'(P) + \boldsymbol{K}\}\tilde{\boldsymbol{e}}_{mn} \tag{39}$$

が得られる．状態推定誤差ベクトル $\boldsymbol{e}$ が $\mathbf{0}$ へ収束することは，(35) 式より $\tilde{\boldsymbol{e}}_{mn}$ が $\mathbf{0}$ へ収束することを意味する．それには (39) 式における行列

$$\boldsymbol{A}_{mn} := -(\sigma_m + \sigma_n)\boldsymbol{D} + \boldsymbol{F}'(P) + \boldsymbol{K} \quad (40)$$

の固有値の実部が負であることが条件となる．それは行列 $\boldsymbol{A}_{mn}$ の固有方程式の係数が正であることといえる．(16) 式の $\boldsymbol{D}$，(13) 式の $\boldsymbol{F}'(P)$，(27) 式の $\boldsymbol{K}$ を代入して $\boldsymbol{A}_{mn}$ の固有方程式を計算すると，

$$\begin{aligned}&|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{mn}| = \lambda^2 - \{\alpha + \delta\\ &-(\sigma_m + \sigma_n)d_1 - (\sigma_m + \sigma_n)d_2\}\lambda\\ &+\{(\sigma_m + \sigma_n)d_1 - \alpha\}\{(\sigma_m + \sigma_n)d_2 - \delta\}\\ &-\beta(\gamma + k_h) \qquad (41)\end{aligned}$$

となる．

上式においてオブザーバゲイン k_h は，定数項の最後の項 $-\beta(\gamma+k_h)$ に関与している．状態推定誤差ベクトル $\boldsymbol{e}$ が $\mathbf{0}$ へ収束するには定数項が正であることが必要なので，オブザーバゲイン k_h の絶対値を大きくしたとき，$-\beta(\gamma+k_h)$ の値が正の方向へ大きくなることが必要である．(14) 式より $\beta < 0, \gamma > 0$ なので，$-\beta(\gamma+k_h)$ が正の値となるには，k_h を正の値としてオブザーバゲインとして用いることがが必要となる．

6. 数値シミュレーション

提案するオブザーバの有効性を確認するため数値シミュレーションを行った．(19),(20) 式の制御対象に対して，(21)，(22) 式のオブザーバで v の推定値 $\hat{v}$ を計算する．今回の報告では状態推定の有効性を確認するため，制御入力は与えず $w_u = w_v = 0$ とした．グレイスコットモデルは (19),(20) 式におけるパラメータ a, k の値によって 6 種類のパターンを形成する [2]．これらすべてのパターンにおいて，$t = 0$ における初期値を $v(0,x,y)$ と $\hat{v}(0,x,y)$ で異なる値を与え，時間の経過とともに $\hat{v}(t,x,y)$ が $v(t,x,y)$ に近づくことを確認した．

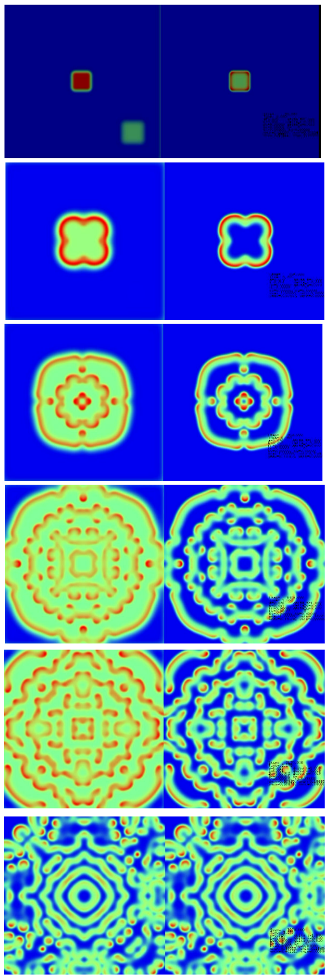

Fig. 8　オブザーバによる $\hat{v}$ と v （$a = 0.02$, $k = 0.05125$）

例として，反応のパラメータが $a = 0.02$, $k = 0.05125$，拡散係数が $d_1 = 0.00002$, $d_2 = 0.00001$，オブザーバゲインを正の値 $k_h = 0.05$ としたときの，$\hat{v}(t,x,y)$ と $v(t,x,y)$ のパターンをそれぞれ左と右に並べた画像を Fig.8 に示す．図の一番上の画像は初期値の違いを表しており，左が $\hat{v}$ の初期値，右が v の初期値である．時間の経過とともに Fig.8 内の画像は下へ移っていく．一番下の画像は左の $\hat{v}$ が右の v に近づいたことを示している．このように時間の経過とともに左のパターンが右のパターンと同じになっていく，すなわち推定値 $\hat{v}$ が真の値 v に漸近することが確認できた．

7. まとめ

本研究ではグレイスコットモデルで表される反応拡散系を制御対象と考え，これを制御するために必要となるオブザーバの設計法を提案した．推定誤差を用いる補正項として，v の推定値 $\hat{v}$ と相互作用のある $\hat{u}$ と，測定不可能な v と相互作用のある u を用い，これらの差にオブザーバゲイン k_h を掛ける補正を提案した．このオブザーバゲイン k_h を正の値とすることが必要であることを行列の固有方程式から明らかにした．また数値シミュレーションによって状態推定が可能であることを確認した．

今後の課題はオブザーバによる推定値を用いた制御入力の計算式を考えることである．

参考文献

1) 栄伸一郎: パターン形成の数理，講談社 (2008)

2) 西浦廉政: 数学と科学・生物学ー自己複製と自己崩壊のダイナミクスをめぐって，日本数学会 (2010)

3) 三村昌泰: 非線形・非平衡現象の数理４，パターン形成とダイナミクス，財団法人　東京大学出版会 (2006)

4) 柳田英二: 反応拡散方程式，東京大学出版会 (2015)

5) 石井，村松: グレイスコットモデルによるパターン形成の解析, 計測自動制御学会東北支部，第 335 回研究集会資料 (2021)

6) K. Kashima, T. Ogawa, and T. Sakurai: Selective pattern formation control: Spatial spectrum consensus and Turing instability approach, Automatica, 56, 25/35 (2015)

7) 梅津，小川，加嶋：反応拡散系における不安定定在波の選択的安定化，計測自動制御学会論文誌，51–2, 110/119 (2015)