

座標変換を用いた剛体の姿勢制御

Rigid-Body Attitude Control with Coordinate Transformation

○大門誠*, 村松鋭一*

○ Makoto Okado*, Eichi Muramatsu*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード : 姿勢制御 (Attitude Control), 回転行列 (Rotation Matrix), 座標変換 (Coordinate Transformation)

連絡先 : 山形大学大学院 理工学研究科 機械システム工学専攻 村松研究室
村松鋭一, Tel.:0238-26-3327, E-mail: muramatu@yz.yamagata-u.ac.jp

1. 背景と目的

人工衛星の姿勢制御においては, 3次元空間における剛体の回転運動の制御が重要となる. このような剛体の回転運動の方程式は非線形であるため, 非線形制御の問題となる. 近年, この3次元空間における剛体の回転に特化した制御理論が発展している.

本研究ではオイラー方程式で表される剛体の回転運動を, 目標姿勢へと回転させる制御を考察する. 文献1)では初期姿勢から目標姿勢へ到達させる制御方法が述べられているが, 回転中の軌道は考慮されていない. 本研究では, 回転の軌道を考慮することにより, 指定の回転方向の制御方法を提案する.

2. 剛体の回転を表す運動方程式

2.1 回転行列

本研究では剛体の姿勢表現に回転行列 R を用いる.

あるベクトル v_1 が, 回転軸 a , 回転角 θ で回転してベクトル v_2 になった時, v_1 と v_2 の関係は回転行列 R を用いて次のように表される.

$$Rv_1 = v_2 \quad (1)$$

$$R = I + a^\times \sin \theta + (a^\times)^2 (1 - \cos \theta) \quad (2)$$

$$a^\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

また, 回転軸 a は単位ベクトルとする.

剛体の姿勢制御系においては回転行列 $R(t)$ を剛体の姿勢を表すために次のように用いる. まず3次元空間において直交する xyz 軸を持つ静止座標系を考える. また, 剛体の重心を原点として直交する $x'y'z'$ 軸を機体座標系として設定する. 機体座標系の $x'y'z'$ 軸が静止座標系の xyz 軸を回転行列 R で回転させて得られるとき, 剛体の姿勢を R として表す.

姿勢制御の方法として, 回転行列のほかに, オイラー角やクォータニオンなどを用いたものがある. それらには特異点や姿勢の表現が一通り

出ないなど問題点があるが、回転行列には特異点がなく姿勢の表現が一つに定まるという利点がある。

2.2 剛体の運動方程式

本研究で対象となる運動方程式を以下に示す。

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{u}(t) \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)\boldsymbol{\omega}^\times(t) \quad (4)$$

ただし、 $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^\top$ は角速度ベクトルであり、

$$\boldsymbol{\omega}^\times(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

とする。また、 $\mathbf{R}(t)$ は回転行列、 $\mathbf{u}(t)$ は剛体を回転させる入力トルク、 \mathbf{J} は慣性モーメントと慣性乗積からなる行列である。

3. 剛体の姿勢制御

3.1 初期姿勢と目標姿勢

初期姿勢 \mathbf{R}_0 と目標姿勢 \mathbf{R}_d を与え、剛体の現在姿勢 $\mathbf{R}(t)$ 、角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$ をフィードバックして目標姿勢で静止させる制御について考える。

初期姿勢 \mathbf{R}_0 、目標姿勢 \mathbf{R}_d はそれぞれ回転軸

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{bmatrix}, \mathbf{a}_d = \begin{bmatrix} a_{d1} \\ a_{d2} \\ a_{d3} \end{bmatrix}$$

と角度 θ_0, θ_d を (2) 式の右辺の \mathbf{a} と θ に与えた行列とする。

3.2 目標姿勢で静止させる制御

剛体の姿勢 $\mathbf{R}(t)$ を目標姿勢 \mathbf{R}_d へ収束させる制御として次の方法が知られている¹⁾。フィードバックによって得られる $\mathbf{R}(t)$ と $\boldsymbol{\omega}(t)$ を用い

て剛体に与える入力トルク $\mathbf{u}(t)$ を以下の式とする。

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_v\boldsymbol{\omega}(t) - \mathbf{K}_p\Omega_a(\mathbf{R}(t)) \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{K}_v, \mathbf{K}_p$ はそれぞれ 3 行 3 列の正則なゲイン行列である。また、 $\Omega_a(\mathbf{R}(t))$ は以下の通りである。

$$\Omega_a(\mathbf{R}(t)) = \sum_{i=1}^3 a_i e_i \times (\mathbf{R}_d^\top \mathbf{R} e_i) \quad (6)$$

ただし e_i は $[e_1 e_2 e_3]$ が単位行列となるような 3 次元ベクトルである。

(6) 式は現在姿勢 $\mathbf{R}(t)$ が目標姿勢 \mathbf{R}_d に一致したときに 0 となる式である。このような制御系を用いてシミュレーションを行うと Fig.1 のようになる。

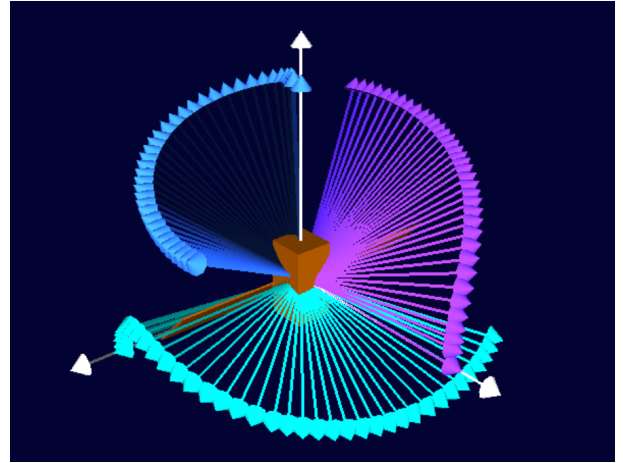


Fig. 1 Example of attitude control

3.3 回転軸を考慮した制御

上で述べた制御則では回転の軌道を考慮していないため一つの回転軸で回転していない。本研究では一つの軸で回転するような挙動を与えるため、座標変換を利用する方法を考案した。

3.4 座標変換を用いた制御

(5), (6) 式の制御則で制御する場合、初期姿勢 \mathbf{R}_0 から目標姿勢 \mathbf{R}_d までの回転を表す回転

行列を \mathbf{R}_e とする. この回転軸 \mathbf{a}_e が, 機体座標系の X, Y, Z 軸のいずれかと一致している場合, \mathbf{a}_e が一つのか固定した回転軸となって回転運動が生じる.

そこで座標を変換してこの条件を満たすような形にする方法を考案した.

目標姿勢が静止座標系 (3×3 の単位行列) と一致するものとする. 目標姿勢を表す回転行列 \mathbf{R}_d は単位行列となり, 初期姿勢から目標姿勢まで一つの軸で回転させるような回転軸は \mathbf{a}_0 である. この \mathbf{a}_0 と機体座標系の X 軸が一致するように回転行列を \mathbf{R}_c とする. \mathbf{R}_c の回転軸を \mathbf{a}_c と回転角を θ_c とする. それらは,

$$\mathbf{a}_c = \begin{bmatrix} a_{01} + 1 \\ a_{02} \\ a_{03} \end{bmatrix} \div \sqrt{(a_{01} + 1)^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2} \quad (7)$$

$$\theta_c = \pi \quad (8)$$

と表される.

\mathbf{R}_c を用いた変換による初期姿勢 \mathbf{R}'_0 と目標姿勢 \mathbf{R}'_d を作り, 変換後の現在姿勢を \mathbf{R}_f とする. この \mathbf{R}'_0 , \mathbf{R}'_d , \mathbf{R}_f と \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_d , \mathbf{R} の関係は以下の通りである.

$$\mathbf{R}'_0 = \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_c^T \quad (9)$$

$$\mathbf{R}'_d = \mathbf{R}_d \mathbf{R}_c^T \quad (10)$$

$$\mathbf{R}_f = \mathbf{R} \mathbf{R}_c^T \quad (11)$$

これらはそれぞれ, \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_d , \mathbf{R} から \mathbf{R}_c までの回転を表す回転行列が, \mathbf{R}'_0 , \mathbf{R}'_d , \mathbf{R}_f であることを示す.

変換後の \mathbf{R}'_0 を初期姿勢, \mathbf{R}'_d を目標姿勢とすると機体座標系の X 軸が \mathbf{a}_0 と一致する (証明は付録を参照). ここで (6) 式を使い, 制御を行う.

制御則は次のようになる.

$$\dot{\mathbf{R}}_f(t) = \mathbf{R}_f(t) \boldsymbol{\omega}^\times(t) \quad (12)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_v \boldsymbol{\omega}(t) - \mathbf{K}_p \boldsymbol{\Omega}_a(\mathbf{R}_f(t)) \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_a(\mathbf{R}_f(t)) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i \mathbf{e}_i \times (\mathbf{R}_d^T \mathbf{R}_f \mathbf{e}_i) \quad (14)$$

静止座標系での姿勢には以下のようにして戻すことができる.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_f \mathbf{R}_c \quad (15)$$

提案する方法によるシミュレーション結果を Fig.2 に示す. Fig.1 と比べると, 一つの回転軸で回転しており, 軌道に無駄がないことが確認できる.

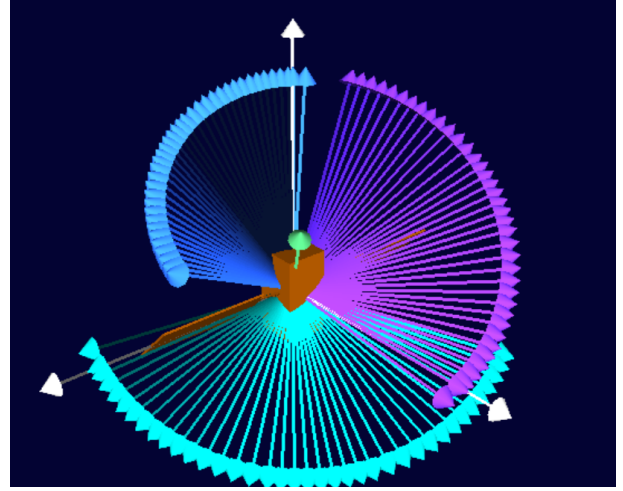


Fig. 2 Attitude control by proposed method

4. まとめ

本研究では文献 1) の制御則をもとに, フィードバック制御による初期姿勢から目標姿勢までの回転運動を一つの軸で回転させるような方法を考案した. 一つの軸で回転運動させることにより, 剛体に与えるトルクの方が一つに定まるという利点がある. 残されている課題としては平衡点の問題がある.

参考文献

- 1) N. A. Chaturvedi, A. K. Sanyal, and N. H. McClamroch: "Rigid-Body Attitude Control", IEEE CONTROL SYSTEMS MAGAZINE, JUNE 2011

付録 座標変換の証明

R'_0 と R'_d のとき，機体座標系の X 軸が \mathbf{a}_0 と一致していることを証明する．

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{I} + \mathbf{a}_c^\times S\theta_c + (\mathbf{a}_c^\times)^2(1 - C\theta_c) \quad (16)$$

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} C\theta_c + a_{c1}^2(1 - C\theta_c) & a_{c1}a_{c2}(1 - C\theta_c) - a_{c3}S\theta_c & a_{c1}a_{c3}(1 - C\theta_c) + a_{c2}S\theta_c \\ a_{c1}a_{c2}(1 - C\theta_c) + a_{c3}S\theta_c & C\theta_c + a_{c2}^2(1 - C\theta_c) & a_{c2}a_{c3}(1 - C\theta_c) - a_{c1}S\theta_c \\ a_{c1}a_{c3}(1 - C\theta_c) - a_{c2}S\theta_c & a_{c2}a_{c3}(1 - C\theta_c) + a_{c1}S\theta_c & C\theta_c + a_{c3}^2(1 - C\theta_c) \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで，

$$C\theta = \cos \theta$$

$$S\theta = \sin \theta$$

$$C\theta_c + a_{c1}^2(1 - C\theta_c) = C\pi + \left(\frac{a_{01} + 1}{\sqrt{(a_{01})^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2}} \right)^2 (1 - C\pi) \quad (18)$$

\mathbf{a}_0 が単位ベクトルであり， $a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2 = 1$ となるので整理すると，

$$C\theta_c + a_{c1}^2(1 - C\theta_c) = a_{01} \quad (19)$$

同様に

$$a_{c1}a_{c2}(1 - C\theta_c) + a_{c3}S\theta_c = a_{02} \quad (20)$$

$$a_{c1}a_{c3}(1 - C\theta_c) - a_{c2}S\theta_c = a_{03} \quad (21)$$

となり，結果 \mathbf{R}_c は

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{02} & \frac{a_{02}^2 - a_{01} - 1}{a_{01} + 1} & \frac{a_{02}a_{03}}{a_{01} + 1} \\ a_{03} & \frac{a_{02}a_{03}}{a_{01} + 1} & \frac{a_{03}^2 - a_{01} - 1}{a_{01} + 1} \end{bmatrix} \quad (22)$$

次に， \mathbf{R}_0 は

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{I} + \mathbf{a}_0^\times S\theta_0 + (\mathbf{a}_0^\times)^2(1 - C\theta_0) \quad (23)$$

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} C\theta_0 + a_{01}^2(1 - C\theta_0) & a_{01}a_{02}(1 - C\theta_0) - a_{03}S\theta_0 & a_{01}a_{03}(1 - C\theta_0) + a_{02}S\theta_0 \\ a_{01}a_{02}(1 - C\theta_0) + a_{03}S\theta_0 & C\theta_0 + a_{02}^2(1 - C\theta_0) & a_{02}a_{03}(1 - C\theta_0) - a_{01}S\theta_0 \\ a_{01}a_{03}(1 - C\theta_0) - a_{02}S\theta_0 & a_{02}a_{03}(1 - C\theta_0) + a_{01}S\theta_0 & C\theta_0 + a_{03}^2(1 - C\theta_0) \end{bmatrix} \quad (24)$$

となる．

\mathbf{R}'_0 を以下の通りとすると，

$$\mathbf{R}'_0 = \begin{bmatrix} R'_{011} & R'_{012} & R'_{013} \\ R'_{021} & R'_{022} & R'_{023} \\ R'_{031} & R'_{032} & R'_{033} \end{bmatrix} \quad (25)$$

姿勢が \mathbf{R}'_0 のとき，機体座標系の X 軸が回転軸 \mathbf{a}_0 と一致しているには，

$$R'_{011} = a_{01} \quad (26)$$

$$R'_{021} = a_{02} \quad (27)$$

$$R'_{031} = a_{03} \quad (28)$$

となればよい.

$$\mathbf{R}'_0 = \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_c^\top \text{ より,}$$

$$R'_{011} = \{C\theta_0 + a_{01}^2(1 - C\theta_0)\} a_{01} + \{a_{01}a_{02}(1 - C\theta_0) - a_{03}S\theta_0\} a_{02} + \{a_{01}a_{03}(1 - C\theta_0) + a_{02}S\theta_0\} a_{03}$$

$$R'_{011} = a_{01}(1 - a_{01}^2 - a_{02}^2 - a_{03}^2)C\theta_0 + a_{01}(a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2)$$

$$R'_{011} = a_{01} \quad (29)$$

$$R'_{021} = \{a_{01}a_{02}(1 - C\theta_0) + a_{03}S\theta_0\} a_{01} + \{C\theta_0 + a_{02}^2(1 - C\theta_0)\} a_{02} + \{a_{02}a_{03}(1 - C\theta_0) - a_{01}S\theta_0\} a_{03}$$

$$R'_{021} = a_{02}(1 - a_{01}^2 - a_{02}^2 - a_{03}^2)C\theta_0 + a_{02}(a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2)$$

$$R'_{021} = a_{02} \quad (30)$$

$$R'_{031} = \{a_{01}a_{03}(1 - C\theta_0) - a_{02}S\theta_0\} a_{01} + \{a_{02}a_{03}(1 - C\theta_0) + a_{01}S\theta_0\} a_{02} + \{C\theta_0 + a_{03}^2(1 - C\theta_0)\} a_{03}$$

$$R'_{031} = a_{03}(1 - a_{01}^2 - a_{02}^2 - a_{03}^2)C\theta_0 + a_{03}(a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2)$$

$$R'_{031} = a_{03} \quad (31)$$

\mathbf{R}'_d に関しては, 目標姿勢 \mathbf{R}_d が単位行列となるので,

$$\mathbf{R}'_d = \mathbf{R}_d \mathbf{R}_c^\top$$

$$\mathbf{R}'_d = \begin{bmatrix} a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{02} & \frac{a_{02}^2 - a_{01} - 1}{a_{01} + 1} & \frac{a_{02}a_{03}}{a_{01} + 1} \\ a_{03} & \frac{a_{02}a_{03}}{a_{01} + 1} & \frac{a_{03}^2 - a_{01} - 1}{a_{01} + 1} \end{bmatrix} \quad (32)$$

となり, 機体座標系の X 軸と回転軸 \mathbf{a}_0 が一致する.