

分数階微分を用いたダンパーの振動制御

Vibration Control of Dampers Using Fractional Derivative

○飯渕広大, 魚橋慶子

○Koudai Iibuchi, Keiko Uohashi

東北学院大学

Tohoku Gakuin University

キーワード : 分数階微分 (Fractional derivative), 分数階微積分 (Fractional calculation),
振動 (Vibration), 最適制御 (Optimal control),

連絡先 : 〒984-8588 宮城県仙台市若林区清水小路 3-1 東北学院大学工学部機械知能工学科
魚橋慶子 E-mail: uohashi@mail.tohoku-gakuin.ac.jp

1. はじめに

分数階微積分とは整数階の微分を $1/2$ や $1/3$ と
いった無理数を含めた分数階へと拡張した微分の
ことである。従来の整数階微分では、モデルが困
難だったものを分数階微積分により、モデル化す
ることで実際の物理的問題の解が与えられること
も分かっている。¹⁾

微積分には大きく分けて 2 つの考え方がある。
1 つは物理現象の解析に関連付けた考え方であり
もう 1 つは曲線に関連付けた考え方である。前者
の物理現象と関連付けた考え方をを用いて、分数階
微積分と物理的パラメータの対応関係を考えて場
合、位置の分数階時間微分は位置と速度の中間的
なパラメータという意味になってしまい、その意
味が不明瞭である。しかし、後者の考え方をを用い
ると、2 次関数の分数階微分は 1 次関数の中間的
な曲線を表すということになり、その意味は明瞭と
なる。

L ‘ Hopital, S.F.Lacroix, J.L.Lagrange など

多くの数学者たちが、これまでに分数階 微積分の
定義を提案してきた。²⁾³⁾また、Web of Science に
て Fractional Derivative の発行論文数を調査
した結果を Fig. 1 に示す。

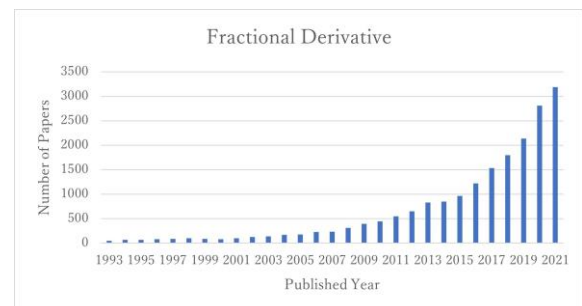


Fig.1 Fractional Derivative の発行論文数

Fig. 1 から分数階微分は1990年代から急速的に
研究が盛んになっている。この急増の背景にはコ
ンピュータの発展により、数値解が計算できるよ
うになったことや複雑な計算から生じる高コスト
な処理に対応できるようになったことなどが挙げ
られる。⁴⁾

また、近年では制御工学の分野でも分数階微分

の概念を導入した分数階制御の研究が行われている。理由としては、これまで粘弾性体や流体の減衰特性など、従来の整数階微積分を用いたモデルでは十分に特性を表現できないモデルも、整数階の中間微分である分数階微分を導入することで、より制御対象を厳密にモデル化することが可能になってきている点にあると考えられる。

しかし、分数階微分を用いた研究が盛んになっている一方で、分数階微分を知るきっかけとなる基礎的な論文が少なく、一般の研究者にとって馴染みがないものになっていると感じたため、本論文では、運動方程式中に分数階項を持ち、分数階微積分の特徴をよく表せると言われている1自由度のVoigtモデルの粘弾性ダンパーを対象とし、最適制御を用いて振動の抑制や比較を行う。

また、振動抑制は外部からのエネルギー供給が不要なパッシブ制御とエネルギー供給を必要とするアクティブ制御に区別できるが、制御対象によっては多様な要求が課せられるため、パッシブ制御だけでは制御が難しく、アクティブ制御が主流になっている。そのため、本論文ではアクティブ制御であるLQR(Linear Quadratic Regulator)制御^{5⑥}を採用することにした。

2. 分数階微分の定義

分数階微分の中でも特に有名なCaputo微分の定義を示す。⁴⁾

$f(t)$ が区間 $[a, t]$ で C_n 級関数であるとき、 q 階微分するCaputo微分は以下のように定義される。

$${}^c D_t^q f(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-q-1}}{\Gamma(n-q)} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

ただし、 $n = [q]$ であり、 a は開始点を表す。

3. 最適制御の導出

分数階モデルがその特性をよく表現してい

ると言われる粘弾性ダンパーモデルを対象して分数階状態方程式を導出する。対象の粘弾性ダンパーモデルは一般化Voigtモデルと言われる1自由度の粘弾性体である。以下にVoigtモデルの図を示す。

本研究では、1/2, 1/3, 1/4階微分の場合について取り組んだ。ここでは代表として1/2階微分の計算式を示す。

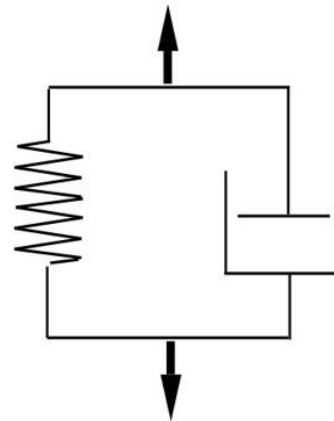


Fig.2 Voigt モデル

運動方程式は次式で表される。⁷⁾

$$\left[D^2 + 2\zeta w_n^2 D^{\frac{1}{2}} + w_n^2 D^0 + k \right] x(t) = u(t) \quad (1)$$

ここで ζ と w_n はそれぞれ減衰比と固有振動数であり、 $u(t)$ は制御入力である。 $k=0$ とし、分数階微分を用いて次のように状態ベクトル $x(t)$ を定義する。

$$\begin{aligned} x(t) &= [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T \\ &= [x(t) \ D^{\frac{1}{2}}x(t) \ D^{\frac{2}{3}}x(t) \ D^{\frac{3}{4}}x(t)]^T \end{aligned} \quad (2)$$

(1), (2)より分数階状態方程式を導入すると、

$$D^{\frac{1}{2}}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

また、制御入力は次式で表される。

$$u(t) = -Fx(t) \quad (4)$$

ここで、 F はフィードバックゲイン行列である。

次に、分数階状態方程式を整数階に帰着させる

ために(3)式に(5)式を代入して整理すると

$$D^{\frac{1}{2}}x(t) = A_{cl}x(t) \quad (5)$$

ただし,

$$A_{cl} = A - BF \quad (6)$$

と置き, (5)式の両辺に $D^{\frac{1}{2}}$ を作用させると

$$Dx(t) = A_{cl}^2x(t) \quad (7)$$

次に可制御である行列 (A, B) を持つ(3)式で表される制御対象において2次の評価関数を考える.

$$J = \int_0^{\infty} [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (8)$$

(8)式を(7)式とリアプノフ方程式を用いて変形すると次の2式が得られた.

$$J = x(t)^T P x(t) \quad (9)$$

$$PA_{cl}^2 + (A_{cl}^2)^T P = -Q - F^T R F \quad (10)$$

ここでラグランジュ未定乗数法より, (10)を制約条件として式(9)を最小にする P, F を求める.

未定乗数を行列の形でまとめて表すとラグランジュ関数は次式で表される.⁸⁾

$$L = x(0)^T P x(0) + \text{tr}[K^T \{PA_{cl}^2 + (A_{cl}^2)^T + Q + F_b^T R F\}] \quad (11)$$

また, (11)中の A_{cl}^2 を次のように表した.

$$A_{cl}^2 x(t) = (A - BF_a)(A - BF_b) \quad (12)$$

F_a には A_{cl}^2 の固有値の実部が負となるような値を与え, F_b は変数として扱うこととした.

$A_{cl_a} = (A - BF_a)$ と置くと, 式(11)は式(12)を用いて式(13)で書き直すことができる

$$L = x(0)^T P x(0) + \text{tr}[K^T \{PA_{cl_a}(A - BF_b) + [A_{cl_a}(A - BF_b)]^T P + Q + F_b^T R F\}] \quad (13)$$

上式を F_b, P, K で微分すると R, P, K が対称行列であることから

$$F_b = R^{-1} B^T A_{cl_a}^T P \quad (13)$$

最後に整理するとリカッチ方程式が導かれる.⁹⁾

$$PA_{cl_a} A + (A_{cl_a} A)^T P - PA_{cl_a} B R^{-1} B^T A_{cl_a}^T P + Q = 0 \quad (11)$$

以上より, 繰り返し法で最適フィードバックゲイン F を求める。¹⁰⁾

4. LQR 制御を用いた応答

第2章で示した繰り返し法を使用して最適フィードバックゲインを求めた.

以下に $\zeta = 0.1, W_n = 3.0$ とし重み行列を設計したときの最適フィードバックゲインの計算結果とその応答を示す.

table.1 最適フィードバックゲイン

	x1	x2	x3	x4
1回目	-18.5394	-85.8597	-5.451	-9.2827
2回目	-18.5394	0.537	6.4459	1.175
3回目	-18.5394	-77.6407	-5.8744	-10.0347
4回目	-0.0002	3.5868	0.0001	0.0027
5回目	0.5394	-1.1623	3.7761	-0.3438
6回目	0.5394	-0.5086	3.2812	-0.0081
7回目	0.5394	-0.5558	3.3289	-0.01
8回目	0.5394	-0.5519	3.3284	-0.0098
9回目	0.5394	-0.5519	3.3285	-0.0098
10回目	0.5394	-0.5519	3.3285	-0.0098

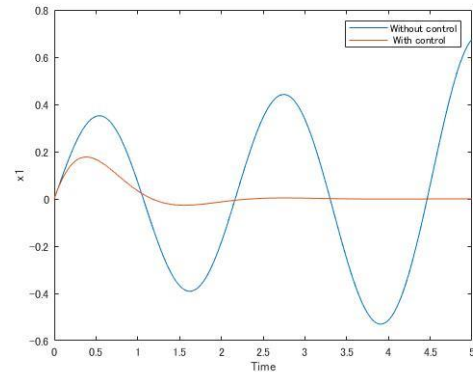


Fig.3 1/2 階微分の応答

Fig. 3 より LQR 制御によって振動抑制が行われていることが分かる. 1/3 階微分の場合は第2章の A_{cl}^2, A_{cl_a} を $A_{cl}^3, (A - BF_a)^2$ へ置き換え, 1/4 階微分の場合は $A_{cl}^4, (A - BF_a)^3$ へ置き換えると, 同様に LQR 制御によって振動抑制が行われた.

次に各分数階の比較を行った。結果を Fig. 4 に示す。

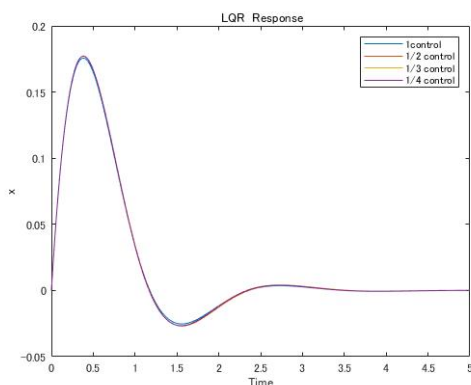


Fig.4 各分数階微分の応答

各応答の比較では、分数階同士には大きな変化が見られなかったが、整数階と比較すると分数階微分の方が振動が大きいという結果が得られた。

5. 結果と今後の課題

本研究では、分数階微分の特徴をよく表せるといわれている Voigt モデルを対象に、1/2 階と限らない微分階数の分数階状態方程式を導出した。また、リアプノフ方程式、ラグランジュ未定数乗数法を用いた LQR 制御器を提案した。

この制御器を使用し求めた最適フィードバックゲインでシミュレーションを行った結果、分数階微分を利用した LQR 制御でも整数階と同様に最適制御が行えることが分かった。また、各応答の比較では、一概に分数階を大きくしたからといって振動が抑制されるわけではないことが分かったと同時に、整数階微分と分数階微分を比較すると、分数階微分同士を比較したときに比べて振動の差が大きくなったことから、整数の中間である分数という概念は厳密なモデルを作成するのにあたって改めて重要なことであるということが分かった。

参考文献

- 1) R.L. Bagley and P. J. Torvik: "A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity" J. of Rheology, Vol. 27, pp. 201-210 (1983)
- 2) K. Nishimoto: "Fractional Calculus: Integrations and Differentiations of Arbitrary Order", Descartes Press, Koriyama, Japan (1984)
- 3) K.B. Oldham and J. Spanier: "The Fractional Calculus", Academic Press, New York (1974)
- 4) 小野寺慧知: "分数階微積分システムのモデリングとシミュレーション方式", 東京電機大学大学院博士論文, 2018 年度 (2019)
- 5) "最適制御レギュレータ"
<https://www.flight.t.u-tokyo.ac.jp/tsuchiya/Control/28Regulator.pdf> (2022/01 閲覧)
- 6) 田中幹也, 石川昌明, 浪花智英: "現代制御の基礎" 森北出版, pp.71-87(1999)
- 7) 清水信行, 飯島正樹: "粘弾性モデルの分数次微分モデル", 日本機械学会論文集:C 編, 62 巻 604 号, pp.4447-4451 (1996)
- 8) 池田富士雄, 川田誠一, 渡辺敦: "分数次微分システムの最適レギュレータ設計", : 計測自動制御学会論文集, vol.37,No.9,pp.856-861 (2001)
- 9) 北本卓也: "代数 Riccati 方程式の解法について", 数理解析研究所講究録, vol.1514,pp.29-32 (2006)
- 10) 武下晃大, 黒田雅治, 川口夏樹: "非整数微分を用いた振動抑制", 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2020 講演論文集 (2020)