計測自動制御学会東北支部 第 346 回研究集会 (2023.12.20)
資料番号 346-15

スチュアート・ランダウ方程式を用いた歩容生成のモデリングと制御

Modeling and Control of Gait Generation by the Stuart-Landau Equation

○奥平真央子 *，村松鋭一 *

○ Maoko Okudaira*, Eiichi Muramatsu*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード： 結合振動子 (coupled oscillators), スチュアート・ランダウ方程式 (Stuart-Landau Equation), 位相縮約 (phase reduction), 歩容生成 (gait generation)

連絡先： 〒 992-8510　米沢市城南町 4–3–16 山形大学大学院理工学研究科機械システム工学専攻
村松鋭一，Tel.: (0238)26-3327，Fax.: (0238)26-3327，E-mail: muramatu@yz.yamagata-u.ac.jp

1.　研究の背景と目的

動物の四足歩行における各脚の協調動作は自然現象の解明，多脚ロボットへの応用などの観点から興味深い研究対象となっており，ロボットの製作や計算機シミュレーションとともに数理的アプローチによるモデリングと制御系設計の研究が進んでいる [1)~3)]．歩容生成に対する微分方程式を用いた数理モデルとしてリミットサイクルをもつ結合振動子がある．これは脳神経科学の知見との関連から妥当かつ解析に有力なモデルと考えられている．例えば CPG（Central Pattern Generator）によるリズム生成について多くの考察や応用がなされてきた [3)]．

結合振動子における各振動子の周期軌道を脚のリズムに結び付けて歩容のモデルとするとき，それらの間に存在する位相差が重要となる．ウォーク，トロット，ギャロップという歩容の遷移をいかにモデル化するかにおいては，創発的な生成についての報告が多くされているが，さらに詳細かつ明解なメカニズムの解明が望まれている．

本研究では結合振動子を用いた歩容生成のモデリングと制御の方法を提案する．歩容に求められる適切な位相差を生成することを目的とし，理論に基づく設計を可能にするため，解軌道の位相を解析的に求めることができるスチュアート・ランダウ方程式 [4)] を採用する．歩容生成に必要とされる位相差が生成されるように，各振動子の固有振動数および振動子間の結合パラメータを設定する方法を提案する．

2.　振動子の微分方程式

本研究で用いる振動子の微分方程式と，その解軌道の位相に着目した位相縮約のもとでの微

分方程式を説明する 4).

2.1　スチュアート・ランダウ方程式

時間とともに変化する複素数 $z(t)$ に関する微分方程式

$$\dot{z} = (\mu + ai)z - (1 + bi)|z|^2 z \tag{1}$$

はスチュアート・ランダウ方程式と呼ばれる．ここで μ, a, b は実数の定数，i は虚数単位である．複素平面上の任意の点を初期値 $z(0)$ としたとき，解 $z(t)$ の軌道は半径 $\sqrt{\mu}$，角速度 $a - b\mu$ の円軌道にリミットサイクルとして収束する．例えば $\mu = 4, a = 2, b = 1$ のとき，複素平面上の速度ベクトル $\dot{z}(t)$ は Fig.1 のようなベクトル場を形成し，図中の円がリミットサイクルとなる．

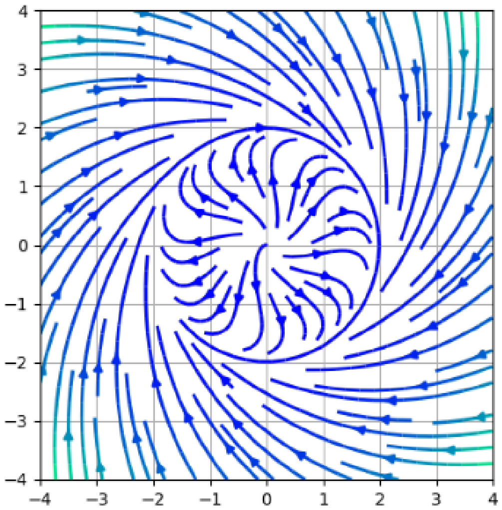

Fig. 1　複素平面上のベクトル場とリミットサイクル

リミットサイクル上の $z(t)$ の円軌道の半径 r と 角速度 ω について

$$r = \sqrt{\mu} \tag{2}$$

$$\omega = a - b\mu \tag{3}$$

であることが知られている．

2.2　位相縮約

振動子の周期軌道を脚のリズム運動に結び付けるとき，周期軌道上の位相が重要となる．ここでリミットサイクル $\boldsymbol{p}(t)$ 上の位相とは，リミットサイクルの周期（時間）T に対して，

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{4}$$

によって定まる角速度 ω と，ある初期時刻から経過時間 t を用いて

$$\phi = \omega t \tag{5}$$

で得られる値をリミットサイクルの軌道 $\boldsymbol{p}(t)$ 上の各点に割り当てたものである．リミットサイクルから離れた近傍の解軌道 $\boldsymbol{x}(t)$ の各点にも位相を定めることができ，その値は

$$\lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{p}(\phi_0/\omega + t)\| = 0 \tag{6}$$

となるような ϕ_0 として定義される．ただし，$\boldsymbol{x}_0$ は $\boldsymbol{x}(t)$ の初期状態である．位相 ϕ が満たす微分方程式は (4) 式から得られる

$$\dot{\phi} = \omega \tag{7}$$

である．ただし，後に述べる結合振動子系においては，他の振動子との結合が摂動項を生みだし，

$$\dot{\phi} = \omega + \varepsilon \boldsymbol{Z}(\phi) \cdot \boldsymbol{G}(t, \phi) \tag{8}$$

という形式になる．ここで $\boldsymbol{Z}(\phi)$ は位相感受関数であり，

$$\boldsymbol{Z}(\phi) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}(\phi/\omega)} \tag{9}$$

と定義されるものである．また，$\boldsymbol{G}(t, \phi)$ は他の振動子との相互作用で決まるベクトル値関数であり，ε は摂動を表す正の実数である．

3.　歩容生成のための結合振動子

3.1　スチュアート・ランダウ方程式の結合

四足の歩容生成のモデルとして本研究ではつぎに述べる結合振動子を提案する．左前脚，右

前脚，左後脚，右後脚の往復運動を，各脚をそれぞれ複素数 $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$, $z_4(t)$ に対応づけたスチュアート・ランダウ方程式の周期解に対応づける．脚間には相互作用が存在するとし，それらを結合項として加えたつぎの方程式で表現する．

$$\dot{z}_1 = (\mu + \omega_1 i)z_1 - (1+bi)|z_1|^2 z_1 + k_1(z_2 - z_1) \tag{10}$$

$$\dot{z}_2 = (\mu + \omega_2 i)z_2 - (1+bi)|z_2|^2 z_2 + k_1(z_1 - z_2) + k_2(z_3 - z_2) \tag{11}$$

$$\dot{z}_3 = (\mu + \omega_3 i)z_3 - (1+bi)|z_3|^2 z_3 + k_2(z_2 - z_3) + k_3(z_4 - z_3) \tag{12}$$

$$\dot{z}_4 = (\mu + \omega_4 i)z_4 - (1+bi)|z_4|^2 z_4 + k_3(z_3 - z_4) \tag{13}$$

ただし，k_i $(i = 1, \cdots, 3)$ は結合の強さを表す実数の定数である．四脚の結合は Fig.2 で表される．

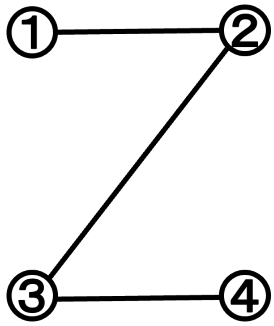

Fig. 2　四脚の結合

位相の解析と制御系設計を簡潔にするため，$\mu = 1, b = 0$ とする．このとき，(10) 式 ∼ (13) 式の結合振動子の挙動は，7 つのパラメータ

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ k_1,\ k_2,\ k_3 \tag{14}$$

によって決まり，これらの値を適切に与えることがを歩容の生成と制御につながる．

3.2　結合振動子の位相縮約

一般のリミットサイクルに対して (9) 式の位相感受関数 $\boldsymbol{Z}(\phi)$ を解析的に求めることは困難であるが，(1) 式のスチュアート・ランダウ方程式に対しては位相 ϕ および位相感受関数 $\boldsymbol{Z}(\phi)$ が

$$\begin{aligned} \phi &= \theta - b\log r \\ \boldsymbol{Z}(\phi) &= \begin{pmatrix} -b\cos\phi - \sin\phi \\ \cos\phi - b\sin\phi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

と解析的に求めることができる [4]．ただし，r, θ は $z = re^{i\theta}$ で定義される実数である．

これらを用いて $\mu = 1$, $b = 0$ のもと (10) 式 ∼ (13) 式の結合振動子に位相縮約を適用する．各振動子 $z_i(t)$ $(i = 1, \cdots, 4)$ に対応する位相を $\phi_i(t)$ $(i = 1, \cdots, 4)$ とする．各振動子の位相感受関数は

$$\boldsymbol{Z}(\phi_i) = \begin{pmatrix} -\sin\phi_i \\ \cos\phi_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \cdots, 4 \tag{16}$$

となる．また，(8) 式におけるベクトル値関数 $\boldsymbol{G}(t, \phi)$ に対応して，4 つの振動子の相互作用による $\boldsymbol{G}(t)$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_1 &= k_1 \begin{pmatrix} \cos\phi_2 - \cos\phi_1 \\ \sin\phi_2 - \sin\phi_1 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{G}_2 &= k_1 \begin{pmatrix} \cos\phi_1 - \cos\phi_2 \\ \sin\phi_1 - \sin\phi_2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \cos\phi_3 - \cos\phi_2 \\ \sin\phi_3 - \sin\phi_2 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{G}_3 &= k_2 \begin{pmatrix} \cos\phi_2 - \cos\phi_3 \\ \sin\phi_2 - \sin\phi_3 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} \cos\phi_4 - \cos\phi_3 \\ \sin\phi_4 - \sin\phi_3 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{G}_4 &= k_3 \begin{pmatrix} \cos\phi_3 - \cos\phi_4 \\ \sin\phi_3 - \sin\phi_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

と表される．これらを (9) 式に対応する 4 つの振動子の位相方程式

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \varepsilon \boldsymbol{Z}_i(\phi_i) \cdot \boldsymbol{G}_i(t), \quad i = 1, \cdots, 4 \tag{18}$$

に代入すると，

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 + k_1 \sin(\phi_2 - \phi_1) \tag{19}$$

$$\dot{\phi}_2 = \omega_2 + k_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + k_2 \sin(\phi_3 - \phi_2) \tag{20}$$

$$\dot{\phi}_3 = \omega_3 + k_2 \sin(\phi_2 - \phi_3) + k_3 \sin(\phi_4 - \phi_3) \tag{21}$$

$$\dot{\phi}_4 = \omega_4 + k_3 \sin(\phi_3 - \phi_4) \tag{22}$$

が得られる．

4.　位相差の方程式

歩容生成においては，これらの位相から定まる位相差

$$\delta\phi_{12} = \phi_1 - \phi_2 \tag{23}$$

$$\delta\phi_{23} = \phi_2 - \phi_3 \tag{24}$$

$$\delta\phi_{34} = \phi_3 - \phi_4 \tag{25}$$

を歩容に適した値に制御することが課題となる．これらの位相差の方程式を導く．

(23) 式 ～ (25) 式を時間 t で微分し，得られた右辺に (19) 式 ～ (22) 式を代入すると，

$$\dot{\delta\phi}_{12} = \delta\omega_{12} - 2k_1 \sin\delta\phi_{12} + k_2 \sin\delta\phi_{23} \tag{26}$$

$$\dot{\delta\phi}_{23} = \delta\omega_{23} - 2k_2 \sin\delta\phi_{23} + k_1 \sin\delta\phi_{12} + k_3 \sin\delta\phi_{34} \tag{27}$$

$$\dot{\delta\phi}_{34} = \delta\omega_{34} - 2k_3 \sin\delta\phi_{34} + k_2 \sin\delta\phi_{23} \tag{28}$$

が得られる．ただし，

$$\delta\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2 \text{ , } \delta\omega_{23} = \omega_2 - \omega_3 \text{ , } \delta\omega_{34} = \omega_3 - \omega_4 \tag{29}$$

である．

5.　位相差の制御

5.1　平衡点を与えるパラメータの設定問題

(23) 式 ～ (25) 式の位相差を，所望の位相差 $\delta\phi_{12}^*$, $\delta\phi_{23}^*$, $\delta\phi_{34}^*$ に制御する問題を考える．この問題は (26) 式から (28) 式の微分方程式で表される非線形システムの安定な平衡点が $\delta\phi_{12}^*$, $\delta\phi_{23}^*$, $\delta\phi_{34}^*$ となるように (14) 式のパラメータの値を求めることとなる．

5.2　平衡点が満たす方程式

$\delta\phi_{12}^*$, $\delta\phi_{23}^*$, $\delta\phi_{34}^*$ が平衡点であるとき，

$$\delta\omega_{12} - 2k_1 \sin\delta\phi_{12} + k_2 \sin\delta\phi_{23} = 0 \tag{30}$$

$$\delta\omega_{23} - 2k_2 \sin\delta\phi_{23} + k_1 \sin\delta\phi_{12} + k_3 \sin\delta\phi_{34} = 0 \tag{31}$$

$$\delta\omega_{34} - 2k_3 \sin\delta\phi_{34} + k_2 \sin\delta\phi_{23} = 0 \tag{32}$$

を満たす．これは (26) 式 ～ (28) 式で $\dot{\delta\phi}_{12} = \dot{\delta\phi}_{23} = \dot{\delta\phi}_{34} = 0$ として得られるものであり，位相差が一定値をとる「位相ロック」[4] を意味する．

$\delta\phi_{12}^*$, $\delta\phi_{23}^*$, $\delta\phi_{34}^*$ が (30) 式 ～ (32) 式を満たすように (14) 式のパラメータを設定する必要があるが，つぎの注意が必要である．

例えば trot 歩行であれば，

$$\delta\phi_{12}^* = -\pi \tag{33}$$

$$\delta\phi_{23}^* = \frac{\pi}{4} \tag{34}$$

$$\delta\phi_{34}^* = -\pi \tag{35}$$

である．これらの位相差が (30) 式 ～ (32) 式を満たすとき，

$$\delta\phi_{12}^+ = -\pi \tag{36}$$

$$\delta\phi_{23}^+ = \frac{3\pi}{4} \tag{37}$$

$$\delta\phi_{34}^+ = -\pi \tag{38}$$

もまた (30) 式 ～ (32) 式を満たし平衡点となる．これは $\sin\delta\phi_{23} = 1/\sqrt{2}$ を満たす $\delta\phi_{23}$ が $\frac{\pi}{4}$ と $\frac{3\pi}{4}$ の 2 通りあることに起因する．ここで，(37) 式の $\delta\phi_{23}^+$ は所望の値ではない．したがって，(33) 式 ～ (35) 式の平衡点は安定となるように，(36) 式 ～ (38) 式の平衡点は不安定となるようにパラメータを設定しなければならない．

5.3　ヤコビ行列

平衡点の安定性をパラメータの条件に加えるため，平衡点でのヤコビ行列を求める．(26) 式 ～ (28) 式を

$$\dot{\delta\phi}_{12} = f_{12}(\delta\omega_{12}, \delta\omega_{23}, \delta\omega_{34}) \tag{39}$$

$$\dot{\delta\phi}_{23} = f_{23}(\delta\omega_{12}, \delta\omega_{23}, \delta\omega_{34}) \tag{40}$$

$$\dot{\delta\phi}_{34} = f_{34}(\delta\omega_{12}, \delta\omega_{23}, \delta\omega_{34}) \tag{41}$$

と表すと，ヤコビ行列は

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{12}}{\partial \delta\phi_{12}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \delta\phi_{23}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \delta\phi_{34}} \\ \frac{\partial f_{23}}{\partial \delta\phi_{12}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial \delta\phi_{23}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial \delta\phi_{34}} \\ \frac{\partial f_{34}}{\partial \delta\phi_{12}} & \frac{\partial f_{34}}{\partial \delta\phi_{23}} & \frac{\partial f_{34}}{\partial \delta\phi_{34}} \end{pmatrix} \tag{42}
$$

によって計算されるものである．(26) 式 ～ (28) 式を用いて計算すると

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2k_1 \cos\delta\phi_{12} & k_2 \cos\delta\phi_{23} & 0 \\ k_1 \cos\delta\phi_{12} & -2k_2 \cos\delta\phi_{23} & k_3 \cos\delta\phi_{34} \\ 0 & k_2 \cos\delta\phi_{23} & -2k_3 \cos\delta\phi_{34} \end{pmatrix} \tag{43}
$$

となる．この式の位相差に平衡点の値を代入したものがヤコビ行列となる．

後に述べる設定方法のために，(43) 式に安定な平衡点となるべき位相差 $\delta\phi^*_{12}, \delta\phi^*_{23}, \delta\phi^*_{34}$ を代入したヤコビ行列を $\boldsymbol{A}^*$ と定義する．また，不安定平衡点となるべき位相差 $\delta\phi^+_{12}, \delta\phi^+_{23}, \delta\phi^+_{34}$ を代入したヤコビ行列を $\boldsymbol{A}^+$ とする．

以下，固有値の実部がすべて負である行列を「安定な行列」，そうでない行列を「不安定な行列」と呼ぶ．ある平衡点に対するヤコビ行列が安定な行列となるとき，その平衡点は安定である．ヤコビ行列が不安定であるとき，平衡点は不安定である．

5.4　パラメータの設定方法

以上の準備のもと，(10) 式 ～ (13) 式の結合振動子のパラメータ ω_1，ω_2，ω_3，ω_4，k_1，k_2，k_3 の設定方法を述べる．

まず，$\boldsymbol{A}^*$ を安定な行列，$\boldsymbol{A}^+$ が不安定な行列となるように k_1，k_2，k_3 を求める．これにより，平衡点の安定性に関する条件が満たされる．

つぎに，(30) 式 ～ (32) 式に $\delta\phi^*_{12}, \delta\phi^*_{23}, \delta\phi^*_{34}$ を代入して移項すると

$$
\delta\omega_{12} = 2k_1 \sin\delta\phi^*_{12} - k_2 \sin\delta\phi^*_{23} \tag{44}
$$

$$
\delta\omega_{23} = 2k_2 \sin\delta\phi^*_{23} - k_1 \sin\delta\phi^*_{12} - k_3 \sin\delta\phi^*_{34} \tag{45}
$$

$$
\delta\omega_{34} = 2k_3 \sin\delta\phi^*_{34} - k_2 \sin\delta\phi^*_{23} \tag{46}
$$

が得られる．これにより，$\delta\phi^*_{12}, \delta\phi^*_{23}, \delta\phi^*_{34}$ が安定な平衡点となる．

ω_i $(i = 1, \cdots, 4)$ の値は，まず ω_1 の値を決めると，(29) 式の関係式から

$$
\omega_2 = \omega_1 - \delta\omega_{12} \tag{47}
$$

$$
\omega_3 = \omega_2 - \delta\omega_{23} \tag{48}
$$

$$
\omega_4 = \omega_3 - \delta\omega_{34} \tag{49}
$$

によって決まる．ただし，ω_1 の値は ω_i $(i = 1, \cdots, 4)$ がすべて正となるように決める必要がある．

6.　シミュレーション

(10) 式 ～ (13) 式において $\mu = 1, b = 0$ とした結合振動子に対して位相差の制御を行う．

(43) 式に (33) 式 ～ (35) 式の平衡点を代入したヤコビ行列は

$$
\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 2k_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}k_2 & 0 \\ -k_1 & -\frac{2}{\sqrt{2}}k_2 & -k_3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}k_2 & 2k_3 \end{pmatrix} \tag{50}
$$

となり，(36) 式 ～ (38) 式の平衡点を代入したヤコビ行列は

$$
\boldsymbol{A}^+ = \begin{pmatrix} 2k_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}k_2 & 0 \\ -k_1 & \frac{2}{\sqrt{2}}k_2 & -k_3 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}k_2 & 2k_3 \end{pmatrix} \tag{51}
$$

となる．(50) 式の $\boldsymbol{A}^*$ が安定な行列，(50) 式の $\boldsymbol{A}^+$ が不安定な行列となるような k_1，k_2，k_3 として

$$
k_1 = -0.5\ ,\quad k_2 = 0.5\ ,\quad k_3 = -0.5 \tag{52}
$$

が存在する．

つぎに，(52) 式および (33) 式 ～ (35) 式を (44) 式 ～ (46) 式に代入して

$$
\delta\omega_{12} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ ,\quad \delta\omega_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\quad \delta\omega_{34} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \tag{53}
$$

を得る．

ここで例えば $\omega_1 = 0.5$ に選ぶと (47) 式 ～ (49) 式より

$$
\omega_1 = 0.5,\quad \omega_2 = 0.5 + \frac{1}{2\sqrt{2}}
$$

$$
\omega_3 = 0.5 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ ,\ \omega_4 = 0.5 \tag{54}
$$

となる．

こうして得られた (52) 式の k_1, k_2, k_3 と (54) 式の ω_i $(i = 1, \cdots, 4)$ の値を設定して数値シミュレーションを行った（Fig.3）．(33) 式 ～ (35) 式の位相差が現れていることが確認できる．

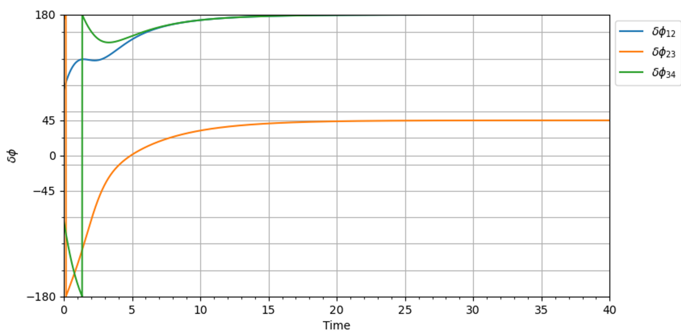

Fig. 3　位相差制御のシミュレーション

7.　歩容生成モデルとしての特徴

本研究で提案した位相差の制御においては，ω_1 の値の設定に自由度がある．ω_1 の設定値の大小によって歩行の速度を変えることができる．walk, trot, gallop の歩容遷移を考える場合は，k_1, k_2, k_3 を時間 t の関数とし，その微分方程式

$$\dot{k_1} = f_1(k_1; \omega_1) \tag{55}$$
$$\dot{k_2} = f_2(k_2; \omega_1) \tag{56}$$
$$\dot{k_3} = f_3(k_3; \omega_1) \tag{57}$$

にしたがって k_1, k_2, k_3 を変化させ，walk のときの値から trot のときの値に分岐現象を用いて変化させる方法が考えられる．

8.　まとめ

結合振動子に対して歩容生成に必要とされる適切な位相差を生成させる方法を理論に基づき提案した．ここでは，解軌道の位相を解析的に求めることができる振動子としてスチュアート・ランダウ方程式を採用した．各振動子の固有振動数および振動子間の結合係数を設定パラメータとし，所望の位相差を得るためのパラメータ設定法を示した．数値シミュレーションの結果，提案手法の妥当性を確認できた．

今後の課題として，第 7 節で述べたような walk, trot, gallop の歩容遷移があげられる．

参考文献

1) 湯浅，伊藤（義），伊藤（正）：分岐現象を用いた多様なパターンを生成する自律分散システム，計測自動制御学会論文集，vol.27, no.11, pp.1307-1314 (1991)

2) 動物の歩容遷移を再現する 4 脚ロボット，大脇大，日本ロボット学会誌，vol.37, no.2, pp.126-131 (2019)

3) ロコモーション・パターン創発研究の現状と今後の展望，木村浩，日本ロボット学会誌, vo1.41, No.3, pp.217-222 (2023)

4) 郡，森田：生物リズムと力学系，共立出版 (2011)

5) 蔵本，河村：同期現象の数理，培風館 (2010)