

# 動的システムの非線形性を考慮した状態推定フィルタの設計

## Design of State Estimation Filter with Consideration of Nonlinearity of Dynamical Systems

○小野優太\*, 村松鋭一\*

○ Yuuta Ono\*, Eiichi Muramatsu\*

\*山形大学

\*Yamagata University

**キーワード** : カルマンフィルタ (Kalman filter), 状態推定 (state estimation), 非線形性 (nonlinearity), テーラー展開 (Taylor expansion)

**連絡先** : 〒 992-8510 米沢市城南町 4-3-16 山形大学大学院理工学研究科機械システム工学専攻  
村松鋭一, Tel.: (0238)26-3327, Fax.: (0238)26-3327, E-mail: muramatu@yz.yamagata-u.ac.jp

### 1. 研究の背景と目的

非線形システムの状態推定法として拡張カルマンフィルタが代表的な手法として知られている。この方法は非線形システムを動作中の各状態において線形近似し、近似されたシステムに対して二乗誤差を最小にするという意味で最適なゲインを用いて状態推定値を逐次更新するものである。非線形システムを線形で近似するため、それに伴う誤差が状態推定値に影響するものとなっている。

本研究では非線形性の線形近似に伴う推定誤差を軽減することを目的とし、各動作点ごとの非線形性の大きさを定量的に測り、その大きさを推定ゲインの調整に用いる状態推定法を提案する。状態推定時にオンラインで非線形性の大きさを測る方法として、非線形関数のテーラー展開に着目し、非線形と線形近似の誤差として、テーラー展開の 2 次以上の項を評価する。また、拡張カルマンフィルタにおけるカルマンゲイン

が線形近似したシステムに対して最適であることに着目し、非線形性が大きな動作状態においては、非線形性の大きさをカルマンゲインに作用させてゲインの調整を図る推定を試み、その推定精度を評価する。

### 2. 移動ロボットのモデリング

本研究で扱う移動ロボットは対向 2 輪型ロボットである。xy 平面上を移動するロボットの位置と姿勢を状態とし、 $(x, y, \theta)$  と表す。その時間微分  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^T$  は、前方方向の速度  $\nu$  と角速度  $\omega$  を用いて

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \cos \theta \\ \nu \sin \theta \\ \omega \end{pmatrix} \quad (1)$$

で記述される。

ここで時刻  $t$  における  $\theta$  を  $\theta_{t-1}$  を用いて表

すと以下のように表すことができる.

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \int_0^{\Delta t} \omega_t dt = \theta_{t-1} + \omega_t \Delta t \quad (2)$$

これにより時刻  $t$  における  $\theta$  を  $\theta_{t-1}$  に用いて表すと以下のように表すことができる.

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^{\Delta t} \nu_t \cos(\theta_{t-1} + \omega t) dt \\ \int_0^{\Delta t} \nu_t \sin(\theta_{t-1} + \omega t) dt \end{pmatrix} \quad (3)$$

これを刻み時間  $\Delta t$  で離散化した方程式は,  $\omega = 0$  のとき,

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \\ \theta_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_t \cos \theta_{t-1} \\ \nu_t \sin \theta_{t-1} \\ \omega_t \end{pmatrix} \Delta t \quad (4)$$

$\omega \neq 0$  のとき,

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \\ \theta_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_t \omega_r^{-1} \{\sin(\theta_{t-1} + \omega_t \Delta t) - \sin \theta_{t-1}\} \\ \nu_t \omega_r^{-1} \{-\cos(\theta_{t-1} + \omega_t \Delta t) + \cos \theta_{t-1}\} \\ \omega_t \Delta t \end{pmatrix} \quad (5)$$

と表される.

これらを状態方程式と呼び格式の右辺を  $f(x)$  とする.

### 3. 移動ロボットとランドマークの位置関係

Fig.1のような移動ロボットとランドマークの位置関係とすると観測方程式  $h(x)$  は次のようになる.

$$h(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{(m_x - x)^2 + (m_y - y)^2} \\ \tan^{-1} \frac{m_y - y}{m_x - x} - \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

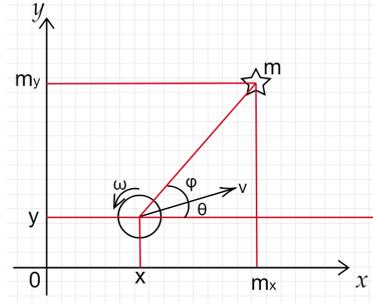


Fig. 1 移動ロボットとランドマークの位置関係

## 4. 拡張カルマンフィルタ

状態推定の方法の1つにカルマンフィルタを用いる方法がある. カルマンフィルタとは1960年にカルマン博士が提案したアルゴリズムであり, 状態モデルの内部の直接見れない状態を推定する方法である. 制御工学, 宇宙工学, 通信工学等広い分野でよく用いられNASAのアポロ計画でも宇宙船の位置を推定し進行方向を決定する際に用いられた. カルマンフィルタにおいてはセンサから取得できる測定値や制御指令値から状態の推定を行う.

しかし状態推定にカルマンフィルタを用いる場合は, 計算が簡略される代わりに状態と観測がガウス雑音を含む線形関数であることが前提となり実際の環境で線形性が成り立つことはほとんどない. 例えば, 移動ロボットの場合は回転運動の場合に式の記述に三角関数が含まれ状態方程式, 観測方程式が線形とならない.

従って移動ロボットの自己位置推定には非線形システムに有効である拡張カルマンフィルタ (Extended Kalman Filter) を用いる. 自己位置推定に関しては非線形である状態方程式と観測方程式を線形化し, 内部センサによって得られる制御指令値, カメラセンサによって得られるセンサ値が用いられ, 制御指令値を用いる予測ステップ, ランドマークを観測する観測ステップ, 2つのステップで得た情報が用いられる更新ステップによって行われる. 推定の分布に関しては更新

ステップ, 観測ステップによって更新される共分散行列の値を楕円の式に代入し楕円として表現される。(ロボットの推定値は分布の中心(平均)となる).

また, 移動ロボットの現在の状態  $x_t$  とセンサ値  $z_t$  を以下のように非線形関数として表す.

$$x_t = f(x_{t-1}, u_t) + \varepsilon \quad (7)$$

$$z_t = h(x_t) + \delta_t \quad (8)$$

#### 4.1 移動後の分布の更新

ロボットが移動した後の分布の更新はそれぞれ以下の式で行われる.

$$\hat{\mu}_t^- = f(\mu_{t-1}, u_t) \quad (9)$$

$$\hat{\Sigma}_t = F_t \Sigma_{t-1} F_t^T + R_t \quad (10)$$

$$A_t = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x=x_{t-1}, u=u_t} \quad (11)$$

$$F_t = \frac{\partial f(x_{t-1}, u)}{\partial x_{t-1}} \Big|_{x_{t-1}=\mu_{t-1}} \quad (12)$$

各記号は以下の通りとする.

$\hat{\mu}_t^-$ : 時刻  $t$  においてロボットが移動した後の推定値

$\hat{\mu}_{t-1}$ : 時刻  $t-1$  においてロボットがランドマークを観測した後の推定値

$\hat{\Sigma}_t$ : 時刻  $t$  においてロボットが移動した後の共分散行列

$F_t$ : 状態方程式でのヤコビ行列

$\Sigma_{t-1}$ : 時刻  $t-1$  においてロボットがランドマークを観測した後の共分散行列

$R_t$ : ガウス雑音の分布

$A_t$ : 遷移後の姿勢  $x$  をどれだけずらすかを決める行列

$u_t$ : 時刻  $t$  における制御指令

$x_{t-1}$ : 時刻  $t-1$  においてのロボットの姿勢

#### 4.2 観測後の分布の更新

ロボットがランドマークを観測した後の分布の更新はそれぞれ以下の式で行われる.

$$H = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=\hat{\mu}_t^-} \quad (13)$$

$$K = \hat{\Sigma}_t H^T (Q + H \hat{\Sigma}_t H^T)^{-1} \quad (14)$$

$$\hat{\mu}_t = \hat{\mu}_t^- + K(z - h(\hat{\mu}_t^-)) \quad (15)$$

$$\Sigma_t = (I - KH) \hat{\Sigma}_t \quad (16)$$

各記号は以下の通りとする.

$H$ : 観測方程式でのヤコビ行列

$K$ : カルマンゲイン

$Q$ : 雑音の共分散行列

$\hat{\mu}_t$ : 時刻  $t$  においてロボットがランドマークを観測した後の推定値

$\Sigma_t$ : 時刻  $t$  においてロボットがランドマークを観測した後の共分散行列

### 5. 雑音の性質

本研究で考える雑音の要因は移動ロボットが移動に対して発生する雑音とロボットを観測する際にセンサ値に対する雑音とする.

最初に移動に対して発生する雑音は道にランダムに小石が落ちており, それを移動ロボットがそれを踏んだ時に向きが少しずれるという想定で姿勢角  $\theta$  に雑音を混ぜる. 小石を踏むのはランダムなので, 小石を踏むまでの道のりを指数分布に従うと仮定し, その確率密度関数は

$$p(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geq 0) \quad (17)$$

で表せる.

次にセンサ値に対する雑音は距離の計測に対して比例する標準偏差, 方角に対しては一定の標準偏差でガウス分布に従う雑音を混ぜる.

## 6. ゲインの改良

### 6.1 テイラー展開の2次以上の項の評価

拡張カルマンフィルタでは非線形状態である状態方程式と観測方程式を線形化するため、移動後の分布の更新や観測後の分布の更新で状態方程式と観測方程式をテイラー展開し、線形近似をして線形化している。しかしテイラー展開は1次までで打ち切るので2次以上の項は考慮せずに考えている。ここで2次以上の項を考慮することで既存の拡張カルマンフィルタより精度の高い拡張カルマンフィルタができると考えた。

初めにテイラー展開を使用した2次以上の項を求めるには Fig.2 を参照すると

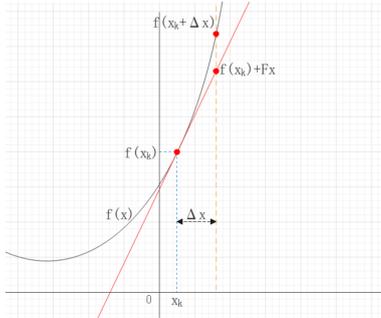


Fig. 2 2次以上の項の考え方

$$Q = f(\hat{x}_{k+\Delta x}) - \{f(\hat{x}_k) + J\Delta x\} \quad (18)$$

となる。Qは

$$Q = \frac{1}{2}\Delta x^T H \Delta x \dots \quad (19)$$

テイラー展開した2次以上の項を表す。このときJはヤコビ行列,Hはヘッセ行列を表している。

この時の非線形モデルの形は状態方程式の中の

$$x = x_{t-1} + f(x)\Delta t \quad (20)$$

f(x)を使用する。

この時のf(x)は

$\omega = 0$  のとき,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_t \cos \theta_{t-1} \\ \nu_t \sin \theta_{t-1} \\ \omega_t \end{pmatrix} \quad (21)$$

$\omega \neq 0$  のとき,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_t \omega_r^{-1} \{\sin(\theta_{t-1} + \omega_t) - \sin \theta_{t-1}\} \\ \nu_t \omega_r^{-1} \{-\cos(\theta_{t-1} + \omega_t) + \cos \theta_{t-1}\} \\ \omega_t \end{pmatrix} \quad (22)$$

となる。

次にヤコビJを求める。ヤコビ行列なのでf(x)の一階微分より

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \nu_t \omega_r^{-1} \{\cos(\theta_t + \omega_t) - \cos \theta_t\} \\ 0 & 1 & \nu_t \omega_r^{-1} \{\sin(\theta_t + \omega_t) - \sin \theta_t\} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

となる。

この時の $\Delta x$ は

$$\Delta x = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

と仮定する。

状態 $x_t$ に $\Delta x$ を足した時の非線形モデル $f(\hat{x}_{k+\Delta x})$ は次の通りになる。

$\omega = 0$  のとき,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_t + \Delta x \\ y_t + \Delta x \\ \theta_t + \Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_t \cos(\theta_t + \Delta x) \\ \nu_t \sin(\theta_t + \Delta x) \\ \omega_t \end{pmatrix} \quad (25)$$

$\omega \neq 0$  のとき,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_t + \Delta x \\ y_t + \Delta x \\ \theta_t + \Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_t \omega_r^{-1} \{\sin((\theta_t + \Delta x) + \omega_t) - \sin(\theta_t + \Delta x)\} \\ \nu_t \omega_r^{-1} \{-\cos((\theta_t + \Delta x) + \omega_t) + \cos(\theta_t + \Delta x)\} \\ \omega_t \end{pmatrix} \quad (26)$$

となる。

これらの式を使い2次以上の項を求めると

$$Q = f(\hat{x}_{k+\Delta x}) - \{f(\hat{x}_k) + J\Delta x\} \quad (27)$$

となる.

$$Q = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (28)$$

とすると

$$\|e\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2} \quad (29)$$

となる.

この  $\|e\|$  を非線形の大きさと仮定してゲインの調整に使用する.

## 6.2 ゲイン

拡張カルマンフィルタで使用するゲインはセンサ値と予測値をどのくらいの割合かを決めて推定値を求める役割がある.

$$\hat{\mu}_t = \hat{\mu}_t^- + K(z - h(\hat{\mu}_t^-)) \quad (30)$$

センサ値とはセンサから得られた値, 予測値とは観測方程式を使用した値である.

仮にゲインが大きいとセンサ値を重視した推定値. 逆に小さいと予測値を重視した推定値になる.

非線形の大きさを考慮してゲインの調節をするとき, 先ほど求めた  $\|e\|$  を使用する. ただそのまま使用するのではなく, ある関数の中に代入して出た値をゲインに使用する. 使用する関数は  $y = \tanh(x)$  であり, Fig.3 のような関数である.

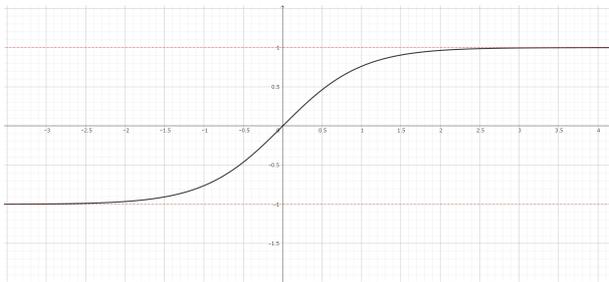


Fig. 3 使用する関数のグラフ

この関数を利用してゲインを調節する.

従来のカルマンゲインと次の3種類の調整方法と比較する.

$$K_1 = K \tanh(e) \quad (31)$$

$$K_2 = K(1 + \tanh(e)) \quad (32)$$

$$K_3 = K(1 - \tanh(e)) \quad (33)$$

式 (30) は元のゲインから小さくする調整, 式 (31) は元のゲインから大きくする調整, 式 (32) は元のゲインから式 (30) 程ではないが小さくする調整を表す式になる. これらを使用して推定を行う.

## 7. 推定結果

Fig.4~8 の見方に付いては Fig.4~7 の横軸は時間軸であり, 縦軸は  $x, y, \theta$  それぞれの値である. Fig.8 は横軸  $x$  縦軸  $y$  を表しており, 移動ロボットの軌道を表している.

また Fig.4~7 の線の色は

青:  $K = \hat{\Sigma}_t H^T (Q + H \hat{\Sigma}_t H^T)^{-1}$  従来のカルマンゲイン

オレンジ:  $K_1 = K \tanh(e)$  ゲイン減少

緑:  $K_2 = K(1 + \tanh(e))$  ゲイン増加

赤:  $K_3 = K(1 - \tanh(e))$  ゲイン減少

紫: 真値

である.

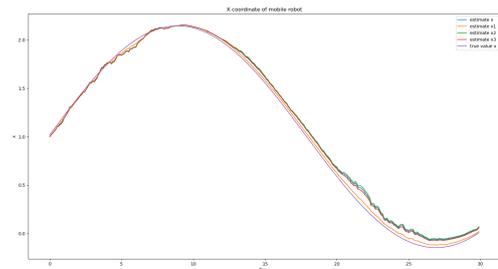


Fig. 4 推定対象の真値と推定値の X 座標

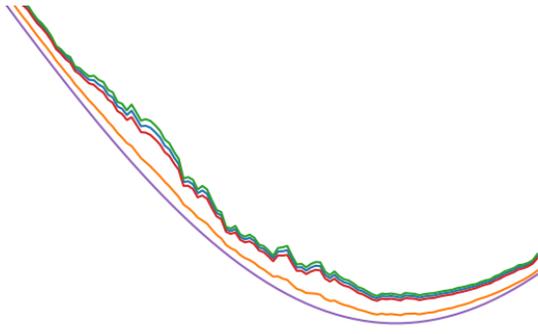


Fig. 5 推定対象の真値と推定値の X 座標の拡大図

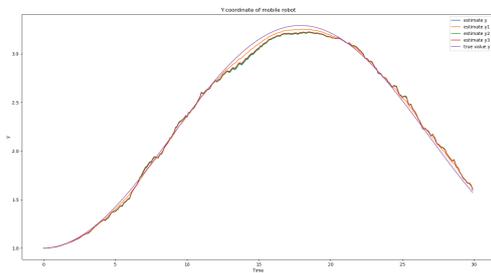


Fig. 6 推定対象の真値と推定値の Y 座標

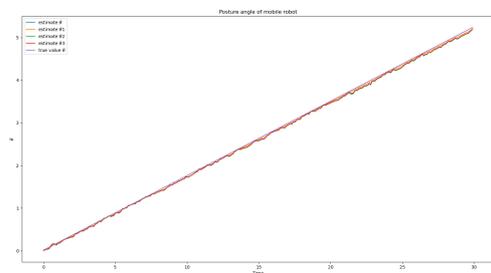


Fig. 7 推定対象の真値と推定値の姿勢角

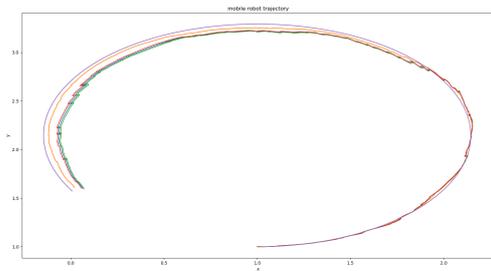


Fig. 8 推定対象の真値と推定値のロボットの軌道

## 8. まとめ

本研究は移動ロボットを制御する際に使用する非線形な状態方程式をテイラー展開して2次以降の項の数値をを利用し、ゲインに調節を加えて推定精度を評価することを目的として研究に取り組んだ。

前節の結果より元のゲインよりも小さく調整したほうが推定精度が上がり,大きく調整したほうが推定精度が下がったことが確認できた. このことより非線形性が大きい場合はセンサ値より予測値を重視したほうが良いと考えられる.

## 参考文献

- 1) 足立, 丸田: カルマンフィルタの基礎, 東京電機大学出版局 (2012)
- 2) 片山徹: 非線形カルマンフィルタ, 朝倉書店 (2011)
- 3) 上田隆一: 詳解確率ロボティクス, 講談社 (2019)
- 4) 加藤, 岩井, 藤谷, 幸田, 水戸, 村松: ランドマーク情報を活用した LiDAR データ処理による自己位置推定技術の開発. 自動車技術論文集. 2018, 1, p112-117