計測自動制御学会東北支部 第 351 回研究集会(2025.3.14)
資料番号 351-1

ハミルトン系に対する微分幾何学に基づくオブザーバの構成法

Scheme of observers for Hamiltonian systems via differential geometry

○片野裕貴*，村松鋭一*
○Hiroki Katano*, Eiichi Muramatsu*

*山形大学
*Yamagata University

キーワード: ハミルトン系(Hamilton system) 非線形制御(nonlinear control) 非線形オブザーバ(nonlinear observer) 多様体(manifold) シンプレクティック幾何学(symplectic geometry) 微分形式(differential form)

連絡先: 〒992-8510 山形県米沢市城南町 4-3-16
山形大学大学院理工学研究科機械システム工学専攻 村松鋭一
Tel.: (0238)26-3327 E-mail: muramatu @ yz.yamagata-u.ac.jp

1. 緒言

一般に制御理論はシステムの状態空間において状態変数を望ましい値に収束させる問題を扱う．ここでシステムに何らかの拘束条件が存在する場合，状態変数は状態空間内を自由に動くことはできず，ある限定された曲面上を動くこととなる．この観点からシステムの変数が真にもつ自由度を考え，本質的な状態の変遷にのみ着目すると，これは多様体上での点の動きとしてシステムの動的な挙動を考えるアプローチとなる．多様体を導入した理論においては微分幾何学に基づく解析が行われ，座標系に依存しない表現のもと，大域的なシステムの場の様相を記述することになる．

このような理論において，多様体の特性はベクトル場あるいは微分形式で記述される．系の時間発展を考えたい場合にはパラメータ t を導入し，t に対するベクトル場を考えることによって時間に紐づいた状態を知ることができる．さらに多様体上に座標系を導入することによって時間発展を記述する非線形微分方程式とのつながりが生まれ，具体的なシステム制御への応用へとつながる．

非線形微分方程式 $\dot{x} = f(x, u)$ で記述される一般的な非線形システムに対して，線形制御理論を拡張する形で非線形制御理論が構築する研究がある．一方，ある限定した非線形システムを扱うことにより，その特性を活かした解析と設計の理論を考えることもできる．例えば，ハミルトン力学系に対して入力による操作を加えたシステムの制御理論として，ポートハミルトン系に関する研究がある[1]．ここではハミルトン系をシンプレクティック多様体としてとらえるが，入力を付加することからシンプレクティック構造そのものではなく，ディラック構造と呼ばれる幾何学的な特性を多様体に与えている．

本研究ではハミルトン系における状態が出力方程式を介して部分的に観測できる状況を想定し，系のモデルと観測量から系の内部の状態を推定する問題を考える．これは制御理論におけるオブザーバの設計問題である．文献[1]などの一連の研究においてはシステムに入力を加える制御問題に主眼が置かれていたのに対し，本研究ではシステムの状態と出力を区別し，出力に基づく推定の問題を考察する．ハミルトン系を考えるため，本研究でもシンプレクティック多様体を扱う．推定対象となるシステ

ムの多様体に対し，オブザーバの多様体をいかに構成するかという問題に対し，座標系に依存しない幾何構造を用い，オブザーバが有するべき特性を多様体の構造として明らかにする．

2. ハミルトンシステム

2.1. ハミルトン系

ハミルトン系はハミルトンの運動方程式と呼ばれるつぎの微分方程式で記述される

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}\end{aligned} \tag{1}$$

ここで，q は一般化座標，p は一般化運動量である．この系の特徴として，ハミルトニアンと呼ばれる p と q に依存したスカラー量 H が保存量として存在する．すなわち，p, q の動きは H がある一定値をとる曲面上に拘束される．

一例として，ばねの端点と質点が接続され，もう一方の端点が固定されたような系がある．ばねの自然長を$q = 0$とすると,系のハミルトニアンは以下のように表される．

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 \tag{2}$$

ハミルトン系は(p, q)の相平面上で Fig. 1 のような円軌道を描く．

2.2. ハミルトンベクトル場

前節で述べた円軌道としてのハミルトン系における運動を多様体に結びつけるとすれば，方程式が描く積分曲線が単位円S^1と同相の多様体に描かれることとして表現される．

この多様体において点の動きを表現するために接ベクトルが用いられる．それは多様体上を動く点の軌道を考え，その接線方向を表現可能とするようなベクトル空間を想定することによって，そのベクトル空間は局所座標の導入とともに，その座標軸のそれぞれに対する方向微分を基底とする空間である．

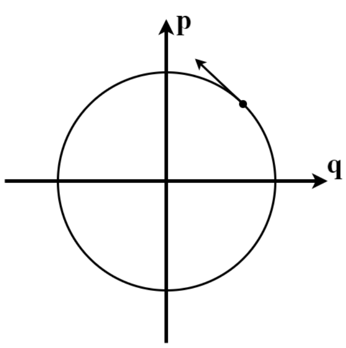

Fig. 1: ハミルトン系の相平面

例えば座標系 p, q を導入して方向微分を考えると接ベクトルは

$$X = \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial}{\partial q} \tag{3}$$

として表される．ハミルトン系においては前述の H という保存量が存在するため，式 (1) より，接ベクトルは

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} \tag{4}$$

として表される．この接ベクトルX_Hの集合をハミルトンベクトル場という．

2.3. ハミルトンシステムが持つ幾何構造

ここで多様体の構造を考える．構造とは多様体とその性質を表すものである．ハミルトン系における座標 q と運動量 p からなる相空間はシンプレクティック多様体となる．この多様体がもつシンプレクティック構造は以下のように定義される．

2.4. シンプレクティック構造

- シンプレクティック構造

M 上の 2 次微分形式を $\omega \in D^2(M)$ とする．ωが閉形式で，さらに，M 上で非退化であるとき，多様体 (M,ω) はシンプレクティック構造を持つという．

この2-形式はp, q からなる相平面の特性を記述するものであり，閉形式で非退化であることからハミルトニアン H という保存量が存在することが分かる．2-形式ωは，p, q を用いて$\omega = dp \wedge dq$と表される．これにより，p, q の軌道は H 上の等位面上に存在し，ベクトル場は H に応じて一意に定まる．

2-形式とハミルトンベクトル場の縮約である内積は

$$\omega X_H = -dH \tag{5}$$

を満たす．

2.5. ポアソン構造

シンプレクティック構造よりも一般的な構造としてポアソン構造がある．シンプレクティック構造はポアソン構造をもつ．このポアソン構造がもつポアソン括弧積は，Hのような

保存量をもつ接ベクトルを表す際に有用である．

• ポアソン構造

$C^\infty(M)$ 上の双線形写像 $\{\cdot,\cdot\}: C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$が以下の性質を満たすとき，多様体$(M,\{\cdot,\cdot\})$ はポアソン構造を持つという．

(1) $\{f,g\}=-\{g,f\}$ (反交換性)

(2) $\{f,gh\}=\{f,g\}+\{f,h\}$ (Leibniz 則)

(3) $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$ (Jacobi 恒等式)

また，このような括弧積$\{\cdot,\cdot\}$をポアソン括弧積という．

このポアソン括弧積によりハミルトンベクトル場は，

$$X_H=\{\cdot,H\} \tag{6}$$

と表される．ポアソン括弧積はネーターの定理により，不変量を調べる際に有用である．例えば，$\{G,H\}=0$ となるとき，G もまた保存量となっている．

局所座標を$z=(p,q)$としたとき，ハミルトン系は，

$$\frac{dz}{dt}=\{z,H\} \tag{7}$$

と簡潔に表される．

3. オブザーバの設計

前節で述べたようなハミルトン系を推定対象のシステムとする．本節ではその状態を推定するシステムとしてオブザーバを考える．

3.1. オブザーバへの要請

推定対象のシステムは式 (7) によって記述することができる．オブザーバは基本的には推定対象のシステムを模倣するものであるが，それに加えて推定誤差に応じた修正機構をもたせなければならない．それを構成するにあたり，対象システムと同様な多様体を底空間とした別の多様体 P を考える．ポアソン構造だけでは出力誤差による修正項を表現することができないため，さらに一般化されたディラック構造を用いることでこの問題を解決する．

ディラック構造はシンプレクティック構造から非退化の条件を緩和したプレシンプレクティック構造とポアソン構造をもつ構造である．

3.2. 出力方程式の仮定

オブザーバの設計において，出力誤差を得るために推定対象のシステムの出力方程式を仮定する．

一般に，非線形システム $\dot{x}=f(x)$ の出力方程式は $y=h(x)$ と表されるが，ここでは，微分形式を用いて表現する[2)]．

$$y=y(t_0)+\int_{t_0}^{t}\langle\Omega,f\rangle ds \tag{8}$$

ここで Ω は1-形式であり，z による出力を表す関数 h を用いて，次のようにおいた．

$$\Omega=\frac{\partial h}{\partial x}dx \tag{9}$$

また，簡単のため，$t_0=0$，$y(t_0)=0$ とすると，$s\in[0,t], t\in\mathbb{R}$ となり，出力方程式は次のようになる．

$$y=\int_{[0,t]}\langle\Omega,f\rangle ds \tag{10}$$

た，オブザーバの出力も $[0,t]$ 上で，

$$\hat{y}=\int_{[0,t]}\langle\hat{\Omega},f\rangle ds \tag{11}$$

と表せる．このとき，出力誤差を $\eta=\hat{y}-y$とすると，その外微分は

$$\begin{aligned} d\eta &= d\hat{y}-dy \\ &= \langle\hat{\Omega},f\rangle dt-\langle\Omega,f\rangle dt \\ &= \langle\hat{\Omega}-\Omega,f\rangle dt \end{aligned} \tag{12}$$

となる． 式 (6) により，

$$d\eta=\langle\hat{\Omega}-\Omega,\{\cdot,H\}\rangle dt \tag{13}$$

となる．

3.3. 一般化接束の導入

まず，一般化接束を導入する．一般化接束は，接束 TM と余接束 TM^* の直和集合 $\mathbb{T}M=TM\oplus TM^*$ である．前節で述べた $d\eta$ は余接束 TM^* に対応する．ベクトルは接束の切断 $\Gamma(TM)$，微分形式は余接束の切断 $\Gamma(TM^*)$ であるから，$\Gamma(\mathbb{T}M)$ の元は $v\in\Gamma(TM), \xi\in\Gamma(TM^*)$ を用いて和で表される，これを新たに一般化ベクトルと呼ぶ．

この定義に基づき，局所座標 x での一般化ベクトルはつぎのようになる．

$$v+\xi=v\frac{\partial}{\partial x}+\xi dx\in\Gamma(\mathbb{T}M) \tag{14}$$

3.4. オブザーバの構成法

一般化接束を導入したP上においてオブザーバを構成する. 式(14) で定義される一般化ベクトルと節 3.2 の微分形式を用いて，本研究ではオブザーバを局所座標 $\hat{z} \in P$ によって以下のように表わす.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= \{\hat{z}, H\} + d\eta \\ &= \{\hat{z}, H\} + \langle \hat{\Omega} - \Omega, \{\hat{z}, H\} \rangle dt\end{aligned} \tag{15}$$

このとき, 1-形式 $\hat{\Omega}$ と Ω が一致すれば出力誤差がなくなり，第 2 項が消去され，推定対象と一致する.

3.5. ディラック構造

節 3.3 の一般化接束および前節の式 (15) のオブザーバの構造はディラック構造[3] に相当する.

• ディラック構造

多様体 M 上の Courant 亜代数 $E = \mathbb{T}M$ の部分束 L がつぎの条件を満たすとき，Dirac 構造をもつという.

(1) L が極大等方的である. すなわち, すべての $(v,\xi)_i \in \Gamma(L)$ に対して，E 上で対称なペアリング $\langle\!\langle \cdot,\cdot \rangle\!\rangle$ が定義され,

$$\langle\!\langle (v,\xi)_1, (v,\xi)_2 \rangle\!\rangle = 0 \tag{16}$$

となる.

(2) $\mathrm{rank}(L) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rank}(E)$ である.

(3) すべての $(v,\xi)_i \in \Gamma(L)$ に対して，$[(v,\xi)_1, (v,\xi)_2]_D \in \Gamma(L)$

4. 結言

本研究では，ハミルトン系の状態を推定するオブザーバを多様体として構成することを考え，それがもつべき構造がディラック構造であることを提示した. 今後はディラック構造を用いたオブザーバのより具体的な構成法，幾何構造を用いた推定誤差の解析，微分方程式による実現方法が課題である.

参考文献

1) A. J. van der Schaft : Implicit Hamiltonian Systems with Symmetry, *Reports on mathematical physics*, Vol.**41** No. 2, 203/221 (1998).

2) 島：非線形システム制御論, 72/73 コロナ社 (1997).

3) T. J. Courant : dirac manifolds, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol.**319** No. 2, 631/633 (1990).