

4脚歩行のための結合振動子における 分岐理論に基づく歩容遷移

Gait transition based on bifurcation theory
in coupled oscillators for quadrupedal locomotion

○安藤礼弥*, 村松銳一*

○Hiroya Ando*, Eiichi Muramatsu*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード : 結合振動子 (coupled oscillators), 歩容遷移 (gait transition), 分岐理論 (bifurcation theory), スチュアート・ランダウ方程式 (Stuart-Landau Equation), 2重井戸ポテンシャルモデル (double-well potential model)

連絡先 : 〒992-8510 米沢市城南町4-3-16 山形大学大学院理工学研究科機械システム工学専攻
村松銳一, Tel.: (0238)26-3327, Fax.: (0238)26-3327, E-mail: muramatu@yz.yamagata-u.ac.jp

1. 研究の背景と目的

生物の歩容は結合振動子内の振動子間の同期現象によって生まれる。振動子の位相は生物の歩行脚の位置に対応し、歩行脚間の位置関係で歩容の種類が大別される。動物の歩容の生成と遷移のメカニズムは、歩行ロボットへの応用などの観点から興味深い研究対象となっており、ロボットの製作や計算機シミュレーションとともに数理的アプローチによるモデリングと制御系設計の研究が進んでいる^{1, 2, 3, 4, 5)}。歩行脚間の位置関係を振動子の位相に見立てて、その位相差を遷移させれば、歩容の遷移も可能である。

本稿では、先行研究⁶⁾で提案されたStuart-Landau方程式をベースとしたシンプルな4脚結合振動子モデルとその歩容生成法を用いて、この結合振動子の歩容を遷移させる手法として2

重井戸ポテンシャルモデルが持つ分岐現象を利用する手法を提案する。結合振動子の中に4個の振動子を設け、その中の1個の振動子をリーダー振動子と定め、その固有角振動数項に2重井戸ポテンシャルモデルがもつ分岐現象由来の値を与えることで、これが他の振動子をリードする役割を持ち、他の3つの振動子が引っ張られるように分岐現象のような歩容遷移をすることができるのか、数値シミュレーションを用いて検討した。ここでの目標は、歩容遷移のためのリーダー脚の2重井戸モデルと歩容の遷移前後の脚間の位相差の変化量から、歩容遷移モデルを構築することである。

2. 結合振動子

2.1 Stuart-Landau 方程式

まず、一般的な Stuart-Landau 振動子は以下のように表される⁶⁾.

$$\dot{z}(t) = (\mu + \omega i)z(t) - (1 + bi)|z(t)|^2z(t) \quad (1)$$

ここで $\mu > 0$, ω , b は実数の定数, i は虚数単位である。複素平面上の任意の点を初期値 $z(0)$ としたとき、解 $z(t)$ の軌道は半径 $\sqrt{\mu}$ 、固有角振動数 $\omega - b\mu$ の円軌道にリミットサイクルとして収束する。例えば $\mu = 4$, $\omega = 2$, $b = 1$ のとき、複素平面上の速度ベクトル $z(t)$ は図 1 のようなベクトル場を形成し、リミットサイクルという振動解をもつ。

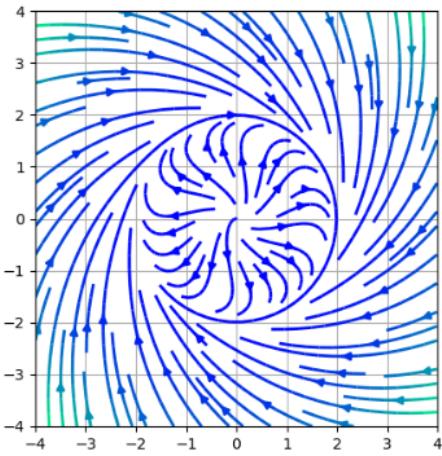


Fig. 1: Stuart-Landau 振動子の複素平面上のベクトル場とリミットサイクル

2.2 4 脚結合振動子モデル

次に、上式に結合項を組み合わせた結合振動子の式を以下に示す。なお、1つの振動子は1つの脚に対応し、以降左前足を1脚、右前足を2脚、左後ろ足を3脚、右後ろ足を4脚と呼称する。

また、位相の解析と制御系設計を簡潔にする

ため、 $\mu_i = 1, b_i = 0$, ($i = 1, \dots, 4$) とする。

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= (1 + \omega_1 i)z_1(t) - |z_1(t)|^2 z_1(t) \\ &\quad + k_{12}(z_2(t) - z_1(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) &= (1 + \omega_2 i)z_2(t) - |z_2(t)|^2 z_2(t) \\ &\quad + k_{12}(z_1(t) - z_2(t)) + k_{23}(z_3(t) - z_2(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3(t) &= (1 + \omega_3 i)z_3(t) - |z_3(t)|^2 z_3(t) \\ &\quad + k_{23}(z_2(t) - z_3(t)) + k_{34}(z_4(t) - z_3(t)) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_4(t) &= (1 + \omega_4 i)z_4(t) - |z_4(t)|^2 z_4(t) \\ &\quad + k_{34}(z_3(t) - z_4(t)) \end{aligned} \quad (5)$$

(2)～(5) 式における結合と 4 脚との対応は図 2 で表される。

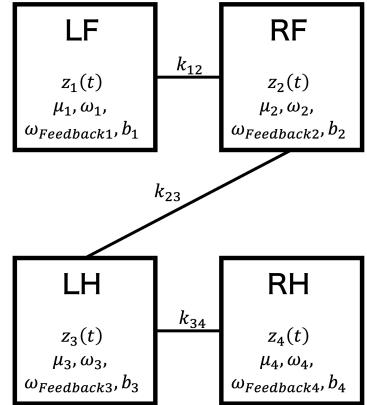


Fig. 2: 4 脚の結合

この結合振動子モデル (2) ～ (5) 式を位相縮約した式を次に示す。

$$\dot{\phi}_1(t) = \omega_1 + k_{12} \sin(\phi_2(t) - \phi_1(t)) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2(t) &= \omega_2 + k_{12} \sin(\phi_1(t) - \phi_2(t)) \\ &\quad + k_{23} \sin(\phi_3(t) - \phi_2(t)) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_3(t) &= \omega_3 + k_{23} \sin(\phi_2(t) - \phi_3(t)) \\ &\quad + k_{34} \sin(\phi_4(t) - \phi_3(t)) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\dot{\phi}_4(t) = \omega_4 + k_{34} \sin(\phi_3(t) - \phi_4(t)) \quad (9)$$

2.3 結合振動子の位相差の微分方程式

さらにこれらの(6)～(9)式を位相差の微分方程式で表す。ここで、

$$\dot{\delta\phi}_{ij} = \dot{\phi}_i - \dot{\phi}_j \quad (10)$$

$$\delta\phi_{ij} = \phi_i - \phi_j \quad (11)$$

$$\delta\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j \quad (12)$$

と定義することにより、

$$\begin{aligned} \dot{\delta\phi}_{12}(t) &= \delta\omega_{12} - 2k_{12} \sin \delta\phi_{12}(t) \\ &\quad + k_{23} \sin \delta\phi_{23}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta\phi}_{23}(t) &= \delta\omega_{23} - 2k_{23} \sin \delta\phi_{23}(t) \\ &\quad + k_{12} \sin \delta\phi_{12}(t) + k_{34} \sin \delta\phi_{34}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta\phi}_{34}(t) &= \delta\omega_{34} - 2k_{34} \sin \delta\phi_{34}(t) \\ &\quad + k_{23} \sin \delta\phi_{23}(t) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。歩容遷移を議論するにあたって、上に示した(13)～(15)式のような位相差の微分方程式は極めて重要な式である。何故ならば、歩容の遷移とはすなわち脚間の位相差の変化に他ならないからである。よって、(13)～(15)式を用いて歩容遷移を議論していく。

3. 歩容生成と歩容遷移のための Stuart-Landau 方程式のパラメータ設定法

3.1 問題設定

問題設定として、ある歩容Aからある歩容Bへの遷移を考える。このとき、歩容Aの位相差が $\delta\phi_{ij_A}^*|_{i,j=1,\dots,4}$ 、歩容Bの位相差が $\delta\phi_{ij_B}^*|_{i,j=1,\dots,4}$ で与えられるものとする。

結合振動子の中の振動子間の位相差が、歩容Aの位相差に収束している状態から、歩容Bの位相差に収束している状態へ遷移していくようを考えることが、歩容遷移を考えることと同義である。この章では先行研究⁶⁾での歩容生成法

に倣って、遷移前の歩容Aや遷移後の歩容Bといった、ある歩容で安定するために満たすべき条件を明らかにし、固有角振動数 ω_i と結合係数 k_{ij} を如何に設定するべきかについて焦点を当てる。

3.2 各歩容に対する固有角振動数 ω_i と結合係数 k_{ij} の決め方

3.2.1 遷移前（歩容A 安定期）

まず、歩容Aが創発されてしばらくの間、歩容Aが維持されているとき、位相差は変化しないので $\dot{\delta\phi}_{ij_B}^* = 0 (i, j = 1, \dots, 4)$ であり、このときの結合係数を $k_{ij_A} (i, j = 1, \dots, 4)$ とする、(13)～(15)式は、

$$0 = \delta\omega_{12_A} - 2k_{12_A} \sin \delta\phi_{12_A}^* + k_{23_A} \sin \delta\phi_{23_A}^* \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\omega_{23_A} - 2k_{23_A} \sin \delta\phi_{23_A}^* \\ &\quad + k_{12_A} \sin \delta\phi_{12_A}^* + k_{34_A} \sin \delta\phi_{34_A}^* \end{aligned} \quad (17)$$

$$0 = \delta\omega_{34_A} - 2k_{34_A} \sin \delta\phi_{34_A}^* + k_{23_A} \sin \delta\phi_{23_A}^* \quad (18)$$

となる。

このとき、結合係数 k_{ij_A} は、文献⁶⁾に基づき

$$k_{12_A} \cos \delta\phi_{12_A}^* > 0 \quad (19)$$

$$k_{23_A} \cos \delta\phi_{23_A}^* > 0 \quad (20)$$

$$k_{34_A} \cos \delta\phi_{34_A}^* > 0 \quad (21)$$

を満たすものとする。

式(16)～(18)を $\delta\omega_{ij_A}$ について解くと、

$$\delta\omega_{12_A} = 2k_{12_A} \sin \delta\phi_{12_A}^* - k_{23_A} \sin \delta\phi_{23_A}^* \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \delta\omega_{23_A} &= 2k_{23_A} \sin \delta\phi_{23_A}^* \\ &\quad - k_{12_A} \sin \delta\phi_{12_A}^* - k_{34_A} \sin \delta\phi_{34_A}^* \end{aligned} \quad (23)$$

$$\delta\omega_{34_A} = 2k_{34_A} \sin \delta\phi_{34_A}^* - k_{23_A} \sin \delta\phi_{23_A}^* \quad (24)$$

となり、 $\delta\omega_{ij_A}$ が求まる。

3.2.2 遷移後（歩容 B 安定期）

歩容 A から歩容 B に遷移し十分に時間が経ったとき、すでに遷移は終わっており歩容 B で安定しているため、位相差は変化しないので、 $\dot{\delta\phi}_{ij_B}^* = 0 (i, j = 1, \dots, 4)$ であり、このときの結合係数を $k_{ij_B} (i, j = 1, \dots, 4)$ とすると、(13)～(15) 式は、

$$0 = \delta\omega_{12_B} - 2k_{12_B} \sin \delta\phi_{12_B}^* + k_{23_B} \sin \delta\phi_{23_B}^* \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\omega_{23_B} - 2k_{23_B} \sin \delta\phi_{23_B}^* \\ &\quad + k_{12_B} \sin \delta\phi_{12_B}^* + k_{34_B} \sin \delta\phi_{34_B}^* \end{aligned} \quad (26)$$

$$0 = \delta\omega_{34_B} - 2k_{34_B} \sin \delta\phi_{34_B}^* + k_{23_B} \sin \delta\phi_{23_B}^* \quad (27)$$

となる。

このとき、結合係数 k_{ij_B} は、歩容 A のときと同様に

$$k_{12_B} \cos \delta\phi_{12_B}^* > 0 \quad (28)$$

$$k_{23_B} \cos \delta\phi_{23_B}^* > 0 \quad (29)$$

$$k_{34_B} \cos \delta\phi_{34_B}^* > 0 \quad (30)$$

を満たすものとする。

式 (25)～(27) を $\delta\omega_{ij_B}$ について解くと、

$$\delta\omega_{12_B} = 2k_{12_B} \sin \delta\phi_{12_B}^* - k_{23_B} \sin \delta\phi_{23_B}^* \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \delta\omega_{23_B} &= 2k_{23_B} \sin \delta\phi_{23_B}^* \\ &\quad - k_{12_B} \sin \delta\phi_{12_B}^* - k_{34_B} \sin \delta\phi_{34_B}^* \end{aligned} \quad (32)$$

$$\delta\omega_{34_B} = 2k_{34_B} \sin \delta\phi_{34_B}^* - k_{23_B} \sin \delta\phi_{23_B}^* \quad (33)$$

となり、 $\delta\omega_{ij_B}$ が求まる。

3.3 固有角振動数 ω_i の決め方

ここまでで、歩容 A で安定するための固有角振動数 ω_{i_A} と ω_{j_A} の差である $\delta\omega_{ij_A}$ と、歩容 B で安定するための固有角振動数 ω_{i_B} と ω_{j_B} の差である $\delta\omega_{ij_B}$ を導出することができた。あとは $\omega_{1A} \sim \omega_{4A}$ のうちどれか 1 つと、 $\omega_{1B} \sim \omega_{4B}$ のうちどれか 1 つを定めれば、先程求めた固有角振

動数差 $\delta\omega_{ij_A}, \delta\omega_{ij_B}$ を用いて、和や差から容易に他の ω_i も求められる。

そこで、1 脚をリーダー振動子と定め、後述する 2 重井戸ポテンシャルモデルにより時々刻々と出力される ω_1 を基準に、(12) 式を用いることで、ある分岐点までは $\delta\omega_{ij_A}$ を用いて ω_{i_A} を、分岐点を通過したあとは歩容 B で安定させるために $\delta\omega_{ij_B}$ を用いて ω_{i_B} を時々刻々と求める。

3.3.1 結合係数 k_{ij} の遷移について

結合係数 k_{ij} について、歩容遷移の前後については式 (19)～(21), (28)～(30) に基づいて符号を決めることができるが、後述する歩容の分岐点で切り替えるようにすることで結合係数 k_{ij} の遷移を実現させる。また、シミュレーションでは暫定的に条件文による切り替えによって結合係数 k_{ij} の遷移を実現させることとした。

4. 分岐理論に基づく歩容遷移の提案

4.1 2重井戸ポテンシャルモデルに基づく歩容遷移の提案

この章で提案する力学系的アプローチでは、力学系におけるポテンシャル関数の概念に基づき、より統一的かつ物理的に直感的なアプローチを提案する。

4.2 2重井戸ポテンシャルモデルの概念

2重井戸ポテンシャル関数は、2つの安定な状態（谷）を持つポテンシャル関数であり、ここに分岐パラメータ p を係数を持つ線形項を導入することで2つの谷の地形を制御できる。分岐パラメータ p を増加させることで2つある安定平衡点の谷の一方を均してもう一方を深くしたり、そこから谷が2つある状態に戻したりすることができる。この2つの谷を歩容 A と歩容 B のリーダー振動子の目標固有角振動数に当て

はめ、この2つの目標固有角振動数間を、リーダー振動子の固有角振動数項が遷移する。このようにすることによって、状態間の遷移を分岐パラメータ p で制御することが可能であると考えた。このような結合振動子に遷移のきっかけを作る入力がある構造は、実際の動物が持つ運動指令器官の機能に着想を得ている。

4.3 ポテンシャル関数での ω_1 のダイナミクスの導入

まず、固有角振動数 ω_1 のダイナミクスをポテンシャル関数 $V(\omega_1)$ から導出することを考える。系の状態 ω_1 は、ポテンシャル $V(\omega_1)$ が低くなる方向へ変化する⁷⁾。この関係は以下の微分方程式で表される。

$$\dot{\omega}_1 = f(\omega_1) = -\frac{dV(\omega_1)}{d\omega_1} \quad (34)$$

安定平衡点はポテンシャル $V(\omega_1)$ の極小点（谷底）に、不安定平衡点は極大点（山頂）にそれぞれ対応する。歩容遷移は、このポテンシャルという「地形」の形状を、分岐パラメータ p を用いて滑らかに変化させることで実現される。

4.4 歩容遷移のフェーズ

リーダー振動子の歩容 A と歩容 B の目標固有角振動数 ω_{1A}^* と ω_{1B}^* をそれぞれ設定する。また分岐点を p_1, p_2 として、 $p_1 < p_2$ とする。 $p = 0$ のとき、ポテンシャル関数の外形は左右対称の2重井戸の形状をしており、ここから p を減少させていき分岐点 p_1 を下回ると、右側の谷が消失して左側の谷のみが残る形となりこの時を分岐フェーズ 1 とする。逆に、 p を増加させていき分岐点 p_2 を超えると、左側の谷が消失して右側の谷のみが残る形となりこの時を分岐フェーズ 3 とする。これらの分岐フェーズの間、すなわち $p_1 < p < p_2$ のときは、2つの谷が存在する形となりこの時を分岐フェーズ 2 とする。歩容遷移は以下の3つのフェーズと2つの分岐ポイントに分けられる。

- 分岐フェーズ 1 ($p < p_1$): ポテンシャル $V(\omega_1)$ は歩容 A の目標固有角振動数 ω_{1A}^* に対応する深い谷をもつ。このフェーズでは、 ω_1 は ω_{1A}^* 近傍に収束する。

Bifurcation Analysis

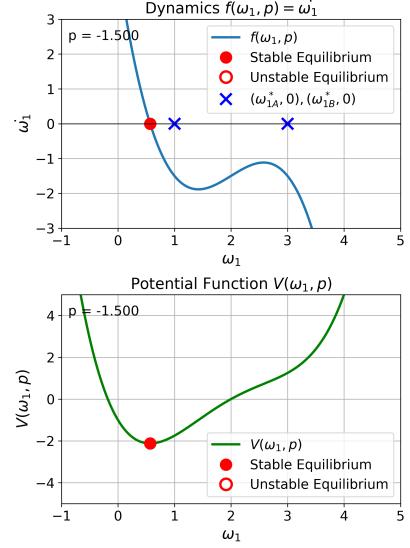


Fig. 3: 2重井戸ポテンシャルの分岐フェーズ 1

- 分岐ポイント 1 ($p = p_1$): 歩容 B の目標固有角振動数 ω_{1B}^* に対応する谷が出現/消失するポイント。

Bifurcation Analysis

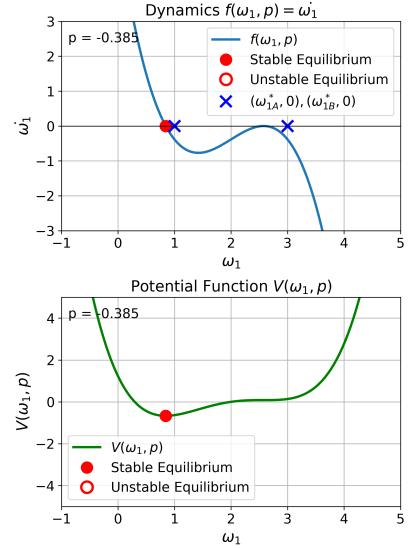


Fig. 4: 2重井戸ポテンシャルの分岐ポイント 1

- 分岐フェーズ 2 ($p_1 < p < p_2$): ポテンシャル

ル $V(\omega_1)$ は歩容 A の目標固有角振動数 ω_{1A}^* と歩容 B の目標固有角振動数 ω_{1B}^* に 対応する 2 つの谷をもつ. このフェーズでは, ω_1 は ω_{1A}^* 近傍か ω_{1B}^* 近傍に収束する.

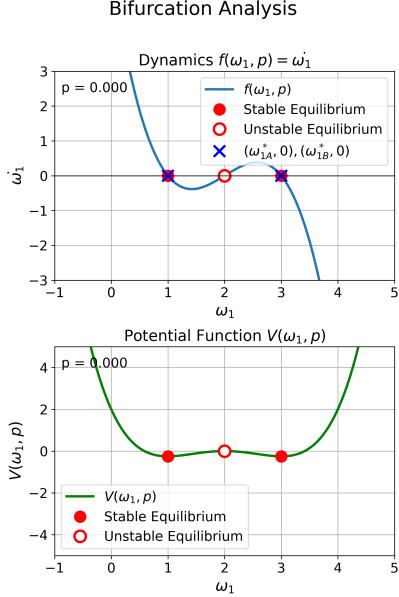


Fig. 5: 2重井戸ポテンシャルの分岐フェーズ 2

- 分岐ポイント 2($p = p_2$): 歩容 B の目標固有角振動数 ω_{1A}^* に対応する谷が出現/消失するポイント.

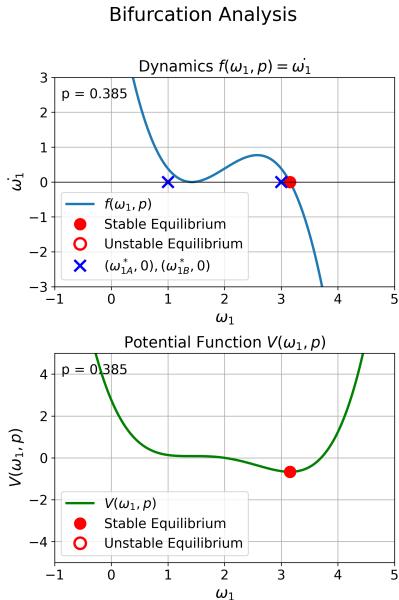


Fig. 6: 2重井戸ポテンシャルの分岐ポイント 2

- 分岐フェーズ 3($p_2 < p$): ポテンシャル $V(\omega_1)$ は歩容 A の目標固有角振動数 ω_{1B}^* に対応する深い谷をもつ. このフェーズでは, ω_1 は ω_{1B}^* 近傍に収束する.

Bifurcation Analysis

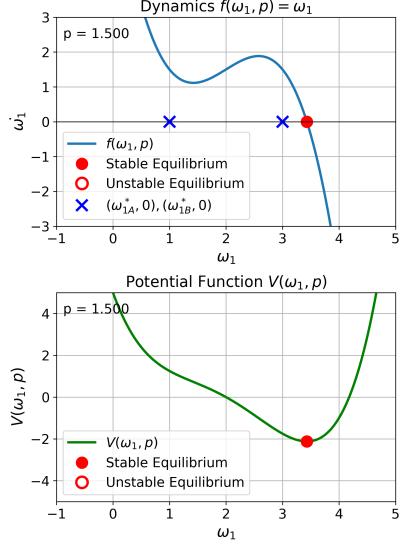


Fig. 7: 2重井戸ポテンシャルの分岐フェーズ 3

4.5 2重井戸ポテンシャルモデルの定式化

2つの安定な歩容（歩容 A, 歩容 B）間の遷移をモデル化するため, 二つの谷を持つ2重井戸ポテンシャル関数を用いる.

最も基本的な形は4次関数で与えられ, その式に分岐パラメータ p による「傾き」の項を加え, 更に曲率 c と中線 ω_{1c} , 加減速のためのリーダー脚の歩容 A と歩容 B における目標固有角振動数 ω_{1A}^* と ω_{1B}^* を導入することで, 次のように定式化する.

$$V(\omega_1; p) = -\frac{c}{2}(\omega_1 - \omega_{1c})^2 + \frac{1}{4}(\omega_1 - \omega_{1c})^4 - p(\omega_1 - \omega_{1c}) \quad (35)$$

ここで,

$$\omega_{1c} = \frac{\omega_{1A}^* + \omega_{1B}^*}{2} \quad (36)$$

ここで, 各パラメータは以下の意味である.

- ω_{1c} : リーダー振動子の固有角振動数項の、歩容 A と歩容 B に対応する 2 つの目標固有角振動数 ω_{1A}^* と ω_{1B}^* の中線。この値がポテンシャル関数の位置を決定する。
- c : ポテンシャルの二つの谷の「曲率」を決める正の定数。この値がポテンシャル曲線の形状を決定する。
- p : 歩容遷移を引き起こす分岐パラメータ。ポテンシャル全体を傾け、二つの谷の相対的な安定性を制御する。

このポテンシャル関数から、 ω の微分方程式は次のように導出される。

$$\omega_1 = -\frac{\partial V}{\partial \omega_1} = c(\omega_1 - \omega_{1c}) - (\omega_1 - \omega_{1c})^3 + p \quad (37)$$

この式を展開すれば ω_1 に関する 3 次多項式となる。

4.6 パラメータの設計

まず、曲率 c は、2 つの目標固有角振動数 ω_{1A} , ω_{1B} によって一意に決定される。系が左右対称のポテンシャルを持つとき ($p = 0$)、その谷底がちょうど ω_{1A}^* と ω_{1B}^* に一致するようにしたときの曲率 c を考えると、式(37)は、 $\dot{\omega}_1 = 0$ のとき、解として ω_{1A}^* と、 ω_{1B}^* を持てばいいので、式(37)に $p = 0$, $\dot{\omega}_1 = 0$ を代入すると、

$$0 = c(\omega_1 - \omega_{1c}) - (\omega_1 - \omega_{1c})^3 + 0 \\ \Rightarrow (\omega_1 - \omega_{1c}) \{c - (\omega_1 - \omega_{1c})^2\} = 0 \quad (38)$$

よって、

$$\begin{cases} \omega_1 - \omega_{1c} = 0 \\ c - (\omega_1 - \omega_{1c})^2 = 0 \end{cases}$$

すなわち、

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_{1c} \\ c = (\omega_1 - \omega_{1c})^2 \end{cases} \quad (39)$$

となる。

式(39)の上の式より、この 3 次の微分方程式はまず ω_{1c} を平衡点として解に持つ。式(39)の下の式について、 ω_{1c} 以外の解は先述の通り、 ω_{1A}^* , ω_{1B}^* となればよいので、式(39)の下の式と式(36)より、

$$c = (\omega_1 - \omega_{1c})^2 \\ = \left(\omega_1 - \frac{\omega_{1A}^* + \omega_{1B}^*}{2} \right)^2 \quad (40)$$

$\omega_1 = \omega_{1A}^*$ のとき、

$$c = \left(\omega_{1A}^* - \frac{\omega_{1A}^* + \omega_{1B}^*}{2} \right)^2 \\ = \left(\frac{\omega_{1A}^* - \omega_{1B}^*}{2} \right)^2 \\ = \left(\frac{\omega_{1B}^* - \omega_{1A}^*}{2} \right)^2 \quad (41)$$

また、 $\omega_i = \omega_{1B}^*$ のとき、

$$c = \left(\omega_{1B}^* - \frac{\omega_{1A}^* + \omega_{1B}^*}{2} \right)^2 \\ = \left(\frac{\omega_{1B}^* - \omega_{1A}^*}{2} \right)^2 \quad (42)$$

以上より、 c は

$$c = \left(\frac{\omega_{1B}^* - \omega_{1A}^*}{2} \right)^2 \quad (43)$$

と設定すれば、 $p = 0$ のとき目標固有角振動数 ω_{1A}^* と ω_{1B}^* を谷に持つ曲率のポテンシャル関数となる。

4.7 分岐点となる p の値の導出

分岐点となる p の値は、 ω_i の微分方程式である(37)の平衡点の個数が変化する点であり、安定平衡点が 1 つから 2 つに変化する点である。

すなわち、式(37)の解が実数解 2 つのときの p を求めれば良い。一般的に 3 次方程式の判別式 D は

$$x^3 + cx + d = 0 \quad (44)$$

という3次方程式において、

$$D = -4c^3 - 27d^2 \quad (45)$$

と定義される。

判別式 $D = 0$ のとき、3次方程式は実数解が1つと重解が1つのときであり、判別式 D が0より大きいとき、3次方程式は実数解が3つのときである。

したがって、分岐点となる p の値は、判別式が $D = 0$ になるときの p の値を求めれば良い。式(37)について、途中式簡約化のために、 $\omega_1 - \omega_{1c} = \Omega$ と置くと、

$$\begin{aligned} \{\text{式(37)の右辺}\} &= c\Omega - \Omega^3 + p = 0 \\ \Omega^3 - c\Omega - p &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで式(45)を用いて判別式 D を求めると、

$$\begin{aligned} D &= -4(-c)^3 - 27(-p)^2 \\ &= 4c^3 - 27p^2 \\ p^2 &= \frac{4}{27}c^3 \end{aligned}$$

ここで、曲率 c について式(43)を代入することにより、

$$\begin{aligned} p &= \pm \frac{(\omega_{1B}^* - \omega_{1A}^*)^3}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{27}} \\ &= \pm \frac{(\omega_{1B}^* - \omega_{1A}^*)^3}{12\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (46)$$

となる。

ここで p_1 と p_2 を分岐点として、 $p_1 < p_2$ とすると、このポテンシャル関数の分岐現象の分岐点は

$$\begin{cases} p_1 = -\frac{(\omega_{1B}^* - \omega_{1A}^*)^3}{12\sqrt{3}} \\ p_2 = \frac{(\omega_{1B}^* - \omega_{1A}^*)^3}{12\sqrt{3}} \end{cases} \quad (47)$$

となる。

4.8 歩容生成の係数決定法と組み合わせる

先述した2重井戸ポテンシャルモデルのダイナミクスがリーダー振動子を持つ1脚に与えられたとして、先述した歩容生成と歩容遷移のためのパラメータ決定法により導出された $\delta\omega_{12}, \delta\omega_{23}, \delta\omega_{34}$ と式(12)によって他の脚の固有角振動数も容易に導出できるであろう。

歩容が遷移しない間は、「その歩容を実現するための脚間の固有角振動数の差」である $\delta\omega_{ij}$ は変化しないが、分岐パラメータ p を変化させることで、 ω_1 は変化し、すなわち同一歩容内での歩行速度の加減速を実現できる。歩容は維持したまま、すなわち位相差は保ったままで、 ω_1 を加減速させることができる。

5. シミュレーション

5.1 シミュレーションの概要

以上の歩容遷移の手法の検証のために、python とその外部ライブラリである numpy と matplotlib によるシミュレーションを行った。

シミュレーションでは、まず歩容 A と歩容 B についてそれぞれ歩容生成のための結合係数 k_{ij} と $\delta\omega_{ij}$ を計算し、次に歩容遷移に用いる2重井戸ポテンシャルモデルに基づいて、歩容遷移のための分岐パラメータ p を変化させ ω_1 の値を生成しながら、先に求めていた $\delta\omega_{ij}$ を用いて他の脚の固有角振動数を計算し、その結果を matplotlib のアニメーション関数で可視化した。

5.2 シミュレーションの条件

シミュレーションでは、以下の条件を設定した。

- 歩容 A の位相差
 $\delta\phi_{12A}^* = \frac{3}{4}\pi$ [rad],
 $\delta\phi_{23A}^* = 0$ [rad],
 $\delta\phi_{34A}^* = \frac{5}{4}\pi$ [rad]

- 歩容 B の位相差

$$\begin{aligned}\delta\phi_{12B}^* &= 0 \text{ [rad]}, \\ \delta\phi_{23B}^* &= \frac{3}{4}\pi \text{ [rad]}, \\ \delta\phi_{34B}^* &= 0 \text{ [rad]}\end{aligned}$$

- 歩容 A の目標固有角振動数 $\omega_{1A} = 1.0$ [rad/s]
- 歩容 B の目標固有角振動数 $\omega_{1B} = 3.0$ [rad/s]
- 結合係数の絶対値 $k_{absolute} = 1.0$
- 分岐パラメータ p の変化範囲 $-1.5 \leq p \leq 2.5$

5.3 シミュレーションの結果

シミュレーションの結果についてまず各脚間の位相差の時間推移を示すグラフを以下に示す。

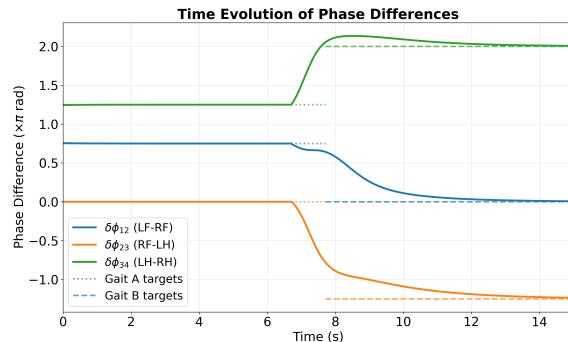


Fig. 8: 各脚間の位相差の変化

各歩容の目標位相差を、それぞれ点線と破線で示している。また、この目標位相差は実際の位相差の時間推移の挙動に応じて、わかりやすさのために必要に応じて 2π の整数倍されることに留意されたい。

次に分岐図を示す。

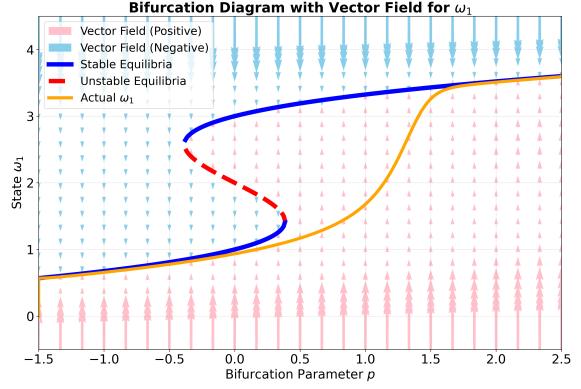


Fig. 9: 分岐図

分岐図は、横軸に分岐パラメータ p を取り、縦軸に 1 脚の固有角振動数 ω_1 を取ったグラフである。また実際の ω_1 の値の挙動をオレンジ色の線で示し、安定平衡点を青の実線で、不安定平衡点を赤の破線で示している。また、正方向のベクトル場をピンク色の矢印で、負方向のベクトル場を水色の矢印で示している。

次に特定の p の値のときのシミュレーションの結果を示す。

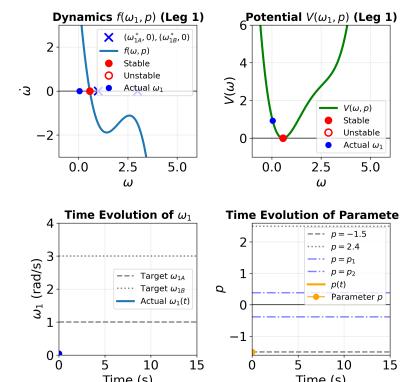
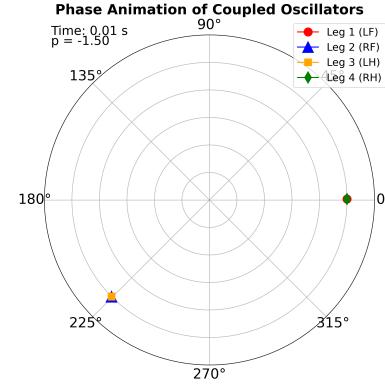


Fig. 10: シミュレーション最初期 ($p = -1.5$) のときのシミュレーション

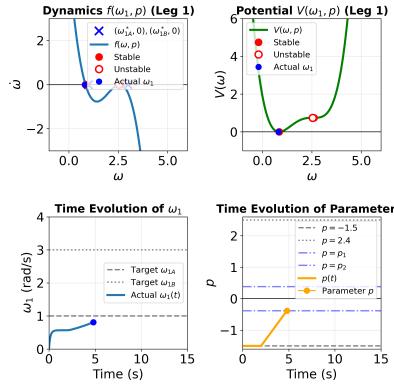
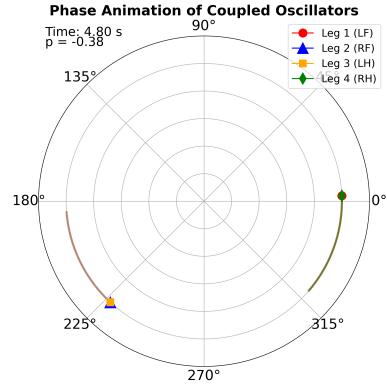


Fig. 11: 分岐点 $1(p = p_1)$ 近傍のときのシミュレーション

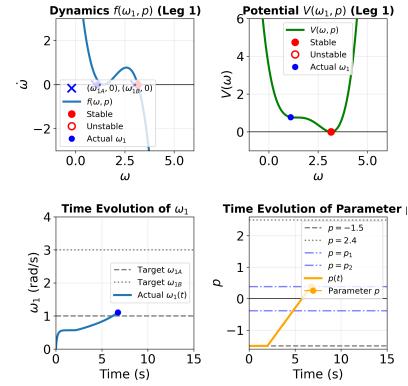
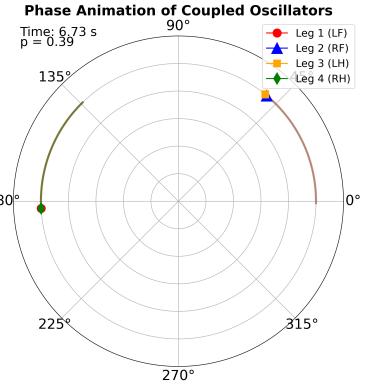


Fig. 13: 分岐点 $2(p = p_2)$ 近傍のときのシミュレーション

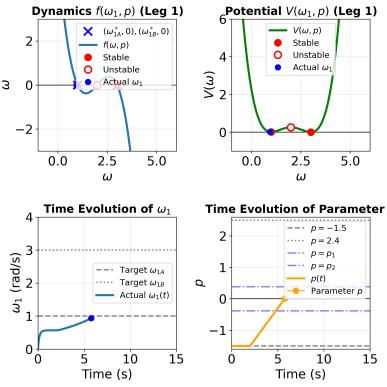
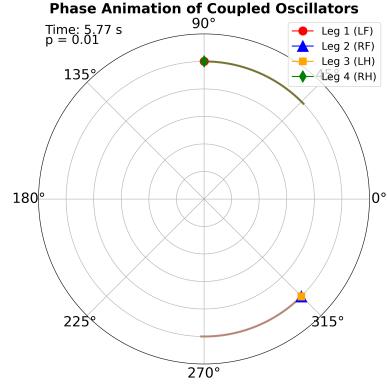


Fig. 12: $p \approx 0$ のときのシミュレーション

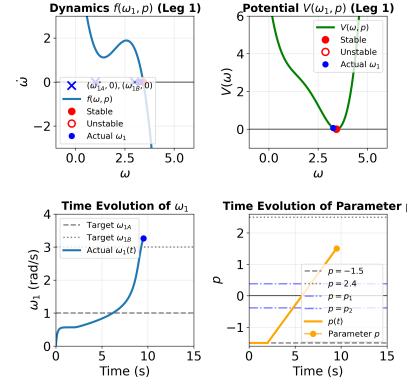
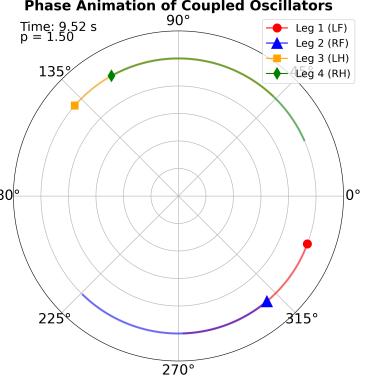


Fig. 14: 歩容 B に遷移した直後のシミュレーション

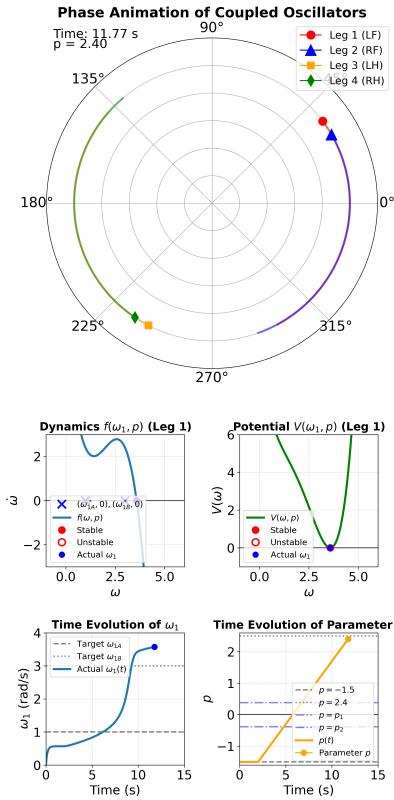


Fig. 15: 歩容 B に遷移して十分時間がたったときのシミュレーション

図 10～図 15 のシミュレーション結果は、それぞれ $p \approx -1.5$, $p \approx p_1$, $p \approx 0$, $p \approx p_2$, $p \approx 1.5$, $p \approx 2.4$ のときのものである。左側の極座標系には 4 つの脚の位相が示されている。右側の 4 つのグラフのうち、左上のグラフは分岐の微分方程式 (37) のグラフ、右上のグラフは 2 重井戸ポテンシャルモデル (35) のグラフ、左下のグラフは 1 脚の固有角振動数 ω_1 の時間推移、右下のグラフは分岐パラメータ p の時間推移を示している。ちなみに、上に示した画像の分岐パラメータ p の値が先ほど挙げた具体的な値と完全なイコールではないのかというと、アニメーション表示する際のフレームレートの関係で、分岐パラメータ p の値を厳密に指定することが難しいためである。

6. 考察

6.1 考察 1：位相差の時間推移について

図 8 の各脚間の位相差の時間推移を見てみると、歩容 A から歩容 B に遷移する際 ($p = p_2$ となる $t \approx 7.6$ [sec]) に、脚間の位相差が概ね歩容 B に向かって変化していることがわかる。歩容遷移直後は位相差と目標位相差の誤差が大きいが、時間が経つにつれて、位相差は目標位相差に収束していく様子がわかる。

6.2 考察 2：分岐図について

図 9 の分岐図を見てみると、分岐点 p_1 から p_2 の間では安定平衡点となる枝が 2 つ存在し、オレンジ色の実線で示した ω_1 の時間推移を見ると p が大きくなる方向では下の枝で分岐点 p_1 を通過し p_2 までは下の枝に沿って時間推移し、 p_2 を通過すると上の枝にジャンプして沿って時間推移していることがわかる。仮に逆向きの歩容遷移を考えたとき、すなわち p の値が大きい値から小さい値に、減少する方向に変化したときについて考えたとき、まず上の枝に沿って p_2 を通過して p_1 まで時間推移し、その後下の枝にジャンプして下の枝に沿って時間推移することがこの分岐図からわかる。すなわち、この分岐現象はパラメータの変化に伴う系の変化が可逆ではないとわかり、ヒステリシス現象が起きている事がわかる。

また、分岐の種類について見てみると、分岐図の極値近傍を見ると安定平衡点と不安定平衡点のペアが出現したり対消滅したりしていることがわかり、サドルノード分岐の一種と考えることができる。

6.3 考察 3：特定の p の値のときのシミュレーションについて

図 10～図 15 のシミュレーション結果を見てみる。

まず上側の極座標系について、位相同期している脚のペアが、時間推移とともに変化している事がわかる。特に図13と図14を比較すると対角同期である歩容Aから前後同期である歩容Bに遷移していることがわかる。また、図14と図15を比較すると、考察1で述べたような位相差の収束現象を確認することができる。

また、下側のグラフの左上のグラフについてであるが、このグラフは分岐の微分方程式(37)のグラフである。赤い点は安定平衡点、白抜き赤い点が不安定平衡点、青い点が実際の ω_1 の値である。このグラフは、 p の値に応じて、安定平衡点が1つから2つに変化する様子を示している。特に図13と図14を比較すると、左側の安定平衡点が消滅したことに伴って、実際の ω_1 の値を示す青い点の位置が左側の安定平衡点があった位置から右側の安定平衡点の位置まで大きく変化していることがわかる。

併せて下段グラフ群の左下に位置する ω_1 の時間推移のグラフについても、分岐の影響で値が急激に変化している事がわかる。

下段グラフ群の右上に位置する2重井戸ポテンシャルモデルの図を見ると、ちょうど図12に示した $p=0$ のとき、きれいな2つの対称な谷を持つことが見える。また、図13と図14を比較すると、実際の ω_1 の値を示す青い点が右側の谷に向かって山を転がるように落ちていく様子が見て取れる。

7. 結論

本研究では、4脚ロボットの歩容遷移を実現するために、2重井戸ポテンシャルモデルに基づく分岐現象を利用した歩容遷移手法を提案した。提案手法では、まず歩容生成のための結合係数 k_{ij} と $\delta\omega_{ij}$ を計算し、次に2重井戸ポテンシャルモデルに基づいて、歩容遷移のための分岐パラメータ p を変化させ ω_1 の値を生成しながら、先に求めていた $\delta\omega_{ij}$ を用いて他の脚の固有角振

動数を計算し、その結果を可視化した。シミュレーションの結果、歩容Aから歩容Bへの遷移が実現できることが確認できた。また、分岐図から、分岐現象が可逆ではなくヒステリシス現象が起きていることがわかった。今後の課題として、逆向きの歩容遷移のシミュレーションでの検証や、目標固有角振動数 $\omega_{1_A}^*$, $\omega_{1_B}^*$ の値の裏付け、分岐点 p_2 を超えたときの $\delta\omega_{ij}$ の値の自律的な遷移の手法の検討などが挙げられる。

参考文献

- 1) 木村浩：ロコモーション・パターン創発研究の現状と今後の展望；日本ロボット学会誌, vol.41, No.3, pp.217-222 (2023)
- 2) 大脇, 石黒：ミニマルなCPGモデルから探る四脚動物の脚間協調メカニズム；計測と制御, vol.54, No.4, pp.272-277 (2015)
- 3) 大脇大：動物の歩容遷移を再現する4脚ロボット；日本ロボット学会誌, vol.37, no.2, pp.126-131 (2019)
- 4) 木村, 張：脚式移動におけるCPG(Central Pattern Generator)の役割—適応的な歩行・走行の統一的生成に向けて—計測と制御, vol.44, no.9, pp.602-608 (2005)
- 5) 木村, Christophe, 古殿：リズムと歩容を自律生成する4脚ロボット制御機—ネコ・後2脚步行-走行遷移のシミュレーション—日本ロボット学会誌, vol.42, no.10, pp.1015-1026 (2024)
- 6) 奥平, 村松：スチュアート・ランダウ方程式を用いた結合振動子による歩容生成；システム制御情報学会論文誌, vol.38, no.8, pp.167-176 (2025)
- 7) Steven H. Strogatz：非線形ダイナミクスとカオス；丸善出版 (2015)
- 8) 桑村雅隆：パターン形成と分岐理論；共立出版 (2015)
- 9) 郡, 森田：生物リズムと力学系；共立出版 (2011)
- 10) 蔵本由紀：リズム現象の世界（新装版）；東京大学出版会 (2023)