

格子状の結合振動子における大域的挙動の解析

Analysys of global behavior in lattice-shaped coupled oscillators

○廣瀬珠立*, 村松銳一*

○ Shuri Hirose*, Eiichi Muramatsu*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード : 結合振動子 (coupled oscillators), 同期現象 (synchronization), テンソルネットワーク
(tensor network)

連絡先 : 〒992-8510 米沢市城南町4-3-16 山形大学大学院理工学研究科機械システム工学専攻
村松銳一, Tel.: (0238)26-3327, Fax.: (0238)26-3327, E-mail: muramatu@yz.yamagata-u.ac.jp

1. 研究の背景と目的

神経細胞のモデリングにおいて、多数の振動子をネットワークとして結合したモデルが用いられる。多数の振動子の同期現象の解析は工学、脳神経科学などさまざまな分野で興味深くかつ重要な研究テーマとなっている。

振動子の数が多く、一つ一つが確率的なゆらぎをもつ場合、振動子全体の系の統計的な性質が現れる。本研究ではこのような結合振動子の大域的な性質をイジング模型と同様な手法によって解析する。

具体的には、近年統計力学や計算物理学の分野で発展進んでいるテンソルネットワーク (Tensor Network: TN) 法を用いる。従来のモンテカルロ法や微分方程式の数値積分では、システムサイズが増大すると計算コストが指数関数的に増大する「次元の呪い」や、確率的な揺らぎによる「符号問題」等の課題があった⁴⁾。これに対し TN 法は、特異値分解 (SVD) に基づく情報圧縮と、実空間くりこみ群 (Renormalization Group) の

考え方を組み合わせることで、大規模な系の分配関数や物理量を高い精度かつ低コストで計算可能とする^{1, 3)}。

本稿では、格子状に配置された結合振動子系の同期現象を記述する蔵本モデルに対し、テンソルネットワークを適用する手法を提案する。特に、テンソル繰り込み群 (TRG) を用いて、期待値を線形補間させることで、動的に秩序パラメータを推定するアルゴリズムを構築し、従来の時間発展シミュレーションと比較して、その計算精度と効率性を検証することを目的とする。

2. テンソルネットワーク

2.1 テンソルの定義と図的表現

テンソルネットワーク法を理解するための基礎として、まず「テンソル」の概念について説明する。物理や数学において、スカラー、ベクトル、行列はそれぞれ0階、1階、2階のテンソルとして統一的に扱うことができる。一般に、 k

個の添字（インデックス）を持つ多次元配列を k 階のテンソルと呼ぶ。

TN では、これらを図形的に表現する（図 1）。テンソルを「頂点（ノード）」とし、そこから伸びる「足（エッジ）」を添字に対応させる。足の本数がそのままテンソルの階数（ランク）を表す。

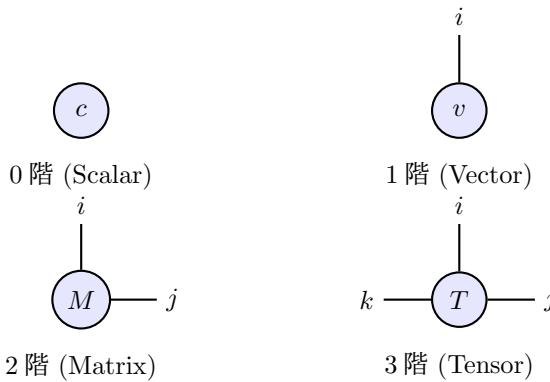


Fig. 1: 各階数のテンソルの図的表現。上段は 0 階と 1 階、下段は 2 階と 3 階を示す。

複数のテンソル間で共通の添字を持つ成分同士を掛け合わせ、その添字について総和をとる操作を「縮約（Contraction）」と呼ぶ。統計力学における格子模型の分配関数 Z は、各格子点に定義された局所的なテンソル T_{ijkl} が、隣接する格子点同士で全ての添字について縮約されたものとして計算される。

$$Z = \text{Tr} \prod_x T_{i_x j_x k_x l_x} \quad (1)$$

2.2 テンソル繰り込み群 (TRG)

大規模なネットワークの縮約を厳密に行うと、計算量は格子サイズに対して指数関数的に増大する。そこで、特異値分解（SVD）を用いた近似アルゴリズムであるテンソル繰り込み群（TRG）を導入する¹⁾。

TRG のプロセスを図 2 に示す。まず、格子点上の 4 階テンソル T を、SVD を用いて 2 つの

3 階テンソル S_1, S_2 に分解する（図 (a)-(b))。

$$T_{lrud} \approx \sum_{\alpha=1}^{D_{cut}} (U\sqrt{\Sigma})_{lu\alpha} (\sqrt{\Sigma}V^\dagger)_{\alpha rd} \quad (2)$$

ここで D_{cut} はボンド次元と呼ばれ、特異値の大きい方から D_{cut} 個を残すことで情報を圧縮する。次に、隣接する 4 つのテンソルを正方形状に縮約することで、新しい粗視化されたテンソル T' を生成する（図 (c))。この操作により格子間隔は $\sqrt{2}$ 倍、格子点数は $1/2$ になる。これを繰り返すことで、巨大な系全体の分配関数や期待値を $O(\log N)$ の計算ステップで求めることができる。

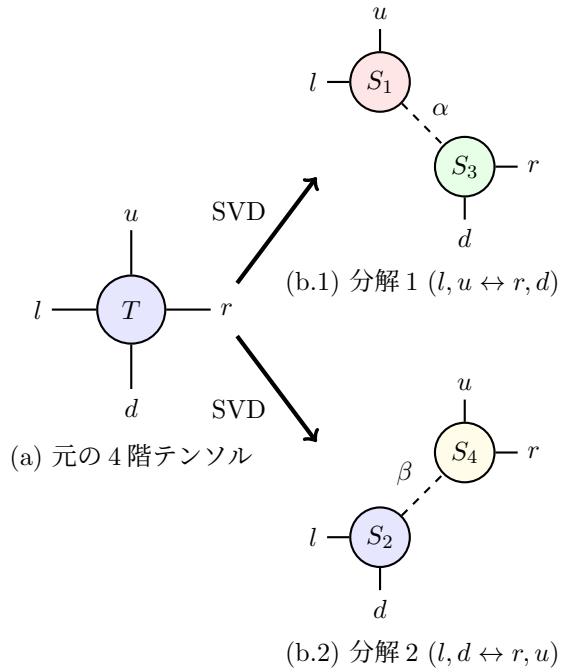


Fig. 2: TRG におけるテンソルの分解と粗視化のプロセス。(a) の 4 階テンソルを 2 通りの方法で SVD 分解し (b.1, b.2)、得られた 4 つの 3 階テンソル (S_1, S_2, S_3, S_4) を組み合わせて縮約することで、格子上のテンソル T' を構築する。

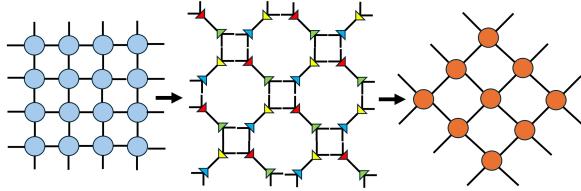


Fig. 3: テンソルネットワークの粗視化による変化. 1つのテンソルを2つの3階テンソルに分解し, 4つの4階テンソルから新しいテンソル T' を作成する.

3. 同期現象と数理モデル

3.1 蔵本モデル

N 個の結合振動子の位相 θ_i のダイナミクスは, 以下の藏本モデルで記述される⁶⁾.

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j \in \Lambda_i} K_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (3)$$

ここで ω_i は各振動子の固有角振動数, K_{ij} は振動子間の結合強度, Λ_i は振動子 i に結合している隣接振動子の集合である. 本研究では外場を含まない自律系を扱う. 結合は2次元正方格子上の最近接 ($K_{ij} = K$) とする.

3.2 秩序パラメータ

系全体の同期の程度を定量的に評価するためには, 以下の秩序パラメータの振幅 $R(t)$ を用いる⁵⁾.

$$z(t) = R(t)e^{i\Theta(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \quad (4)$$

ここで $z(t)$ は複素秩序パラメータであり, その絶対値 $R(t)$ が 1 に近いほど同期が強く, 0 に近いほど非同期であることを示す.

3.3 数値計算の初期条件とダイナミクス

本研究におけるシミュレーションでは, 蔵本モデルの初期状態として, 各振動子の位相 $\theta_i(0)$

を $[0, 2\pi)$ の範囲の一様乱数で与えた.

$$\theta_i(0) \sim U(0, 2\pi) \quad (5)$$

これは, 時刻 $t = 0$ において系が完全な非同期状態 (秩序パラメータの振幅 $R \approx 0$) にあることを意味する. また, 各振動子の固有角振動数 ω_i は, 平均 $\mu = 1.0$, 標準偏差 $\sigma = 0.2$ の正規分布に従うものとした.

$$\omega_i \sim \mathcal{N}(1.0, 0.2^2) \quad (6)$$

この固有振動数のばらつき σ が同期を妨げるノイズとしての役割を果たす.

時間発展に伴い, 結合強度 K が臨界値を超えていれば, 系は自発的に対称性を破り, 特定の位相周りへの集中 (同期) を開始する. 複素秩序パラメータ $z(t)$ の挙動は, 初期の原点付近 ($z \approx 0$) から, 振幅 R を増大させつつ回転する渦巻き状の軌道を描き, 最終的に一定の半径を持つリミットサイクル (定常同期状態) へと収束する.

4. テンソルネットワークによる解析手法

本章では, 蔵本モデルの秩序パラメータの振幅 $R(t)$ をテンソルネットワークに対応づけ, TN を用いて統計的な期待値として計算するための具体的な数式変形を詳述する. TN は多くが 2 次元イジングモデルへの適用を用いたものが多く, 本稿の立式に関しても, 2 次元イジングモデルにおける式をもとに展開していく.

4.1 TN におけるハミルトニアンの定義

結合強度 K が十分に大きい場合, 式 (3) の相互作用項はハミルトニアン H に対応する. 本研究では外場のない系を扱っているため, ハミルトニアンは相互作用項のみで記述される.

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (7)$$

ここで $\langle i, j \rangle$ は隣接ペアを表す。この系の分配関数 Z は、全スピン配置 $\{\theta\}$ に対するボルツマン因子の経路積分で与えられる。

$$Z = \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \prod_k \frac{d\theta_k}{2\pi} \times \exp \left(\beta J \sum_{\langle i, j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \right) \quad (8)$$

4.2 ベッセル関数展開と打ち切り誤差の制御

分配関数をテンソルネットワーク形式に変換するため、リンク項（相互作用項）の指數関数をフーリエ級数展開する。一般に、周期関数 $f(\theta)$ はフーリエ係数 c_n を用いて $f(\theta) = \sum_n c_n e^{in\theta}$ と展開できる。本モデルにおけるリンク項 $e^{x \cos \theta}$ ($x = \beta J$) に対してこの展開を適用すると、係数は第1種変形ベッセル関数 $I_n(x)$ で与えられる。

$$e^{x \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) e^{in\theta} \quad (9)$$

ここで、整数 n はリンク上の状態を指定する量子数（角運動量モード）に対応する。

数値計算において無限和を取り扱うことは不可能であるため、この総和は係数 $I_n(x)$ の値が十分に小さくなるある値 m_{\max} で打ち切る必要がある。

$$e^{x \cos \theta} \approx \sum_{n=-m_{\max}}^{m_{\max}} I_n(x) e^{in\theta} \quad (10)$$

このカットオフ m_{\max} の決定には、以下の物理的背景が重要となる。結合強度 $x = \beta J$ が大きい場合、位相差 θ の分布は 0 付近に鋭く集中する（強い同期状態）。フーリエ解析の原理により、空間的に急峻なピークを持つ関数を再現するためには、高周波成分（大きな $|n|$ ）までの重ね合わせが必要となる。逆に、 m_{\max} が不足していると、相互作用のピークが鈍り、実効的な結合強度が低下したような誤った結果を招くことになる。したがって、初期テンソルのボンド

次元 $D_{\text{init}} = 2m_{\max} + 1$ は、対象とする系の結合強度に応じて適切に設定する必要がある。

次に、ある格子点における角度積分に注目する。積分対象は、その格子点に接続するリンクからの寄与と、その格子点の状態を指定する位相因子 $e^{-in\theta}$ の積であるとする。式 (9) を代入すると、積分は以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(x) e^{im\theta} \right) e^{-in\theta} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(x) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i(m-n)\theta} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、積分と総和を入れ替えた。右辺の積分項は、直交性によりクロネッカーのデルタとなる。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i(m-n)\theta} = \delta_{m,n} \quad (12)$$

この積分操作は「モード選別」として機能する。すなわち、任意の整数 n, m に対して、無限和 \sum の中で $m = n$ となる項だけが生き残り、それ以外は 0 となる。したがって、総和は $\delta_{m,n}$ によって 1 項に縮約される。

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(x) \delta_{m,n} = I_n(x) \quad (13)$$

この原理を 2 次元格子の各サイトに適用する。サイト i には上下左右の 4 つのリンクが接続しており、それぞれのリンク変数を n_l, n_r, n_u, n_d とする。各リンクからの寄与を集めて積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_i}{2\pi} \left(e^{in_l \theta_i} e^{in_r \theta_i} e^{in_u \theta_i} e^{in_d \theta_i} \right) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_i}{2\pi} e^{i(n_l + n_r + n_u + n_d)\theta_i} \\ &= \delta_{n_l + n_r + n_u + n_d, 0} \end{aligned} \quad (14)$$

となる。この結果は、各格子点において「流入する整数の総和がゼロになる」という**保存則**が満たされる配置のみが分配関数に影響することを意味している。以上より、各格子点上に配置すべき 4 階のテンソル A_{lrud} の成分は、リンク重み $\sqrt{I_n}$ を各足に分配して以下のように定

義される。

$$A_{lrud} = \sqrt{I_{|l|} I_{|r|} I_{|u|} I_{|d|}} \cdot \delta_{l+r+u+d, 0} \quad (15)$$

この局所テンソル A を格子状に接続し、TRG 法で全縮約をとることで、分配関数 Z を効率的に計算できる。

4.3 秩序パラメータの推定アルゴリズム

TN を用いて、動的な秩序パラメータの振幅 $R(t)$ を推定する方法について説明する。本手法では、TN の特性である「有効場近似」を応用し、全系の分配関数の縮約計算を個々の振動子に対する局所的な期待値の計算に帰着させる。

4.3.1 有効場に対する応答関数の構築

まず、様々な仮想的な局所場の強さ h に対して、その環境下にある 1 つの振動子がどれほど位相を揃えようとするかという期待値 $E(h)$ を計算し、関数として保持する。統計力学において、局所場 h 下での期待値は、分配関数に対する比として計算される。

$$E(h) = \langle e^{i\theta} \rangle_h = \frac{\text{Tr}(E'(h))}{\text{Tr}(A(h))} \quad (16)$$

ここで $A(h)$ は通常のボルツマン重みを持つテンソルであり、 $E'(h)$ は位相因子 $e^{i\theta}$ を挿入した不純物テンソルである。この計算を $h \in [0, h_{\max}]$ の範囲で離散的に行い、関数 $E(h)$ の形状を記録しておく。これにより、シミュレーション中に毎回 TN 縮約を行う必要がなくなり、計算コストを削減できる。

4.3.2 局所場による動的推定

時間発展シミュレーションの各ステップ t において、各振動子 i が周囲の振動子から受ける局所的な平均場 $H_i(t)$ を計算する。

$$H_i(t) = \frac{1}{|\Lambda_i|} \sum_{j \in \Lambda_i} e^{i\theta_j(t)} = h_i e^{i\phi_i} \quad (17)$$

ここで $h_i = |H_i(t)|$ は局所場の強さ、 ϕ_i はその平均的な位相方向である。本手法では、各振動子がこの局所場 h_i によって z_i を推定する。具体的には、事前に作成した応答関数 $E(h)$ を h_i で参照して振幅を求め、それを局所場の方向 ϕ_i に合わせて回転させる。

$$z_i \approx E(h_i) \cdot e^{i\phi_i} \quad (18)$$

最終的に、全振動子の推定値の平均をとることで、系全体の振幅 $R(t)$ を得る。

$$R(t) = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \right| \quad (19)$$

4.4 数理モデル間の対応とパラメータ決定

本研究では、微分方程式からなる蔵本モデルを、統計力学的な方法（TN 法）を用いて解析している。両者の物理的・数理的な対応関係を明確にするため、それぞれの方程式を比較する。

まず、蔵本モデルにおける位相 θ_i の時間発展（式(3)再掲）は以下で与えられる。

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_j \underbrace{K \sin(\theta_j - \theta_i)}_{\text{決定論的な引き込み力}} \quad (3)$$

一方、TN において、各振動子が従う確率分布 $P(\{\theta\}) \propto e^{-\beta H}$ は、ハミルトニアンの勾配から導かれる。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(\beta H)}{\partial \theta_i} &= -\frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(-\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \right) \\ &= \sum_j \underbrace{\beta J \sin(\theta_j - \theta_i)}_{\text{確率的な復元力}} \end{aligned} \quad (20)$$

この 2 つの式を対比すると、以下の対応関係が見出せる。

- 相互作用項:** 蔵本モデルの結合強度 K は、実効的な結合定数 βJ に対応する。どちらも正弦関数 (sin) の形で位相差を 0 にしようとする復元力として働く。

- **乱雑さ**: 蔵本モデルにおける固有振動数 ω_i のばらつき（同期を妨げる要因）は、XY 模型における温度 $1/\beta$ （熱ゆらぎ）の効果に対応する。

このように、両者は数理的に同等な相互作用形式を持つが、動的な周波数引き込みと静的な熱平衡状態という物理的背景の違いがある。そのため、単純に $\beta J = K$ とするのではなく、「藏本モデルの $K = 2.5$ に相当する実効的な βJ 」を同定する必要があり。本研究では、 $\beta J = 3.2$ を採用した。

また、この強結合状態（大きな βJ ）を正確に計算するために、TN の近似パラメータを以下のように決定した。

- **フーリエモード数 (m_{\max})**: 相互作用項 $e^{\beta J \cos \theta}$ の展開において、 $\beta J = 3.2$ のように値が大きいと分布が鋭くなるため、高次の周波数成分が無視できなくなる。係数 $I_n(\beta J)$ の減衰を考慮し、十分な精度を保つために $m_{\max} = 12$ とした。
- **ボンド次元 (D_{cut})**: 同期状態では系全体に長距離相関が生じるため、テンソルを持つ情報量（エンタングルメント）が増大する。これを損なわないよう、ボンド次元を $D_{cut} = 32$ （または 40）と大きめに設定した。

5. シミュレーション結果と考察

提案手法の有効性を検証するため、 64×64 の正方格子において、オイラー法による積分（Baseline）と提案手法（TN 法）の比較を行った。結合強度は $K = 2.5$ とした。TN の計算条件として、ボンド次元は $D_{cut} = 40$ 、フーリエモード数は $m_{\max} = 12$ とし、十分な計算精度を確保した。藏本モデルにおける振動数のばらつきは、テンソルネットワークにおける確率的なゆらぎと物理的に対応する。本研究では、強い同期を

示すため $\beta J = 3.2$ を係数として採用した。また、TN 法において、 D_{cut} が重要なパラメータとなることを示すため、 $D_{cut} = 32$ における厳密解との比較も行った。

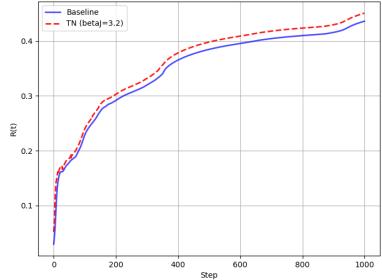


Fig. 4: 秩序パラメータの振幅 $R(t)$ の時間変化

図 4 に秩序パラメータの振幅 $R(t)$ の時間変化を示す。TN 法による推定値（赤線）は、厳密解である Baseline（青線）の挙動と極めてよく一致しており、非同期状態から同期状態への相転移のダイナミクスを正確に捉えていることがわかる。定常状態 ($t = 1000$) において、Baseline が $R \approx 0.44$ であるのに対し、TN 法は $R \approx 0.45$ という値を得た。

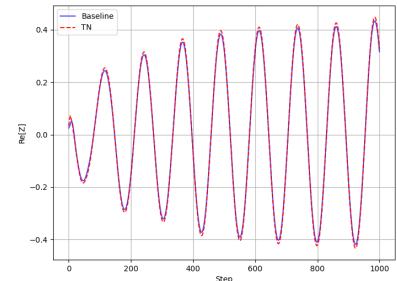


Fig. 5: 複素秩序パラメータ実部 $\text{Re}[Z(t)]$ の比較

また、図 5 に複素秩序パラメータの実部 $\text{Re}[Z(t)]$ の時間変化を示す。TN の軌道は、厳密解との振動の位相や周期がよく一致していることから、提案手法は単に同期の強さだけでなく、集団振動のリズムについても近い値正確に推定出来ているといえる。

D_{cut} の変化における計算精度についても比較

すべく、以下では、厳密解とそれぞれ $D_{cut} = 32, 40$ の場合における複素秩序パラメータ $Z(t)$ 軌道を示す。

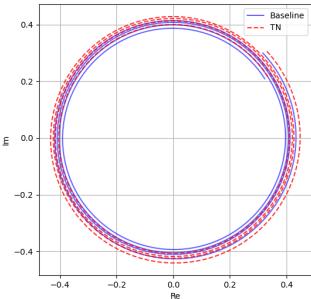


Fig. 6: 複素秩序パラメータ $Z(t)D_{cut} = 40$ の複素平面上の軌道。

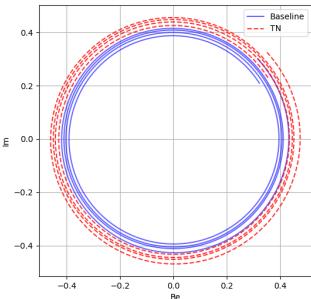


Fig. 7: 複素秩序パラメータ $Z(t)D_{cut} = 32$ の複素平面上の軌道。

図 6 に示す複素平面上の軌道においても、TN 法は厳密解の描く円軌道を精度よくトレースしている。一方で、図 7 に示す方は、厳密解と比較し、少し広い振幅を持つことが分かる。精度評価として、二乗平均平方根誤差 (RMSE) を算出した結果を以下に示す。

$$\text{RMSE} \approx 1.3 \times 10^{-2} \quad (21)$$

この誤差は、秩序パラメータの変動幅に対して十分小さく、提案手法が大規模な結合振動子系の解析において有効な代替手法となり得ることを示している。しかし、 D_{cut} の値によって、計算精度は変化するため計算時間も含め、適切な D_{cut} の値を決める必要がある。

6. まとめ

本研究では、格子状結合振動子系に対し、テンソルネットワークを用いた解析手法を適用した。外場のない蔵本モデルにテンソルネットワークを適用し、フーリエ級数展開とベッセル関数展開、保存則に基づいたテンソル表現を導出した。シミュレーションの結果、提案手法は従来の時間発展法と比較して、TRG によってコストを抑えつつ高い精度で同期現象を再現できることが示された。しかし、本稿のような動的な推定には、統計力学的な静的期待値に対して、線形補間を行うための、コストは大きくなるため、その部分は検討する必要があると感じる。なお、本研究で用いたテンソル表現は、正方格子における 2 次元イジングモデルの分配関数やハミルトニアの定義に基づき導出したが、格子場においては局所的な 4 階テンソルについて、展開し模型自由度に対して積分を実行することで TN の適用が可能であることが示せた。これは分配関数の一般的なテンソルネットワーク表現（文献 4) の式 (13) 等) と整合しており、 βJ を展開係数の重みとして扱うことで、様々な統計モデルへ応用可能な枠組みとなっている。

参考文献

- 1) 西野友年：テンソルネットワーク形式とその発展；物性研究, 103-5, 475-510 (2015)
- 2) 西野友年：テンソルネットワークの基礎と応用；サイエンス社, (2021)
- 3) 大久保毅：テンソルネットワークによる情報圧縮とフラストレート磁性体への応用；物性研究, Vol.7, No.2, 072209 (2018)
- 4) 武田真滋：テンソルネットワークで格子場理論を計算する；日本物理学会誌, Vol.77, No.3, pp.136-144 (2022)
- 5) 中尾裕也：結合位相振動子系の安定性と同期現象；計測と制御, Vol.55, No.4, pp.335-342 (2016)
- 6) 蔵本由紀：リズム現象の世界（新装版）；東京大学出版会 (2023)