計測自動制御学会東北支部 第 356 回研究集会 (2025.12.10)
資料番号 356-13

制御系の表現に対する幾何学的な解析力学からのアナロジーによる再定式化

Reformulation of Control System Expressions via Analogies from Geometric Mechanics

◯ 片野裕貴 *, 村松鋭一 *

◯Hiroki Katano*, Eiichi Muramatsu*

* 山形大学

*Yamagata University

キーワード：

連絡先： 〒 992-8510 山形県米沢市城南町 4-3-16 山形大学大学院 理工学研究科 機械システム工学専攻 村松研究室 村松鋭一, Tel.: (0238)26-3327, Fax.: (0238)26-3327, E-mail: muramatu@yz.yamagata-u.ac.jp

非線形制御理論は線形制御系での理論を非線形空間に拡張することで発展してきた．線形ベクトル空間に基づく制御理論を非線形に拡張する際，状態が遷移する軌道は線形空間が張る平面上ではなく，非線形な空間が張る曲面である多様体上に移った．これにより多彩な表現が可能になり，微分幾何学や力学系の理論を用いた制御理論が提唱されてきた [1]．

しかし一方で，非線形制御理論においては線形制御理論の場合と比較すると複雑化と細分化が進み，それらの複雑さが実システムへの応用を阻んでいる [2]．このため，非線形制御系を記述する表現形式の簡潔化は今後の非線形制御理論において解決が必須となる課題である．

本研究の目的は，このような課題に対して，制御系におけるシステムに対する簡潔な表現形式を提案することである．理論を統一的かつ簡潔に表し，非線形制御系のもつ要素を端的に表現することは，非線形制御理論の応用の可能性を広げるとともに，システムの本質的かつ大域的な性質を明らかにするという科学的意義がある [3]．

本研究では，解析力学における Hamilton の原理のアナロジーとして最適制御理論を捉えることで，微分幾何学の観点から最適制御系を簡潔に記述する表現を提案する．特に非線形制御理論の中でもプレハミルトニアンといわれる不変量が存在する最適制御理論に焦点を当てる．

多様体上の微分幾何学からシステムの挙動を考える視点はこれまでの非線形制御理論と同様である．しかし本研究は幾何学的な解析力学で用いられる微分形式を用いた正準方程式の表現をひとつの指針として，最適制御系を再定式化するところに特色がある．

1　物理系における変分原理と微分形式

本論文では，解析力学の変分原理のアナロジーによってシステムの理論を考える．この章ではまず解析力学における変分原理とその微分形式による表現 [4] について確認する．

1.1　変分原理

解析力学では変分原理により運動方程式が導出される．この節では変分原理の導入と Euler-Lagrange 方程式の導出について扱う．

まず，変分原理を扱う前に実現されうる運動が時間の径数によってたどる曲線を表す作用を考える．作用はつぎのように定義される．

定義 1.1 (作用 [5])**.** 時刻 t において，系の状態が座標 q により $q, \dot{q}, t$ で与えられ，ある状態 $(q_0, \dot{q}_0, t_0)$ から別のある状態 $(q_1, \dot{q}_1, t_1)$ へと状態が遷移するシステムがあるとする．このとき，時刻 t_0 から t_1 への状態推移に対して作用 S はラグランジアン L を用いて，

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \tag{1}$$

で与えられる．

力学の運動方程式は作用の停留条件，すなわち作用の変分が 0 となることから導出される．これは変分原理としてつぎのように述べられている．

定理 1.1 (Hamilton[4])**.** 作用 S について S が停留値をとる，すなわち，変分 $\delta S[q]$ において，

$$\delta S[q] = 0 \tag{2}$$

が成り立つとき，解となる運動曲線として Euler-Lagrange 方程式が導出される．

ここで，δS は，停留値をとる作用 S と境界条件が等しく S から少しずれた作用 S' を考えることによって得られる変分である．S' が S へ近づくほど δS は小さくなり，変分が 0 となるとき，S' は S に一致する．実現される運動となる S に対応する運動曲線を C，S' に対応する運動曲線を C' とする．

運動曲線 C に対応する状態量を q，C' に対応する状態量を q' とすると，q' は次のように表される．

$$q'(t) = q(t) + \delta q(t) \tag{3}$$

ただし，

$$\delta q(t_0) = 0, \quad \delta q(t_1) = 0, \quad \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q(t) \tag{4}$$

このときの変分 δS は，

$$\begin{aligned}
\delta S[q] &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt \\
&\quad + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_0}^{t_1} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt
\end{aligned} \tag{5}$$

と表される．Hamilton の原理は作用の停留条件，すなわち変分 δS が 0 となるような運動が実現されるとするものであり，実現される軌道はつぎのようになる．

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{6}$$

これは Euler-Lagrange 方程式と呼ばれる．

ここまで，境界条件が等しい条件について考えた．本論文ではより一般化した変分原理を参考にするため，Fig.のように時間による境界条件を固定しない変分を考える [4]．このとき，変分 δq は q の関数形自身の変分 $\delta^* q$ を用いて，つぎのように表される．

$$\delta q(t) = \delta^* q(t) + \dot{q}(t) \delta t \tag{7}$$

ただし，

$$\delta^* \dot{q}(t) = \frac{d}{dt} \delta^* q(t) \tag{8}$$

とする．

このとき変分 δS は，つぎのようになる．

$$\begin{aligned}\delta S[q] &= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q},t)dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\delta^* q dt \\ &\quad + \left[L(q,\dot{q},t)\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta^* q\right]_{t_0}^{t_1} \qquad (9)\end{aligned}$$

ここで，(9) 式の第 1 項は (6) 式より 0 となる．

$$\delta S[q] = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L\right)\delta t\right]_{t_0}^{t_1} \quad (10)$$

が成り立つ．(10) 式は経路上では経路 C の境界値のみで決まり，δS が積分可能であることを示している．したがって，変分が積分可能であるための必要十分条件は経路上で Lagrange 方程式が成り立つことである．(10) 式の右辺に関して，

$$\Theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L\right)\delta t \quad (11)$$

とすると，(10) 式はつぎのように書ける．

$$\delta S[q] = \Theta(t_1) - \Theta(t_0) \quad (12)$$

(11) 式は微小変位 $\delta S[q]$ と微小時間 δq に関する 1 次形式であり，それを用いて変分を書き表わしたものが (12) 式である．この (11) 式と (12) 式による変分の表現は次節での基本 1-形式と呼ばれる微分形式の基礎となるものである．

1.2 基本 1-形式と微分形式による変分原理

1.1 節で述べた変分原理に対し，(12) 式に基づくより一般化した変分原理をこの節で述べる．この中で基本 1-形式を導入する．

時刻 $t \in [t_0, t_1] \in \mathbb{R}$ において，多様体 N 上の点 $q \in N$ を考える．多様体 N を配位空間とし，その接束 TN を状態空間，余接束 T^*N を相空間として考える．(11) 式の δq，δt に対応し，微分形式 $dq \in \Gamma(T^*N)$，$dt \in \Gamma(T^*\mathbb{R})$ を考える．ここで，$\Gamma(T^*N)$ は T^*N の切断，$\Gamma(T^*\mathbb{R})$ は $T^*\mathbb{R}$ の切断である．この余接束の切断は微分形式全体の集合を表している．$q \in N, t \in \mathbb{R}$ であることから，考えるべき空間は $N \times \mathbb{R}$ であり，これを拡大配位空間という．ラグランジアン L を $L : TN \to \mathbb{R}$ の関数とし，これと dq，dt によって基本 1-形式 Ω をつぎのように定義する．

定義 1.2 (基本 1-形式 [6)4)])**.**

$$\Omega = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dq - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L\right)dt \quad (13)$$

を基本 *1*-形式という．

$\phi : TN \to T^*N$ をルジャンドル変換 [7)] としたとき，この基本 1-形式は後に述べる正準 1-形式 ${}_*\Omega \in \Gamma(T^*N \times \mathbb{R})$ をルジャンドル変換の引き戻し ϕ^* を用いて引き戻した $\Gamma(TN \times \mathbb{R})$ 上の関数である．$TN \times \mathbb{R}$ を拡大状態空間，$T^*N \times \mathbb{R}$ を拡大相空間という．

ここで基本 1-形式 Ω と作用 S との関係を整理しておく．(12) 式に対応する変分 δS を (13) 式の Ω を用いて

$$dS = \Omega(t_1) - \Omega(t_0) \quad (14)$$

と定義する．一方，(10) 式の可積分性より，

$$\Omega(t_1) - \Omega(t_0) = \int_C d\Omega \quad (15)$$

となる．微分形式を用いた Hamilton の原理は，

$$dS = 0 \quad (16)$$

と表されるため，(14) 式と (15) 式より，

$$\int_C d\Omega = 0 \quad (17)$$

すなわち，

$$d\Omega = 0 \quad (18)$$

となる．

以上をつぎの定理としてまとめる．

定理 1.2. [4] 微分形式により，運動曲線 C 上での変分原理は

$$dS = 0 \tag{19}$$

で表され，これを満たす基本 1-形式を用いた方程式は

$$d\Omega = 0 \tag{20}$$

で与えられる．

一般によく知られている解析力学は，作用 S を定義するラグランジアン L を用いて (6) 式を導出するものである．これよりも抽象度を高くした上記の定理では，作用 S に対応する微分形式 dS を考え，これを定義する基本 1-形式 Ω が運動方程式を決定するものとして存在している．

個々の系の運動方程式を具体的に求めるときには，(13) 式のようにラグランジアン L を用いて書き表されるが，運動を記述する基礎は (20) 式のように基本 1-形式と呼ばれる微分形式にあると考える．本論文では制御系におけるシステムの表現を (20) 式と同様な微分形式の方程式として与えることを目的とする．

1.3 正準方程式

解析力学における運動方程式には 1.2 節までのラグランジアン L を用いる形式とともに，ハミルトニアン H を用いる形式もある．この形式は系が持つ対称性が分かりやすく，シンプレクティック性などの代数的な利点が存在する．この節では，ハミルトニアン形式に対応する基本 1-形式として正準 1-形式を導入する．

局所座標 q で表される配位空間 N 上の運動がラグランジアン L を用いて表されるのに対し，ハミルトニアン形式においては，局所座標 q とともにその時間微分 $\dot{q}$ に共役な関数 p の連立 1 階微分方程式で表される．これは正準方程式と呼ばれ，力学系の状態は q と p の相空間で表される．

配位空間 N 上の曲線 C が与えられたとき，余接束 T^*N 上の曲線 ${}_*C$ を

$${}_*C : q = q(t), \quad p = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \tag{21}$$

で定義したとき，この曲線 ${}_*C$ を曲線 C の持ち上げ (lift) といい，

$$\int_{{}_*C} {}_*\Omega \longrightarrow \int_C \Omega \tag{22}$$

として表される．ここで (21) 式の p を用いて，ハミルトニアン H をつぎのように定義する．

$$H = pq - L \tag{23}$$

このとき，ハミルトニアン H は $H : T^*N \to \mathbb{R}$ の関数であり，(13) 式で表されていた基本 1-形式は，(23) 式のハミルトニアン H を用いて，

$${}_*\Omega = pdq - Hdt \tag{24}$$

と変換される．${}_*\Omega \in \Gamma(T^*N \times \mathbb{R})$ であり，変分原理を満たす方程式は，

$$d_*\Omega = 0 \tag{25}$$

と正準 1-形式を用いて表される．このようにハミルトニアンを用いる場合においても，(25) 式のようにある種の微分形式として正準 1-形式が運動を記述する力学の基礎となる．制御理論においては最適制御系がハミルトニアンを用いて記述できることから本論文ではこの正準 1-形式を最適制御系の記述に用いる．

なお，(24) 式のような具体形を用いることにより，よく知られたハミルトンの運動方程式がつぎのように導出される．(24) 式を (25) 式に代入すると，

$$\begin{aligned} d_*\Omega &= dp \wedge dq - dH \wedge dt \\ &= dp \wedge dq - \frac{\partial H}{\partial q} dq \wedge dt \\ &\quad - \frac{\partial H}{\partial p} dp \wedge dt \\ &= \left(dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right) \wedge \left(dq - \frac{\partial H}{\partial \psi} dt \right) \end{aligned} \tag{26}$$

であり，これと (25) 式から正準方程式

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{27}$$

を得ることができる．

2　制御系における変分原理と微分形式

前節までの物理系における微分形式を利用し，この節では最適制御系を基本 1-形式を用いて表現する．

2.1　Pontryagin の原理と制御系への応用

前節までで述べた解析力学における知見から，システムを記述するために Pontryagin の原理を通して制御系へと適用していく．

制御系の状態は配位空間 M において状態変数 $q \in M$ と表されるとする．M の次元を n とする．時間 t とともに q の位置が M 上を動くことから状態の推移を $q(t)$ として表す．$q(t)$ を制御する制御入力 $u(t)$ は区分的に連続であり，閉集合 U に含まれるとする．$q(t)$ を表現する微分方程式，すなわち状態方程式は,

$$\frac{dq}{dt} = f(q(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \tag{28}$$

として表される．

ここでステージコスト $L(q, u, t) \in TM \times \mathbb{R}$ を導入し，この積分値を最小化する最適制御系を考える．

定義 2.1 (評価汎関数 [8])**.** 時刻 $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ のシステムの状態が状態変数を $q \in M$，制御入力を $u \in U$ とし，ある状態 (q_0, u_0, t_0) からある状態 (q_1, u_1, t_1) へと状態が遷移するシステムがあるとする．このとき，評価汎関数 J はステージコスト L を用いて,

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), u(t), t) dt \tag{29}$$

で与えられる [9]．

(29) 式のような評価汎関数 J の形を Lagrange 型という．

定義 2.2 (最適軌道 [8])**.** 評価汎関数 J を最小にするような制御入力 u が存在するとき，その制御入力 $u_o(t)$ を最適制御入力といい，その軌道 $q_o(t)$ を最適軌道という．

この最適制御問題についてつぎが成立する．

定理 2.1 (Pontryagin[8][10])**.** (28) 式における $f(q, u, t)$，および (29) 式における $L(q, u, t)$ に対してそれらと共役であり，任意の $t \in [t_0, t_1]$ において $\psi_0, \psi_i \neq 0$ であるような関数 $\psi, \psi_i \in \mathbb{R}$ を用いてスカラ関数

$$H^*(q, u, \psi_0, \psi_i, t) = \psi_i f_i(q, u, t) - \psi_0 L(q, u, t)$$

を定義する．
つぎの条件が成り立つとき，(29) 式の評価汎関数 J を最小とする最適制御となる．

1) 評価汎関数 J を最小にするような軌道 q_o と制御入力 u_o が存在し,

$$H^*(q_o, u_o, \psi_i) = \min_{u \in U} H(q_o, u(t), \psi_i) \tag{30}$$

2) Lagrange 型の評価汎関数 J において，$t_1 \in [t_0, t_1]$ のとき,

$$\psi = 0, \quad H^*(q_o(t_1), u_o(t_1), \psi_i) = 0 \tag{31}$$

3) 正準方程式

$$\begin{aligned} \frac{dq_o}{dt} &= \frac{\partial H^*(q_o, u_o, \psi_i)}{\partial \psi}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{\partial H^*(q_o, u_o, \psi_i)}{\partial q} \end{aligned} \tag{32}$$

が成立する．

これを Pontryagin の原理といい，この H^* をプレハミルトニアンと呼ぶ.

上記のように Pontryagin の原理を用いて記述される最適制御系に対し，本論文では前節と

同様に正準 1-形式を用いた表現を与える．その考え方は第 1.3 節に倣い，余接束上の ψ を用いてプレハミルトニアン $H^*(q,\psi,u,t)$ を定義し，さらにそれを用いて基本 1-形式を与えるものである．

ここで，(16) 式より，評価汎関数 J に対しても同様に変分 dJ を定義する．このとき，最適制御とはつぎのように新たに定義される．

定義 2.3 (最適制御)**.** システムの状態が遷移する軌道を C_{sys} として，軌道 C_{sys} において，

$$dJ = 0 \tag{33}$$

とするような制御入力 u_o が存在するとき，最適軌道 q_o をとる制御入力 u_o を最適制御という．

これに対し，最適制御系を記述する基本 1-形式を次のように定義する．

定理 2.2. プレハミルトニアンを

$$H^*(q,\psi,u,t) = \psi f(q,u,t) - L(q,u,t) \tag{34}$$

とし，基本 *1*-形式

$$_*\Omega = \psi dq - Hdt \tag{35}$$

を定義する．最適制御系は

$$d_*\Omega = 0 \tag{36}$$

で記述される．

これにより，最適制御系は基本 1-形式を用いて表現された．

3 おわりに

本研究では多様体上の微分幾何学用いて，最適制御系の状態方程式を記述するための方法を提案した．これにより，微分形式を用いることで，システムの状態方程式を簡潔に表現できることを示した．

一方で，本研究では不変量のプレハミルトニアン H が存在するような系を扱ったが，一般の非線形システムで微分幾何学を用いて表現しようとすると難点となる部分が多く存在している．例えば，制御系においてはシステムの可制御性を仮定することが多いが，この仮定は強いものであり，実システムに対して成り立たない場合が多い．また，最適制御系においてはプレハミルトニアン H が不変量として存在することを仮定したが，実システムにおいてはこのような不変量が存在しない場合も多い．さらに，現実のシステムでは外乱やノイズが存在し，これらを考慮した制御系の表現方法も必要となる．

今後はこのような強い仮定に対して細かく問題を切り分け，弱い定義や仮定から積み上げて汎用性が高い制御則や表現方法を考えていきたい．

参考文献

1) A. Isidori: Nonlinear Control Systems - 3rd edition, Springer-Verlag London Limited (1995).

2) 大塚敏之, 中村文一, 赤阪大介, 和田敏裕, 関口和真, 西村悠樹：非線形制御はなぜ普及しないのか, 計測と制御, **61**-2, 146/153 (2022).

3) 大塚敏之：進化しつづける非線形制御理論, 計測と制御, **61**-2, 87/90 (2022).

4) 木村利栄, 菅野礼司：微分形式による解析力学, 吉岡書店 (1988).

5) 中原幹夫：理論物理学のための幾何学とトポロジー I 原著第 2 版, 日本評論社 (2023).

6) 山本義隆, 中村孔一：朝倉物理学大系 1 解析力学 I, 朝倉書店 (1998).

7) 吉村浩明：ラグランジアン系とハミルトニアン系の幾何学的構造 ：解析力学の幾何学的方法への導入 (力学系理論の展開と応用), 数理解析研究所講究録, **1369**, 189/203 (2004).

8) 清水清孝：最適制御の理論と計算法, コロナ社 (1994).

9) 大塚敏之:非線形最適制御入門, コロナ社 (2011).

10) L. S. Pontryagin: Mathematical theory of optimal processes, CRC press (1987).