

非整数階微分によるフレキシブルアームの振動制御

Vibration Control of a Flexible Arm Using Fractional-Order Differentiation

○佐藤陽向, 魚橋慶子

○ Hinata Sato, Keiko Uohashi

東北学院大学 工学部 機械知能工学科

Department of Mechanical Engineering and Intelligent Systems,

Faculty of Engineering, Tohoku Gakuin University

キーワード: 非整数階微分 (Fractional-Order Differentiation), 振動 (Vibration),
フレキシブルアーム (Flexible Arm), PD 制御 (PD Control),
システム同定 (System Identification)

連絡先: 〒 984-8588 宮城県仙台市若林区清水小路 3-1

東北学院大学工学部機械知能工学科

魚橋慶子 E-mail : uohashi@mail.tohoku-gakuin.ac.jp

1 序論

産業用ロボットや宇宙構造物において、先端が柔軟に変形するフレキシブルアームは軽量化・省エネルギー化の観点から広く用いられている。しかし、フレキシブルアームは動作時に先端の振動が生じやすく、精密な位置決めや高速動作を実現するためには振動を手早く抑制する制御が不可欠である。

従来の整数階微分に基づくモデル、すなわちバネ・マス・ダンパ系 (1 階微分, 2 階微分で記述される系) では、ゴムなどの粘弾性材料が持つ複雑な特性—粘性, 履歴効果 (ヒステリシス), 冪乗則的なエネルギー散逸—を十分に表現できない場合がある^{1, 2)}。特に、ゴム材を先端に装着したフレキシブルアームでは、応力と

変位の関係が単純な指数減衰では記述できず、より柔軟な数理モデルが必要となる。

これに対して、非整数階微分 (Fractional-Order Differentiation) を用いたモデル化は、過去の全履歴情報を重み付きで考慮する積分を持つため、粘弾性挙動を簡単な伝達関数で表現できるという利点がある^{3, 4)}。Riemann-Liouville の定義による非整数階微分は

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

であり、 n は α を超える最小の整数、 α は非整数、 Γ はガンマ関数を表す。式 (1) において、 $(t-\tau)^{n-\alpha-1}$ は過去の時刻 τ における状態が現在時刻 t に対して冪乗則的に影響を与えることを意味しており、整数階微分では捉えられない長期記憶を自然に取り込む構造となっている。

本研究ではニトリルゴムシートをフレキシブル要素として装着した QUANSER 社製モータモジュールを実験プラントとして用い、非整数階微分に基づく振動制御の有効性を評価することを目的とする。

2 非整数階微分

2.1 定義

非整数階微分 (Fractional Derivative) には複数の定義が存在する。代表的なものとして、Grünwald–Letnikov (GL) による定義, Caputo による定義, そして Riemann–Liouville (RL) による定義が挙げられる。

GL による定義は整数階の差分商の極限として非整数階微分を構成するもので、数値計算への直接適用がしやすい。Caputo による定義は初期条件として整数階微分値を用いることができるため、物理的な初期値問題との整合性に優れている。本研究では RL による定義を採用した。RL による定義のラプラス変換は (初期条件が零の場合)

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) \quad (2)$$

となるため、 s^α を含む非整数次伝達関数を直接扱うことができ、ボード線図を用いた周波数領域でのシステム同定・設計に適している⁵⁾。

2.2 非整数次システムの周波数応答特性

整数次システムのボード線図において、 $1/s^n$ の積分要素は $-20n$ dB/dec の傾きを与える。一方、非整数次積分要素 $1/s^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) は -20α dB/dec の傾きを持つ。このことから、ボード線図のゲイン特性の傾き a [dB/dec] か

ら、システムの非整数次数を

$$\alpha = -\frac{a}{20} \quad (3)$$

として推定できる。本研究ではこの関係を用いて実験データからシステムの次数を同定した。

3 実験装置および実験方法

3.1 実験装置

本実験で用いたハードウェアおよびソフトウェア構成を表 1 に示す。モータには QUANSER 社製 SRV02 ロータリ・プラント・モジュールを使用した。このモジュールは直流モータと光学式エンコーダを内蔵しており、エンコーダ出力からアーム回転角 (軸位相) をリアルタイムで計測できる。アンプには Volt PAQ-X2, データ収集ボードには Q8-USB を用い、制御ソフトウェアには MATLAB/Simulink を使用した。

表 1: 実験装置一覧

役割	機器名
モータモジュール	QUANSER SRV02
アンプ	Volt PAQ-X2
データ収集ボード	Q8-USB
制御ソフトウェア	MATLAB/Simulink (QUARC)

表 2 に示す仕様のニトリルゴムシートを 2 つ折りにし、重量 25 [g] の金属クリップでアーム先端に固定した。ニトリルゴムは耐油・耐摩耗性に優れ、かつ粘弾性挙動が顕著な材料であるため、非整数階微分モデルの検証に適している²⁾。

表 2: フレキシブル要素（ニトリルゴムシート）の仕様

項目	仕様
材料	ニトリルゴム (NBR)
長さ	500 [mm]
幅	100 [mm]
厚さ	2 [mm]
シート質量	150 [g]
クリップ質量	25 [g]

3.2 実験手順

実験は以下の手順で実施した。

(1) ゴムシートなし・ありの各条件でボード線図を取得し、ゲイン特性を比較する。

(2) ゴムシートありのボード線図を 3 区間の折れ線で近似し、最小二乗法により各区間の傾き a を決定する。式 (3) を用いて非整数次数 α を推定する。

(3) 推定した次数をもとに非整数次伝達関数を構築し、MATLAB/Simulink 上で PD 制御器を含む閉ループブロック線図を作成する。

(4) 等価変換により閉ループ系を 2 次整数次系に変換し、ステップ応答のシミュレーションを実施する。

(5) 同じブロック線図を用いて実機フィードバック制御を行い、シミュレーション結果と比較・考察する。

4 実験結果

4.1 周波数応答計測

システム同定のため、入力電圧 2 [V] でアームに正弦波電圧を入力し加振し、各周波数における出力（軸位相）の振幅を計測した。ゲイン

[dB] は次式で算出した。

$$\text{Gain [dB]} = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{振幅 [rad]}}{\text{電圧 [V]}} \right) \quad (4)$$

計測は (1) ゴムシートなし（素アーム）と (2) ゴムシートあり の 2 条件で実施し、その結果を表 3 および表 4 に示す。

表 3: ゴムシートなし：周波数応答計測結果

周波数 [Hz]	振幅 [rad]	ゲイン [dB]
0.4	1.250	-4.08
0.8	0.600	-10.46
1.6	0.280	-17.08
3.2	0.105	-25.60
6.4	0.035	-35.14
12.8	0.009	-46.94
16.0	0.007	-49.12

表 4: ゴムシートあり：周波数応答計測結果

周波数 [Hz]	振幅 [rad]	ゲイン [dB]
0.4	1.160	-4.73
0.8	0.320	-15.92
1.6	0.270	-17.39
3.2	0.078	-28.18
6.4	0.018	-40.92
12.8	0.0053	-51.54
16.0	0.0046	-52.77

ゴムシートなしの場合は全周波数帯域にわたってほぼ一定の傾きを持ち、概ね整数次系として扱える挙動を示した。一方、ゴムシートありでは低周波域（0.4~0.8 [Hz]）と高周波域（1.6~16 [Hz]）においてゲイン傾きが急峻となり、0.8~1.6 [Hz] の帯域では傾きがほぼ 0 となる共振的な振る舞いが観察された。これらの傾きはいずれも整数次系の -20 dB/dec の整数倍

とは一致しておらず、非整数次モデルによる記述が必要であることが確認された。

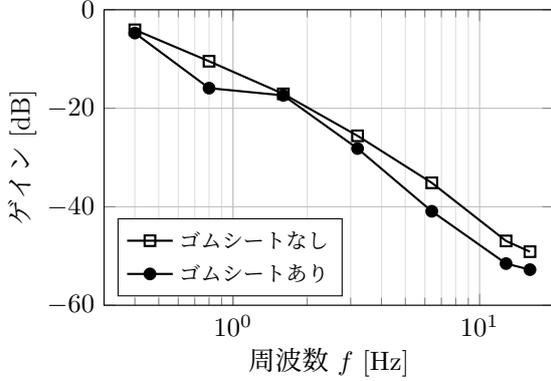


図 1: 周波数応答実験によるゲイン特性と折れ線近似

4.2 ボード線図の折れ線近似とシステム同定

ゴムシートありのゲイン特性 (表 4) を、 $0.4 \sim 0.8$ [Hz], $0.8 \sim 1.6$ [Hz], $1.6 \sim 16$ [Hz] の 3 区間に分けて直線近似した結果を表 5 に示す。

表 5: ボード線図の折れ線近似結果

周波数範囲	傾き a	切片 b	$\alpha = -a/20$
$0.4 \sim 0.8$ [Hz]	-37.16	-19.52	1.858
$0.8 \sim 1.6$ [Hz]	0	-16.65	0
$1.6 \sim 16$ [Hz]	-36.53	-10.2	1.827

低周波域と高周波域においてほぼ同一の次数 $\alpha \approx 1.85$ が得られたことから、プラントの開ループ伝達関数を次式のように仮定した。

$$G(s) = \frac{K(1 + T_1 s^{1.85})}{s^{1.85}(1 + T_2 s^{1.85})} \quad (5)$$

ここで K はゲイン, T_1, T_2 は時定数である。式 (5) において、分子の $(1 + T_1 s^{1.85})$ は位相進み要素 (リードフィルタ) に相当し、分母の $(1 + T_2 s^{1.85})$ はラグフィルタに対応する。これによりゴムシートの粘弾性的な動特性が、2 つ

の非整数次時定数によって表現されている。各折れ点周波数 ($\omega_1 = 0.8 \times 2\pi \approx 5.03$ rad/s, $\omega_2 = 1.6 \times 2\pi \approx 10.05$ rad/s) および直流ゲインから各パラメータを同定した結果,

$$K \approx 19.98 \text{ [rad/s]} \quad (6)$$

$$T_1 = \frac{1}{2\pi \times 0.8} \approx 0.1989 \text{ [s]} \quad (7)$$

$$T_2 = \frac{1}{2\pi \times 0.16} \approx 0.995 \text{ [s]} \quad (8)$$

が得られた。これより、同定された伝達関数は次式となる。

$$G(s) = \frac{19.98(1 + 0.1989 s^{1.85})}{s^{1.85}(1 + 0.995 s^{1.85})} \quad (9)$$

4.3 閉ループ系の設計

式 (5) のプラントに対して PD 制御器 $C(s) = K_p + K_d s$ を組み合わせたフィードバック系を構成した (フィードバックゲイン $H = 1$)。ここで、フレキシブルアームのシステムを 2 次系として扱うために、ブロック線図上で次の等価変換を導入する。

まず、式 (5) に対してフィードバックに $\frac{1 + T_2 s^{1.85}}{s^{0.15}(1 + T_1 s^{1.85})}$ を挿入することで、前向き経路の伝達関数は

$$\begin{aligned} & (K_p + K_d s) \cdot \frac{K(1 + T_1 s^{1.85})}{s^{1.85}(1 + T_2 s^{1.85})} \cdot \frac{1 + T_2 s^{1.85}}{s^{0.15}(1 + T_1 s^{1.85})} \\ &= \frac{K(K_d s + K_p)}{s^2} \end{aligned} \quad (10)$$

と整理される。等価変換公式を用いると、閉ループ系全体の伝達関数は次式となる。

$$G_{cl}(s) = \frac{KK_d s + KK_p}{s^2 + KK_d s + KK_p} \quad (11)$$

これは古典的な 2 次系 (2 次遅れ系) の標準形であり、固有角周波数 $\omega_n = \sqrt{KK_p}$, 減衰比 $\zeta = KK_d/(2\omega_n)$ として設計論を適用できる。

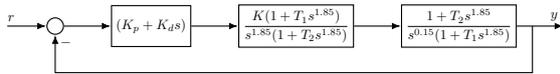


図 2: 等価変換のための閉ループブロック線図

4.4 ステップ応答シミュレーション

式 (11) に単位ステップ入力を加えた場合、MATLAB 上でラプラス逆変換を行うと時間応答式として

$$\theta(t) = 1 - \exp\left(-\frac{KK_d t}{2}\right) \left(\cosh \frac{\beta t}{2} - \frac{KK_d}{\beta} \sinh \frac{\beta t}{2} \right) \quad (12)$$

が得られる。ここで $\beta = \sqrt{(KK_d)^2 - 4KK_p}$ である。

$K = 19.98$, $K_p = 5.01$, $K_d = 0.70$ を代入してシミュレーションを行った結果が図 3 である。 $t \approx 0.4$ [s] 付近でオーバーシュートが生じるものの、その後は目標値 ($\theta = 1$ rad) に収束しており、非整数階微分に基づく制御系によってゴムシートの粘弾性特性を含むフレキシブルアームの振動抑制が原理的には実現可能であることが確認された。

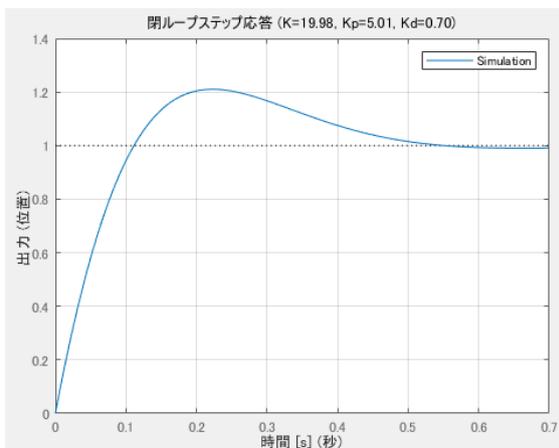


図 3: 閉ループステップ応答シミュレーション ($K=19.98$, $K_p=5.01$, $K_d=0.70$)

4.5 実機実験結果

MATLAB/Simulink 上で構築したブロック線図 (QUARC 経由で Q8-USB に接続) を用いて実機フィードバック制御を行った結果が図 4 である。

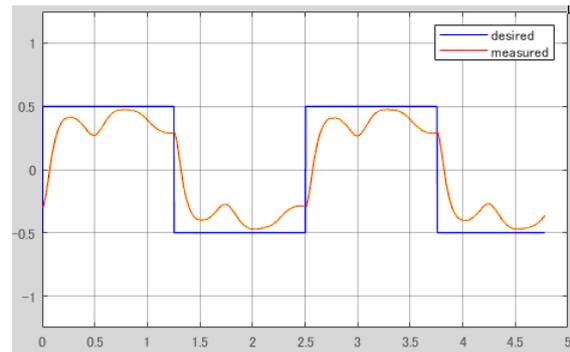


図 4: 実機実験結果

(黄: 目標値, 青: 計測値)

実験結果から、目標値の符号反転 (ステップ変化) に対して実際のアームが追従しようとする動作は確認され、フィードバック制御が機能していることが分かる。しかし、シミュレーション (図 3) と比較すると振動の収束が著しく遅く、整定時間内に目標値へ到達しきれていない。また、目標値変化直後に大きなアンダーシュートが生じる傾向が見られた。

4.6 非整数階演算子の近似実装

4.2 節で述べたように、閉ループ系を 2 次系に等価変換するためには、フィードバック経路に補償要素 $\frac{1 + T_2 s^{1.85}}{s^{0.15}(1 + T_1 s^{1.85})}$ を実装する必要がある。しかし、MATLAB/Simulink では、非整数階の演算子 s^α を直接計算することができない。

そこで本研究の実装においては、Oustaloup (オスタループ) 近似法を用い、非整数階演算子を有限次数の整数階伝達関数に置き換えて

Simulink のブロック線図に組み込んでいる。Oustaloup 近似とは、指定した周波数帯域内において、非整数階の特性を「複数の 1 次遅れ要素と 1 次進み要素の直列結合」として近似する手法である。

これにより、Simulink 上でも通常の整数次伝達関数として非整数階システムを模擬することが可能となる。ただし、この近似手法は設定した周波数帯域の境界付近において、真の非整数階特性との間にモデル化誤差が生じるという特徴があり、次章で述べる実機応答の差異にも影響を与えている。

5 考察

シミュレーションと実験結果の間に見られた差異の原因について、以下の 3 点を主な要因として考察する。

(1) モータ出力トルクの不足

本実験では入力電圧を 2[V] に設定したが、ゴムシートの弾性復元力に対してモータが発生できるトルクが不十分であった可能性がある。ゴムシートを 2 つ折りにした状態ではシートの曲げ剛性が高く、アームを目標角度に保持するために必要なトルクが、2[V] で得られるトルクを超えていた可能性がある。特に、アームが目標値から大きく外れた初期状態において、電圧が飽和限界に達しやすいと考えられる。

(2) 摩擦・重力の影響

シミュレーションモデルには含まれていない実機特有の非線形要因として、モータ軸の摩擦とゴムシートおよびクリップに働く重力が存在する。これらの定常的な外乱に対して、設計した制御則の補償能力が不十分であったため、定常偏差が残り収束が遅くなったと考えられる。

(3) 2 次系変換の近似誤差

式 (10) の等価変換は、フィードバック経路

に $\frac{1 + T_2 s^{1.85}}{s^{0.15}(1 + T_1 s^{1.85})}$ を追加することで理想的に成立する。しかし、このブロックを Simulink 上で有限次数の整数階伝達関数として近似実装した場合、高周波域や過渡応答において近似誤差が生じる。また、実際のプラントが式 (9) で完全に記述されているとは限らず、同定時の周波数範囲外の動特性が実験時に影響した可能性もある。

これらの要因を総合すると、シミュレーションと実機の乖離はモデル化の近似誤差、実機の実線形外乱、制御パラメータの最適化不足に起因するものであり、今後の改善により両者の一致度を高めることが可能と考えられる。

6 おわりに

本研究では、ニトリルゴムシートを装着したフレキシブルアームに対し、非整数階微分を用いたシステム同定と制御系設計を行い、シミュレーションおよび実機実験によりその有効性を検討した。

ボード線図の折れ線近似により、プラントの次数が $\alpha \approx 1.85$ であることを実験的に同定し、非整数次伝達関数を構築した。等価変換によって 2 次系に変換した閉ループ系に対して PD 制御則を適用したところ、シミュレーション上では目標値への収束が確認された。一方、実機実験ではシミュレーションと比較して振動収束が遅く、目標値への整定が不完全であった。この原因として、入力電圧の制限によるトルク不足、摩擦・重力等の非線形外乱、および 2 次系への変換過程における近似誤差を考察した。

今後の課題としては、(1) 制御パラメータ (K_p, K_d) の最適化、(2) 重力補償・摩擦補償の導入、(3) 非整数次ブロックの数値実装精度の改善、(4) より広い周波数帯域でのシステム同

定による伝達関数の精度向上, が挙げられる.

参考文献

- 1) 杉本信正: “非整数階微分・積分とその応用”, *ながれ*, Vol.4, 110/120 (1985)
- 2) 田中健太郎, 武下晃大, 黒田雅治: “非整数階微分を用いたフレキシブルアームの振動制御”, *日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2021 講演論文集* (2021)
- 3) 杉本信正: “整数階でない微積分法について”, *日本数学会 数学通信*, Vol.21, No.4, 5/22 (2016), <https://www.mathsoc.jp/publications/tushin/backnumber/>
- 4) 池田富士雄, 川田誠一, 渡辺敦: “分数次微分システムの最適レギュレータ設計”, *計測自動制御学会論文集*, vol.37, No.9, 856/861 (2001)
- 5) J. Sabatier, P. Lanusse, P. Melchior and A. Oustaloup: *Fractional order differentiation and robust control design : CRONE, H-infinity and motion control*, Springer, Dordrecht (2015)
- 6) M. H. Annaby and Z. S. Mansour: *q-fractional calculus and equations*, Springer, Berlin (2012)
- 7) 武下晃大, 黒田雅治, 川口夏樹: “非整数階微分を用いた振動抑制”, *日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2020 講演論文集* (2020)
- 8) 飯淵広大, 魚橋慶子: “分数階微分を用いたダンパーの振動制御”, *計測自動制御学会東北支部第 341 回研究集会資料*, 341-7 (2023)