

変数変換に対する連続時間システムの 2 次モードについて

今野剛人 阿部正英 川又政征 (東北大学)

On the Second Order Modes of Continuous-Time Systems under Variable Transformation

*T. Konno, M. Abe and M. Kawamata (Tohoku University)

Abstract— This paper proves that the second-order modes of continuous-time systems decrease under variable transformation with the driving-point impedance of an LCR circuit. The decrease is proved by obtaining the state-space representation of the transformed system, and its controllability / observability grammians in terms of those of the original system and the LCR circuit system.

Key Words: variable transformation, continuous time system, second-order modes, analog filter, state-space representation

1 まえがき

2 次モードとは、極や零点のようにシステムに固有の値であり、ハンケル特異値ともよばれる。極や零点はシステムの安定性や過渡応答などに関して極めて重要な値であることが広く知られているが、一方 2 次モードは詳しい性質はあまり明らかにされていない。そこで、その詳しい性質を明らかにすることが著者らの研究の目的である。

現時点で 2 次モードは、モデルを低次数化する際や、丸め誤差および統計的感度の最小値を求める際に用いられることがわかっている。1 次元の離散時間システム(デジタルフィルタ)において、周波数変換に対して 2 次モードが不変であるという性質が証明されており [1]、これによってシステムの実現と動的性質に関する重要な性質が得られている。また、分母分離形 2 次元離散時間システムにおいて、ある条件を満足する周波数変換を適用した場合に限り、2 次モードの不変性が成立することが証明されている [2]。

一方、1 次元の連続時間システム(アナログフィルタ)においても、周波数変換に対する 2 次モードの不変性が証明されている [3]。連続時間システムの周波数変換に用いられる変換変数の一般形はリアクタンス関数、すなわち LC 回路の駆動点インピーダンス関数である。RC 回路の駆動点インピーダンス関数による変数変換に対しては、2 次モードが減少することが証明されている [4]。本稿では、LCR 回路の駆動点インピーダンス関数を変換変数に用いた際の 2 次モードの解析を行う。

2 システムの表現と 2 次モード

N 次の 1 入力 1 出力の安定な連続時間システムを考える。Fig. 1 に示すように、このシステムを状態空間表現で表した場合の係数行列を A, b, c, d とすると、伝達関数 $H(s)$ は係数行列を用いて以下のように表すことができる。

$$H(s) = c(sI_N - A)^{-1}b + d \quad (1)$$

システム (A, b, c, d) に対して、次のリアプノフ方程式の解 K と W は可制御性グラミアンおよび可観測性グラミアンとよばれる。

$$AK + KA^t = -bb^t \quad (2)$$

$$A^tW + WA = -c^tc \quad (3)$$

ここで、 (A, b, c, d) が最小実現であれば、可制御性グラミアン K と可観測性グラミアン W は正定対称行列となる。このとき、行列積 KW の固有値はすべて正であり、その正の平方根 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, N)$ をこのシステムの 2 次モードという。2 次モードはシステムの等価変換に対して不変である。

3 LCR 回路の駆動点インピーダンス関数を持つシステム

M 次の LCR 回路の駆動点インピーダンス関数 $1/F(s)$ を考える。LCR 回路の駆動点インピーダンス関数は以下のような実係数の正実関数で表すことができる [5]。

$$\frac{1}{F(s)} = \frac{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (4)$$

正実関数の分母多項式と分子多項式の次数差はたかだか 1 次であるが、本報告では線形システムの状態空間表現を用いていることから、プロパーな正実関数についてのみ扱う。

$1/F(s)$ の状態空間表現を $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ とすると、

$$1/F(s) = \gamma(sI_M - \alpha)^{-1}\beta + \delta \quad (5)$$

である。ここでは、 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ は最小実現であるとする。このとき、LCR 回路の駆動点インピーダンス関数をもつシステムの状態空間表現に関して、次の定理が成立することが知られている [6]。

定理 1 $1/F(s) = \gamma(sI_M - \alpha)^{-1}\beta + \delta$ が LCR 回路の駆動点インピーダンス関数であるための必要十分条件は、次の関係を満たす正定対称行列 Q と、ある M 次元横ベクトル l が存在することである。

$$\alpha^tQ^{-1} + Q^{-1}\alpha = -l^tl \quad (6)$$

$$Q^{-1}\beta = \gamma^t - \sqrt{2\delta}l^t \quad (7)$$

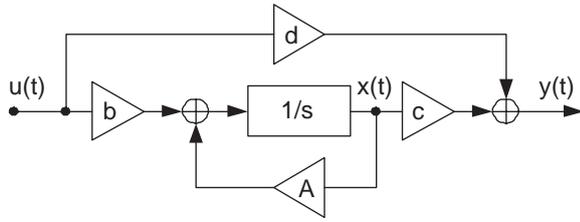


Fig. 1: State-space representation.

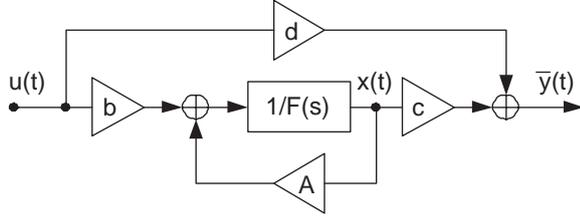


Fig. 2: Variable transformation.

4 変数変換後のシステム

Fig. 2 のように, N 次の伝達関数 $H(s) = c(sI_N - A)^{-1}b + d$ に対して, LCR回路の駆動点インピーダンス関数 $1/F(s) = \gamma(sI_M - \alpha)^{-1}\beta + \delta$ を用いて $s \leftarrow F(s)$ の変数変換を行うことを考える. この変数変換を行って得られるシステムを $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ として, このシステムを (A, b, c, d) と $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ を使って表すことを考える.

いま, $H(s)$ の次数は N 次であり, $1/F(s)$ の次数は M 次であるから, $H(F(s))$ の次数は MN 次となる. そこで, MN 次の状態変数ベクトルを $v(t)$ とすると, $H(F(s))$ の状態方程式は以下のように与えられることが知られている [1].

$$\frac{dv(t)}{dt} = \bar{A}v(t) + \bar{B}u(t) \quad (8)$$

$$\bar{y}(t) = \bar{C}v(t) + \bar{D}u(t) \quad (9)$$

ここで, $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ は以下のように与えられる.

$$\bar{A} = I_N \otimes \alpha + A(I_N - \delta A)^{-1} \otimes \beta\gamma \quad (10)$$

$$\bar{B} = (I_N - \delta A)^{-1}b \otimes \beta \quad (11)$$

$$\bar{C} = c(I_N - \delta A)^{-1} \otimes \gamma \quad (12)$$

$$\bar{D} = d + \delta c(I_N - \delta A)^{-1}b \quad (13)$$

LCR回路の駆動点インピーダンス関数 $1/F(s)$ による変数変換後のシステム $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ の可制御性グラミアンを \bar{K} , 可観測性グラミアンを \bar{W} とすると, これらは以下のリアプノフ方程式の解である.

$$\bar{A} \bar{K} + \bar{K} \bar{A}^t = -\bar{B} \bar{B}^t \quad (14)$$

$$\bar{A}^t \bar{W} + \bar{W} \bar{A} = -\bar{C}^t \bar{C} \quad (15)$$

5 変数変換後の2次モード

本節では, 変数変換後の2次モードを求める.

可制御性グラミアンと可観測性グラミアンにより2次モードは定義されるので, まず変数変換後の各グラミアンを求める. そして, 求められた各グラミアンから, 変数変換後の2次モードを求める.

式変形では, 以下の行列の公式およびクロネッカー積の性質を利用している [7][8].

$$(I - AB)^{-1}A = A(I - BA)^{-1} \quad (16)$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) \quad (17)$$

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C \quad (18)$$

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C \quad (19)$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \quad (20)$$

$$(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t \quad (21)$$

5.1 変数変換後の可制御性グラミアン

変数変換後の可制御性グラミアン \bar{K} を求める. まず, リアプノフ方程式を参考に以下の計算を行う. 式の変形においては, 定理1の式(6)-(7), および式(10)の \bar{A} と式(11)の \bar{B} を用いている. また, $E = (I_N - \delta A)$ とおいて式を簡略化している.

$$\bar{A}(K \otimes Q) + (K \otimes Q)\bar{A}^t + \bar{B} \bar{B}^t \quad (22)$$

$$= (I_N \otimes \alpha + AE^{-1} \otimes \beta\gamma)(K \otimes Q) \\ + (K \otimes Q)(I_N \otimes \alpha + AE^{-1} \otimes \beta\gamma)^t \\ + (E^{-1}b \otimes \beta)(E^{-1}b \otimes \beta)^t \quad (23)$$

$$= K \otimes (\alpha Q) + K \otimes (Q\alpha^t) \\ + (AE^{-1}K) \otimes (\beta\gamma Q) \\ + (KE^{-t}A^t) \otimes (Q\gamma^t\beta^t) \\ + (E^{-1}bb^tE^{-t}) \otimes (\beta\beta^t) \quad (24)$$

$$= K \otimes (\alpha Q + Q\alpha^t) \\ + (AE^{-1}K) \otimes (\beta(\beta^t + \sqrt{2\delta}lQ)) \\ + (KE^{-t}A^t) \otimes ((\beta + \sqrt{2\delta}Ql^t)\beta^t) \\ + (E^{-1}bb^tE^{-t}) \otimes (\beta\beta^t) \quad (25)$$

$$= K \otimes (-Ql^t lQ) \\ + \sqrt{2\delta}(E^{-1}AK) \otimes (\beta\gamma Q) \\ + \sqrt{2\delta}(KE^{-t}A^t) \otimes (Ql^t\beta^t) \\ + (E^{-1}AK + KA^tE^{-t} + E^{-1}bb^tE^{-t}) \\ \otimes (\beta\beta^t) \quad (26)$$

ここで,

$$E^{-1}AK + KA^tE^{-t} + E^{-1}bb^tE^{-t} \quad (27)$$

$$= E^{-1}(AKE^t + EKA^t + bb^t)E^{-t} \quad (28)$$

$$= E^{-1}(AK(I_N - \delta A)^t + (I_N - \delta A)KA^t \\ + bb^t)E^{-t} \quad (29)$$

$$= E^{-1}(AK + KA^t + bb^t - 2\delta AK A^t)E^{-t} \quad (30)$$

$$= -2\delta AE^{-1}KE^{-t}A^t \quad (31)$$

より, 式(26)は以下のように変形できる.

$$(26) = -(K \otimes (Ql^t lQ)) \\ - \sqrt{2\delta}(E^{-1}AK) \otimes (\beta\gamma Q) \\ - \sqrt{2\delta}(KE^{-t}A^t) \otimes (Ql^t\beta^t) \\ + 2\delta(AE^{-1}KE^{-t}A^t) \otimes (\beta\beta^t) \quad (32)$$

$$= -XX^t \quad (33)$$

ただし,

$$X = K^{\frac{1}{2}} \otimes (Ql^t) - \sqrt{2\delta}(AE^{-1}K^{\frac{1}{2}}) \otimes \beta \quad (34)$$

とおいた. 結局, 式 (22) と式 (33) から次式が得られる.

$$\bar{A}(K \otimes Q) + (K \otimes Q)\bar{A}^t + \bar{B}\bar{B}^t = -XX^t \quad (35)$$

式 (35) から式 (14) を引くと, 以下の式が得られる.

$$\bar{A}(K \otimes Q - \bar{K}) + (K \otimes Q - \bar{K})\bar{A}^t = -XX^t \quad (36)$$

ここで, リアプノフ方程式について以下の安定性に関する定理がある [9].

定理 2 \mathcal{A} が漸近安定のとき, 任意の $Q = Q^t \geq 0$ に対してリアプノフ方程式 $\mathcal{A}^t P + P\mathcal{A} = -Q$ は一意解 $P = P^t \geq 0$ を持つ.

式 (36) と定理 2 から, 以下の式が導ける.

$$K \otimes Q - \bar{K} \geq 0 \quad (37)$$

等号は $l = 0$ かつ $\delta = 0$ のときに成立する. これは変換変数に LC回路の駆動点インピーダンス関数を用いた場合, すなわちシステムに一般的な周波数変換を適用した場合に相当する [3].

5.2 変数変換後の可観測性グラミアン

変数変換後の可観測性グラミアン \bar{W} を求める. 前節と同様, まずリアプノフ方程式を参考に以下の計算を行う. 式の変形においては, 定理 1 の式 (6)–(7), および式 (10) の \bar{A} と式 (12) の \bar{C} を用いている. また, $E = (I_N - \delta A)$ とおいて式を簡略化している.

$$\bar{A}^t(W \otimes Q^{-1}) + (W \otimes Q^{-1})\bar{A} + \bar{C}^t\bar{C} \quad (38)$$

$$= (I_N \otimes \alpha + AE^{-1} \otimes \beta\gamma)^t(W \otimes Q^{-1}) + (W \otimes Q^{-1})(I_N \otimes \alpha + AE^{-1} \otimes \beta\gamma) + (cE^{-1} \otimes \gamma)^t(cE^{-1} \otimes \gamma) \quad (39)$$

$$= W \otimes (\alpha^t Q^{-1}) + W \otimes (Q^{-1} \alpha) + (E^{-t} A^t W) \otimes (\gamma^t \beta^t Q^{-1}) + (W A E^{-1}) \otimes (Q^{-1} \beta \gamma) + (E^{-t} c^t c E^{-1}) \otimes (\gamma^t \gamma) \quad (40)$$

$$= W \otimes (\alpha^t Q^{-1} + Q^{-1} \alpha) + (E^{-t} A^t W) \otimes (\gamma^t (\gamma - \sqrt{2\delta} l)) + (W A E^{-1}) \otimes ((\gamma^t - \sqrt{2\delta} l^t) \gamma) + (E^{-t} c^t c E^{-1}) \otimes (\gamma^t \gamma) \quad (41)$$

$$= W \otimes (-l^t l) - \sqrt{2\delta}(E^{-t} A^t W) \otimes (\gamma^t l) - \sqrt{2\delta}(W A E^{-1}) \otimes (l^t \gamma) + (E^{-t} A^t W + W A E^{-1} + E^{-t} c^t c E^{-1}) \otimes (\gamma^t \gamma) \quad (42)$$

ここで,

$$E^{-t} A^t W + W A E^{-1} + E^{-t} c^t c E^{-1} \quad (43)$$

$$= E^{-t}(A^t W E + E^t W A + c^t c)E^{-1} \quad (44)$$

$$= E^{-t}(A^t W (I_N - \delta A) + (I_N - \delta A)^t W A + c^t c)E^{-1} \quad (45)$$

$$= E^{-t}(A^t W + W A + c^t c - 2\delta A^t W A)E^{-1} \quad (46)$$

$$= -2\delta E^{-t} A^t W A E^{-1} \quad (47)$$

より, 式 (42) は以下のように変形できる.

$$(42) = -(W \otimes (l^t l) + \sqrt{2\delta}(E^{-t} A^t W) \otimes (\gamma^t l) + \sqrt{2\delta}(W A E^{-1}) \otimes (l^t \gamma) + 2\delta(E^{-t} A^t W A E^{-1}) \otimes (\gamma^t \gamma)) \quad (48)$$

$$= -Y^t Y \quad (49)$$

ただし,

$$Y = W^{\frac{1}{2}} \otimes l + \sqrt{2\delta}(W^{\frac{1}{2}} A E^{-1}) \otimes \gamma \quad (50)$$

とおいた. 結局, 式 (38) と式 (49) から次式が得られる.

$$\bar{A}^t(W \otimes Q^{-1}) + (W \otimes Q^{-1})\bar{A} + \bar{C}^t\bar{C} = -Y^t Y \quad (51)$$

式 (51) から式 (15) を引くと, 以下の式が得られる.

$$\bar{A}^t(W \otimes Q^{-1} - \bar{W}) + (W \otimes Q^{-1} - \bar{W})\bar{A} = -Y^t Y \quad (52)$$

式 (52) と前節の定理 2 から, 以下の式が導ける.

$$W \otimes Q^{-1} - \bar{W} \geq 0 \quad (53)$$

等号は $l = 0$ かつ $\delta = 0$ のときに成立する. これは変換変数に LC回路の駆動点インピーダンス関数を用いた場合, すなわちシステムに一般的な周波数変換を適用した場合に相当する [3].

5.3 変数変換後の 2 次モード

変数変換後の 2 次モード $\bar{\theta}$ を求める. 式 (37) と式 (53) から, 次式が得られる.

$$K W \otimes I_M \geq \bar{K} \bar{W} \quad (54)$$

等号は $l = 0$ かつ $\delta = 0$ のときに成立する. これは変換変数に LC回路の駆動点インピーダンス関数を用いた場合, すなわちシステムに一般的な周波数変換を適用した場合に相当する [3].

ところで, 正定行列に関して以下の定理がある [10].

定理 3 $n \times n$ の複素行列 \mathcal{A}, \mathcal{B} は共にエルミートであるとし, \mathcal{A}, \mathcal{B} の固有値を大きいものから順に $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ と番号をつけるものとする. $\mathcal{A} \geq \mathcal{B}$ のとき, $\lambda_i(\mathcal{A}) \geq \lambda_i(\mathcal{B})$ ($i = 1, 2, \dots, n$) が成立する.

式 (54) と定理 3, および 2 次モードの定義より, 変数変換前の 2 次モード θ と変換後の 2 次モード $\bar{\theta}$ の関係は以下ようになる.

$$\theta_i \geq \bar{\theta}_j \quad (55)$$

$$\left(\begin{array}{c} i = 1, 2, \dots, N \\ j = M(i-1) + 1, M(i-1) + 2, \dots, Mi \end{array} \right)$$

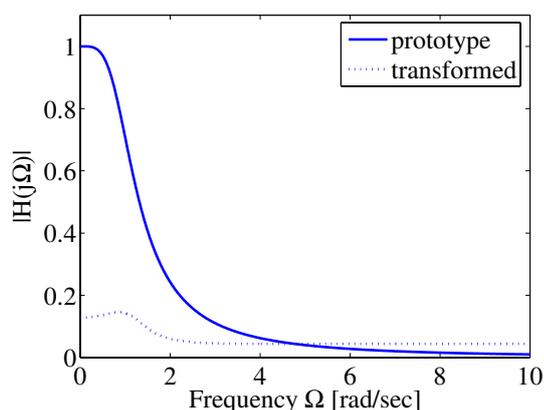


Fig. 3: Amplitude characteristic.

ただし, $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_N$, $\bar{\theta}_1 \geq \bar{\theta}_2 \geq \dots \geq \bar{\theta}_M$ である.

以上より, LCR回路の駆動点インピーダンス関数による変数変換に対して, 連続時間システムの2次モードは減少することを示した.

6 計算例

LCR回路の駆動点インピーダンス関数 $1/F(s)$ による変数変換に対して, 2次モードが減少する例を示す.

まず, 以下の2次の伝達関数を考える.

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (56)$$

この伝達関数は, 遮断周波数 $1[\text{rad/sec}]$ の2次バターズフィルタであり, Fig.3の実線に示すような特性をもつ. このシステムの状態空間表現 (A, b, c, d) は以下のように与えられる.

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c} & d \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} -\sqrt{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad (57)$$

このシステムの2次モード θ は次のように得られる.

$$(\theta_1, \theta_2) = (0.6830, 0.1830) \quad (58)$$

システム (A, b, c, d) に対して, 以下のLCR回路の駆動点インピーダンス関数 $1/F(s)$ を用いて $s \leftarrow F(s)$ の変数変換を行うとする.

$$\frac{1}{F(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{4s^2 + 5s + 6} \quad (59)$$

変換後のシステム $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ の特性は図3の点線のようになり, $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ および2次モード $\bar{\theta}$ は次のように得られる.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1.4704 & -1.9407 & -0.1324 & -0.2648 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1324 & 0.2648 & -1.2831 & -1.5662 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{pmatrix} \quad (60)$$

$$\bar{B} = (0.7062 \ 0 \ 0.1765 \ 0)^t \quad (61)$$

$$\bar{C} = (0.0331 \ 0.0662 \ 0.1792 \ 0.3584) \quad (62)$$

$$\bar{D} = 0.0441 \quad (63)$$

$$\begin{aligned} &(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3, \bar{\theta}_4) \\ &= (0.0650, 0.0235, 0.0006, 0.0003) \end{aligned} \quad (64)$$

したがって, 式(58)と式(64)から, LCR回路の駆動点インピーダンス関数 $1/F(s)$ による変数変換に対して, 2次モードは減少することが確認できる.

7 あとがき

本報告では, LCR回路の駆動点インピーダンス関数による変数変換に対して, 連続時間システムの2次モードは減少することを示した. この性質をどう応用するかが今後の課題である.

参考文献

- [1] C. T. Mullis and R. A. Roberts, Roundoff Noise in Digital Filters: Frequency Transformations and Invariant, IEEE Trans. ASSP-24, pp. 538-550, 1976.
- [2] M. Kawamata, S. Koshita, On the Invariance of Second-Order Modes under Frequency Transformation in 2-D Separable Denominator Digital Filters, Proceedings of IEEE ISCAS, vol.5, pp. 777-780, 2002.
- [3] M. Kawamata, On the Invariance of Second-Order Modes of Continuous-Time Systems under General Frequency Transformation, Proceedings of IEEE ISCAS, vol.1, pp. 505-508, 2003.
- [4] 今野剛人, 阿部正英, 川又政征, 変数変換に対する連続時間システムの2次モードについて, 計測自動制御学会東北支部, 217-6, 2004.
- [5] 高橋宣明, よくわかる回路理論, pp. 101-104, オーム社, 1995.
- [6] 高橋進一, 有本卓, 回路網とシステム理論, pp. 204-206, コロナ社, 1974.
- [7] 太田快人, システム制御のための数学(1), pp. 210-213, コロナ社, 2000.
- [8] D. Zwillinger, Standard Mathematical Tables and Formulae, pp. 135-136, CRC Press, 1996.
- [9] 前田肇, 線形システム, pp. 195-199, 朝倉書店, 2001.
- [10] 児玉慎三, 須田信英, システム制御のためのマトリクス理論, pp. 269-275, 計測自動制御学会, 1978.