計測自動制御学会東北支部 40 周年記念学術講演会
2004 年 12 月 22 日，23 日　日本大学工学部

講演番号：C11

変数変換に対する線形離散時間システムの 2 次モード の性質について

○越田俊介　阿部正英　川又政征（東北大学）

Property of the Second-Order Modes of Linear Discrete-Time Systems under Variable Transformation

∗S. Koshita, M. Abe and M. Kawamata (Tohoku University)

Abstract– This paper discusses property of the second-order modes of discrete-time systems under variable transformation. This is the generalization of the theory presented by Mullis and Roberts, who discovered the invariance of the second-order modes under allpass transformation (variable transformation of lossless bounded-real function). This paper proves that the values of the second-order modes are decreased under any variable transformation of bounded-real function. The proof is achieved with the help of the bounded-real lemma and formulation of the controllability and observability Gramians of transformed discrete-time systems.

Key Words: state-space representation, Gramian, second-order mode, bounded-real lemma, variable transformation

1　はじめに

2 次モードは，状態空間表現によって記述される線形システムの可制御性グラミアンと可観測性グラミアンの行列積の固有値の正の平方根として定義される量であり，ハンケル特異値ともよばれる．2 次モードは，システムの感度解析および最小化 [1] やモデル低次数化 [2] などの理論において用いられる．したがって，2 次モードはシステムの設計や実現に関する理論において極めて重要な役割を果たしているといえる．しかしながら，2 次モードがそういった重要な理論に応用されていることはよく知られているものの，2 次モードのもつ性質とシステムの特性との関係についてはほとんど知られていない．

本稿では，2 次モード の性質をシステム特性の観点から明らかにすることを目的として，変数変換によって得られる線形離散時間システムにおける 2 次モードの性質について議論する．この議論の特殊な場合として，文献 [3] では周波数変換に対する 2 次モード の不変性が証明されており，これによってシステムの実現と動的性質に関する重要な知見が得られている．しかし，文献 [3] では変数変換として用いる関数が無損失有界実関数 (全域通過関数) に限定されており，損失性をもつ任意の有界実関数を用いた変数変換に対する 2 次モード の性質については全く明らかにされていない．そこで本稿では，変数変換に用いる関数を有界実関数に拡張して議論し，損失性のある任意の有界実関数による変数変換に対して 2 次モード の値は減少することを証明する．

2　線形離散時間システムの 2 次モード

N 次の 1 入力 1 出力の安定な伝達関数 $H(z)$ をもつ線形離散時間システムの次の状態空間表現を考える．

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{b}u(n) \quad (1)$$

$$y(n) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(n) + du(n) \quad (2)$$

上式において，$u(n), y(n)$ と $\boldsymbol{x}(n)$ はそれぞれシステムの入力，出力および $N \times 1$ の状態ベクトルであり，

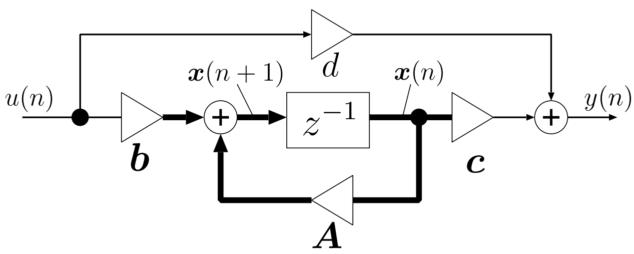

Fig. 1: Block diagram of a discrete-time state-space system.

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d$ は適当なサイズの係数行列である．ここで，システム $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d)$ は最小実現であるとする．Fig. 1 にこのシステムのブロック図を示す．係数行列と伝達関数 $H(z)$ は

$$H(z) = d + \boldsymbol{c}(z\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} \quad (3)$$

の関係にある．

システム $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d)$ に対して次のリアプノフ方程式の解 $\boldsymbol{K}$ と $\boldsymbol{W}$ は可制御性グラミアンおよび可観測性グラミアンとよばれる．

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}^t + \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^t \quad (4)$$

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{W}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{c} \quad (5)$$

$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d)$ が最小実現であれば，この $\boldsymbol{K}$ と $\boldsymbol{W}$ は正定対称行列である．このとき，行列積 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}$ の固有値はすべて正であり，これらを θ_i^2 とし，その正の平方根を $\theta_i (1 \le i \le N)$ とおく．この θ_i をシステムの 2 次モードという [2,3]．

2 次モードはシステムの伝達関数に固有の量であり，状態の等価変換に対して不変であることが知られている．すなわち，$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d)$ に対して任意の正則行列 $\boldsymbol{T}$ を用いて等価変換を適用したシステム $(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}, d)$ の可制御性・可観測性グラミアンをそれぞれ $\overline{\boldsymbol{K}}, \overline{\boldsymbol{W}}$ とすると

$$(\overline{\boldsymbol{K}}, \overline{\boldsymbol{W}}) = (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}^{-t}, \boldsymbol{T}^t\boldsymbol{W}\boldsymbol{T}) \quad (6)$$

となることから

$$\overline{\boldsymbol{K}}\,\overline{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}\boldsymbol{T} \tag{7}$$

が導かれるので，$\overline{\boldsymbol{K}}\,\overline{\boldsymbol{W}}$ と $\boldsymbol{KW}$ は同じ固有値をもつことになる．したがって，これらの行列積に対する固有値の正の平方根である 2 次モードは等価変換に対して不変であり，システムの状態空間表現には依存せず伝達関数によって定まる量であることがいえる．

3　変数変換と有界実補題

ここでは，本稿で導出する定理において重要な役割を果たす変数変換と有界実補題について述べる．

3.1　変数変換とその状態空間表現

次式の変数変換によって生成される離散時間システム $G(z)$ を考える．

$$G(z) = H(F(z)) = H(z)|_{z^{-1}\leftarrow 1/F(z)} \tag{8}$$

ここで，$H(z)$ と $1/F(z)$ はそれぞれ N 次と M 次の安定な離散時間システムであり，この変数変換によって生成されるシステム $G(z)$ の次数は MN である．$G(z)$ の安定性を保証するため，$1/F(z)$ は有界実関数であるとする．すなわち，すべての ω に対して $|1/F(e^{j\omega})| \le 1$ が成立していると仮定する．なお，すべての ω に対して $|1/F(e^{j\omega})| = 1$ が成立する場合の $1/F(z)$ は無損失有界実関数または全域通過関数とよばれる．

(8) 式の変数変換によって得られるシステム $G(z)$ は，状態空間表現を用いて記述できることが知られている [3]．すなわち，$H(z)$ と $1/F(z)$ の係数行列をそれぞれ $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},d)$ および $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\delta)$ とすると，$G(z)$ は以下のように記述される．

$$G(z) = \mathcal{D} + \boldsymbol{\mathcal{C}}(z\boldsymbol{I}_{MN} - \boldsymbol{\mathcal{A}})^{-1}\boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{9}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{I}_N \otimes \boldsymbol{\alpha} + [\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})^{-1}] \otimes (\boldsymbol{\beta\gamma}) \tag{10}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = [(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}] \otimes \boldsymbol{\beta} \tag{11}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = [\boldsymbol{c}(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})^{-1}] \otimes \boldsymbol{\gamma} \tag{12}$$
$$\mathcal{D} = d + \delta\boldsymbol{c}(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} \tag{13}$$

ここで，記号 $\otimes$ は行列のクロネッカー積を表す．

3.2　有界実補題

M 次の安定な線形離散時間システム $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\delta)$ が有界実であるとき，次式を満足する正定対称行列 $\boldsymbol{P}$，実数ベクトル $\boldsymbol{l}$ および実数 w_1 が存在する [4,5]．

$$\boldsymbol{\alpha}^t\boldsymbol{P\alpha} + \boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{l}^t\boldsymbol{l} = \boldsymbol{P} \tag{14}$$
$$\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{P\beta} + \delta^2 + w_1^2 = 1 \tag{15}$$
$$\boldsymbol{\alpha}^t\boldsymbol{P\beta} + \boldsymbol{\gamma}^t\delta + \boldsymbol{l}^t w_1 = \boldsymbol{0} \tag{16}$$

また，(14) 式は次の離散型有界実リカッチ方程式と等価である．

$$\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\alpha}^t\boldsymbol{P\alpha} - \boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{\gamma} - (\boldsymbol{\alpha}^t\boldsymbol{P\beta} + \boldsymbol{\gamma}^t\delta)$$
$$\cdot(1 - \delta^2 - \boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{P\beta})^{-1}(\boldsymbol{\alpha}^t\boldsymbol{P\beta} + \boldsymbol{\gamma}^t\delta)^t = \boldsymbol{0} \tag{17}$$

なお，システム $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\delta)$ が無損失有界実関数である場合には，上述の有界実補題において $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{0}$ および $w_1 = 0$ となり，結果として (14)–(16) 式は次のように書き換えられる．

$$\boldsymbol{\alpha}^t\boldsymbol{P\alpha} + \boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{P} \tag{18}$$
$$\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{P\beta} + \delta^2 = 1 \tag{19}$$
$$\boldsymbol{\alpha}^t\boldsymbol{P\beta} + \boldsymbol{\gamma}^t\delta = \boldsymbol{0} \tag{20}$$

(18)–(20) 式は，無損失有界実補題とよばれる．

4　変数変換に対する 2 次モードの性質に関する定理の導出

本章では，前章で述べた変数変換の状態空間表現および有界実補題を用いて，変数変換によって得られるシステムの 2 次モードの性質を明らかにする．

まず，次の補題を導入する．これは前章で述べた有界実補題と相対の関係をなすものである．

補題 1 M 次の安定な線形離散時間システム $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\delta)$ が有界実であるとき，次式を満足する正定対称行列 $\boldsymbol{Q}$，実数ベクトル $\boldsymbol{m}$ および実数 w_2 が存在する．

$$\boldsymbol{\alpha Q\alpha}^t + \boldsymbol{\beta\beta}^t + \boldsymbol{mm}^t = \boldsymbol{Q} \tag{21}$$
$$\boldsymbol{\gamma Q\gamma}^t + \delta^2 + w_2^2 = 1 \tag{22}$$
$$\boldsymbol{\alpha Q\gamma}^t + \boldsymbol{\beta}\delta + \boldsymbol{m}w_2 = \boldsymbol{0} \tag{23}$$

さらに，上式を満たす $\boldsymbol{Q}$ のうち，(14)–(16) 式の $\boldsymbol{P}$ に対して $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}$ となるような $\boldsymbol{Q}$ が必ず存在する．

証明　(21)–(23) 式は，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\delta)$ と相対のシステム $(\boldsymbol{\alpha}^t,\boldsymbol{\gamma}^t,\boldsymbol{\beta}^t,\delta)$ に対して有界実補題を適用することにより得られる．$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}$ の関係は，(21) 式が次の離散型有界実リカッチ方程式

$$\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{\alpha Q\alpha}^t - \boldsymbol{\beta\beta}^t - (\boldsymbol{\alpha Q\gamma}^t + \boldsymbol{\beta}\delta)$$
$$\cdot(1 - \delta^2 - \boldsymbol{\gamma Q\gamma}^t)^{-1}(\boldsymbol{\alpha Q\gamma}^t + \boldsymbol{\beta}\delta)^t = \boldsymbol{0} \tag{24}$$

と等価であるということと，文献 [6] において述べられている補題 1 に対して双一次変換を適用して得られる式とを用いることにより導くことができる．詳細は省略する．　□

なお，$1/F(z)$ が無損失有界実関数である場合には，(21)–(23) 式は以下のように書き換えられる．

$$\boldsymbol{\alpha Q\alpha}^t + \boldsymbol{\beta\beta}^t = \boldsymbol{Q} \tag{25}$$
$$\boldsymbol{\gamma Q\gamma}^t + \delta^2 = 1 \tag{26}$$
$$\boldsymbol{\alpha Q\gamma}^t + \boldsymbol{\beta}\delta = \boldsymbol{0} \tag{27}$$

このとき，無損失有界実補題の (18)–(20) 式における $\boldsymbol{P}$ は常に $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}^{-1}$ の関係を満足させる [3]．

2 次モードの性質について議論するため，変数変換によって得られるシステム $(\boldsymbol{\mathcal{A}},\boldsymbol{\mathcal{B}},\boldsymbol{\mathcal{C}},\mathcal{D})$ における可制御性・可観測性グラミアンの関係式を記述することを考える．この問題に関して，次の重要な補題が導かれる．

補題 2 (8) 式の変数変換によって生成されるシステム $(\boldsymbol{\mathcal{A}},\boldsymbol{\mathcal{B}},\boldsymbol{\mathcal{C}},\mathcal{D})$ の可制御性・可観測性グラミアンを $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ および $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ とする．すなわち，$\boldsymbol{\mathcal{K}}$ と $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ は以下のリアプノフ方程式を満足するものとする．

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{\mathcal{A}}^t + \boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{B}}^t \tag{28}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{W}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}^t\boldsymbol{\mathcal{W}}\boldsymbol{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\mathcal{C}}^t\boldsymbol{\mathcal{C}} \tag{29}$$

このとき，変数変換として用いる任意の有界実関数 $1/F(z)$ に対して，以下の行列不等式が成立する．

$$\boldsymbol{\mathcal{W}} \le \boldsymbol{W} \otimes \boldsymbol{P} \tag{30}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} \le \boldsymbol{K} \otimes \boldsymbol{Q} \tag{31}$$

ここで，$\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ はそれぞれ (14)–(16) 式と (21)–(23) 式によって与えられる正定対称行列である．(30)–(31) 式における等号は，$1/F(z)$ が無損失有界実関数である場合に限り成立する．

証明 (30) 式の証明と (31) 式の証明は相対の関係にあるので，本稿では (30) 式の証明について詳しく述べる．

まず，次式で表される行列 $\boldsymbol{X}$ について考える．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} = &[(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{I}_M]^t \\ &\cdot [(\boldsymbol{W} \otimes \boldsymbol{P}) - \boldsymbol{\mathcal{A}}^t(\boldsymbol{W} \otimes \boldsymbol{P})\boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{\mathcal{C}}^t\boldsymbol{\mathcal{C}}] \\ &\cdot [(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{I}_M]\end{aligned} \tag{32}$$

上式に (10) 式と (12) 式を代入し整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} = &[(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A}^t)\boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})] \otimes \boldsymbol{P} \\ &- [(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A}^t)\boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})] \otimes (\boldsymbol{\alpha}^t\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}) \\ &- [(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A}^t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}] \otimes (\boldsymbol{\alpha}^t\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}) \\ &- [\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})] \otimes (\boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}) \\ &- (\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}) \otimes (\boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}) \\ &- (\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{c}) \otimes (\boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{\gamma})\end{aligned} \tag{33}$$

ここで，(14)–(16) 式の有界実補題を適用することにより，上式はさらに次のように変形される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} = &[(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A}^t)\boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})] \otimes (\boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{l}^t\boldsymbol{l}) \\ &- (\boldsymbol{W}\boldsymbol{A} - \delta\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}) \otimes (-\delta\boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{\gamma} - w_1\boldsymbol{l}^t\boldsymbol{\gamma}) \\ &- (\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{W} - \delta\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}) \otimes (-\delta\boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{\gamma} - w_1\boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{l}) \\ &- (\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}) \otimes [(1 - \delta^2 - w_1^2)\boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{\gamma}] \\ &- (\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{c}) \otimes (\boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{\gamma}) \\ = &(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{W}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{c}) \otimes (\boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{\gamma}) \\ &+ (w_1^2\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}) \otimes (\boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{\gamma}) \\ &+ [(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A}^t)\boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})] \otimes (\boldsymbol{l}^t\boldsymbol{l}) \\ &+ [w_1(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A}^t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}] \otimes (\boldsymbol{l}^t\boldsymbol{\gamma}) \\ &+ [w_1\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})] \otimes (\boldsymbol{\gamma}^t\boldsymbol{l}) \\ = &\boldsymbol{Y}^t\boldsymbol{Y}\end{aligned} \tag{34}$$

ただし，上式において

$$\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{W}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})] \otimes \boldsymbol{l} + (w_1\boldsymbol{W}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{\gamma} \tag{35}$$

とおいた．(32) 式と (34) 式の結果より，次式が導かれる．

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{W} \otimes \boldsymbol{P}) - \boldsymbol{\mathcal{A}}^t(\boldsymbol{W} \otimes \boldsymbol{P})\boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{\mathcal{C}}^t\boldsymbol{\mathcal{C}}^t \\ &= [(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{I}_M]^{-t}\boldsymbol{Y}^t\boldsymbol{Y}[(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{I}_M]^{-1}\end{aligned} \tag{36}$$

上式から (29) 式を引くと，

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{W} \otimes \boldsymbol{P} - \boldsymbol{\mathcal{W}}) - \boldsymbol{\mathcal{A}}^t(\boldsymbol{W} \otimes \boldsymbol{P} - \boldsymbol{\mathcal{W}})\boldsymbol{\mathcal{A}} \\ &= [(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{I}_M]^{-t}\boldsymbol{Y}^t\boldsymbol{Y}[(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{I}_M]^{-1}\end{aligned} \tag{37}$$

を得る．明らかに上式右辺は半正定行列であり，また $G(z)$ の安定性より行列 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ の固有値は単位円内にあるので，上式は一意解 $\boldsymbol{W} \otimes \boldsymbol{P} - \boldsymbol{\mathcal{W}} \ge 0$ をもつ．この結果より，行列不等式 $\boldsymbol{\mathcal{W}} \le \boldsymbol{W} \otimes \boldsymbol{P}$ が導かれる．等号が成立する場合の証明は，文献 [3] において述べられているので省略する． □

補題 2 より，変数変換に対する 2 次モードの性質に関して次の重要な定理が得られる．

定理 1 N 次の安定な線形離散時間システム $H(z)$ の 2 次モードを大きい順に $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N$ とし，$H(z)$ に対して (8) 式の変数変換を適用して得られる安定な MN 次のシステム $G(z)$ の 2 次モードを大きい順に $\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \cdots, \overline{\theta}_{MN}$ とする．このとき，$H(z)$ の 2 次モードと $G(z)$ の 2 次モードとの間に次の関係が常に成立する．

$$\overline{\theta}_i \le \theta_j \tag{38}$$

$$\begin{pmatrix} i = M(j-1)+1, M(j-1)+2, \cdots, Mj \\ j = 1, 2, \cdots, N \end{pmatrix}$$

(38) 式の等号は，変数変換として用いる関数 $1/F(z)$ が無損失有界実関数である場合に限り成立する．

証明 (30)–(31) 式より，次の関係式が得られる．

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{\mathcal{W}} \le (\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}) \otimes (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}) \tag{39}$$

補題 1 より，上式右辺において $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}$ の関係を満たす $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ が必ず存在するので，上式は次のように書き換えられる．

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{\mathcal{W}} \le (\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}) \otimes \boldsymbol{I}_M \tag{40}$$

ここで，$\boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{\mathcal{W}}$ の固有値を大きい順に $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{MN}$ とし，$(\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}) \otimes \boldsymbol{I}_M$ の固有値を大きい順に $\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_{MN}$ とすると，(40) 式より明らかに $\lambda_i \le \lambda'_i (i = 1, 2, \cdots, MN)$ であることがいえる．さらに (40) 式右辺より，$\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_{MN}$ は実際には $\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}$ の固有値が M 組重複されているものとなっていることがわかるので，$\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}$ の固有値を大きい順に $\lambda''_1, \lambda''_2, \cdots, \lambda''_N$ と表すことにより，次の関係式を導くことができる．

$$\lambda_i \le \lambda''_j \tag{41}$$

$$\begin{pmatrix} i = M(j-1)+1, M(j-1)+2, \cdots, Mj \\ j = 1, 2, \cdots, N \end{pmatrix}$$

この結果より，定理 1 が導かれる．等号が成り立つ場合の証明は，文献 [3] において述べられているので省略する． □

定理 1 は，任意の有界実関数を用いた変数変換に対して 2 次モードの値は減少するということを示している．たとえば $1/F(z)$ が 1 次の場合には，$\overline{\theta}_i \le \theta_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ の関係が常に成立する．

5 計算例

ここでは，有界実関数を用いた変数変換に対して 2 次モード の値が減少する例を示す．

以下の 2 次の離散時間システム $H(z)$ を考える．

$$H(z) = \frac{0.0931 + 0.1862z^{-1} + 0.0931z^{-2}}{1 - 1.0349z^{-1} + 0.4293z^{-2}}. \quad (42)$$

このシステムの状態空間表現における係数行列は以下のように与えられる．

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{c} & d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1.0349 & -0.4293 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0.2825 & 0.0531 & 0.0931 \end{array}\right) \quad (43)$$

上式より，このシステムの可制御性・可観測性グラミアンおよび 2 次モードは以下のように得られる．

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 2.5767 & 1.8656 \\ 1.8656 & 2.5767 \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 0.2689 & -0.0731 \\ -0.0731 & 0.0524 \end{pmatrix} \quad (45)$$

$$(\theta_1, \theta_2) = (0.7071, 0.2351) \quad (46)$$

(42) 式で与えられる $H(z)$ に対して，次の有界実関数を用いた変数変換を適用することを考える．

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{0.1181 + 0.2363z^{-1} + 0.1181z^{-2}}{1 - 0.7089z^{-1} + 0.1815z^{-2}} \quad (47)$$

この $1/F(z)$ の状態空間表現による係数行列は以下のように与えられる．

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \\ \hline \boldsymbol{\gamma} & \delta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.7089 & -0.1815 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0.3200 & 0.0967 & 0.1181 \end{array}\right) \quad (48)$$

(8) 式と (10)–(13) 式より，変数変換によって得られるシステムの伝達関数 $G(z) = H(F(z))$ とその係数行列 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ は以下のように求まる．

$$H(F(z)) = \frac{0.1317 - 0.1113z^{-1} + 0.0941z^{-2} - 0.0298z^{-3} + 0.0095z^{-4}}{1 - 1.7558z^{-1} + 1.0527z^{-2} - 0.2161z^{-3} + 0.0189z^{-4}} \quad (49)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1.0653 & -0.0738 & -0.1555 & -0.0470 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3622 & 0.1094 & 0.6905 & -0.1870 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1.1316 & 0 & 0.1337 & 0 \end{pmatrix}^t \quad (51)$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0.1046 & 0.0316 & 0.0117 & 0.0035 \end{pmatrix} \quad (52)$$

$$\mathcal{D} = 0.1317 \quad (53)$$

Fig. 2 に $H(z), 1/F(z)$ および $H(F(z))$ の振幅特性を示す．システム $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ の可制御性・可観測性グラミアンおよび 2 次モードは以下のように得られる．

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 5.5586 & 4.8045 & 3.9991 & 2.9988 \\ 4.8045 & 5.5586 & 4.7395 & 3.9991 \\ 3.9991 & 4.7395 & 4.5622 & 4.3110 \\ 2.9988 & 3.9991 & 4.3110 & 4.5622 \end{pmatrix} \quad (54)$$

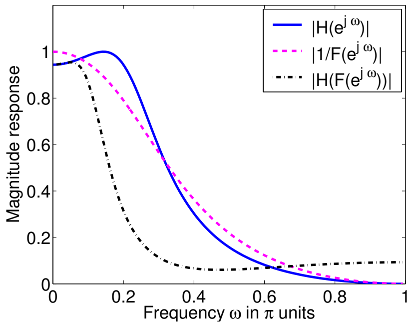

Fig. 2: Magnitude responses of $H(z), 1/F(z)$ and $H(F(z))$.

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} 0.0961 & -0.0052 & -0.0257 & -0.0004 \\ -0.0052 & 0.0021 & 0.0042 & -0.0001 \\ -0.0257 & 0.0042 & 0.0139 & -0.0008 \\ -0.0004 & -0.0001 & -0.0008 & 0.0003 \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$(\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \overline{\theta}_3, \overline{\theta}_4) = (0.5973, 0.1693, 0.0057, 0.0032) \quad (56)$$

(46) 式と (56) 式とを比較することにより，以下の関係が成立していることがわかる．

$$\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2 < \theta_1 \quad (57)$$

$$\overline{\theta}_3, \overline{\theta}_4 < \theta_2 \quad (58)$$

この結果から，有界実関数を用いた変数変換に対して 2 次モード の値は減少するということが確認される．

6 おわりに

本稿では，任意の有界実関数を用いた線形離散時間システムの変数変換に対して 2 次モード の値が減少するという性質を明らかにした．この議論は文献 [3] における議論を一般化したものとなっている．すなわち，文献 [3] では変数変換に用いる関数が無損失有界実関数 (全域通過関数) に限定されていたが，本稿ではそれを任意の有界実関数に拡張して議論した．

参考文献

[1] 川又政征, 岩月正見, 樋口龍雄, 線形システムにおける感度最小構造としての平衡形実現, 計測自動制御学会論文集, vol. 21, no. 9, pp. 900–906, 1985.

[2] B. C. Moore, Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction, *IEEE Trans., Automatic Control*, vol. AC-26, no. 1, pp. 17–32, February 1981.

[3] C. T. Mullis and R. A. Roberts, Roundoff noise in digital filters: Frequency transformations and invariants, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-24, no. 6, pp. 538–550, December 1976.

[4] P. P. Vaidyanathan, The discrete-time bounded-real lemma in digital filtering, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-32, no. 9, pp. 918–924, September 1985.

[5] C. Xiao and D. J. Hill, Generalizations and new proof of the discrete-time positive real lemma and bounded real lemma, *IEEE Trans. Circuits and Systems I*, vol. CAS-I-46, no. 6, pp. 740–743, June 1999.

[6] P. C. Opdenacker and E. A. Jonckheere, A contraction mapping preserving balanced reduction scheme and its infinity norm error bounds, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-35, no. 2, pp. 184–189, February 1988.