計測自動制御学会東北支部 60 周年記念学術講演会 (2024.12.17)
資料番号 S60-1

中心多様体定理を用いた歩容生成の安定性解析

Stability analysis of gait generation by a center manifold theorem

○清原康生 *，村松鋭一 *

○ Kousei Kiyohara*, Eiichi Muramatsu*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード： 中心多様体 (center manifold)，歩容生成 (gait generation)，安定性解析 (stability analysis)，非線形性 (nonlinearity)，マクローリン展開 (Maclaurin expansion)

連絡先： 〒 990-8510　米沢市城南 4–3–16 山形大学 工学部 機械システム工学科
村松鋭一，Tel.: (0238)26-3327，E-mail: muramatu@yz.yamagata-u.ac.jp

1.　研究の背景と目的

動物の四足歩行における各脚の協調動作は自然現象の解明，多脚ロボットへの応用などの観点から興味深い研究対象となっており，ロボットの製作や計算機シミュレーションとともに数理的アプローチによるモデリングと制御系設計の研究が進んでいる．[1)]

結合振動子における各振動子の周期軌道を脚のリズムに結び付けて歩容のモデルとするとき，それらの間に存在する位相差が重要となる．ウォーク，トロット，ギャロップという歩容の遷移をいかにモデル化するかにおいては，創発的な生成についての報告が多くされているが，さらに詳細かつ明解なメカニズムの解明が望まれている．[1)]

文献 1) において著者らは，四足の歩容生成に対する微分方程式を用いた数理モデルとしてリミットサイクルをもつ結合振動子の提案を行った．また，歩容生成に必要とされる位相差が生成されるように，各振動子の固有振動数および振動子間の結合パラメータを設定する方法を提案した．

本研究では文献 1) で提案された条件に当てはまらなかった，位相差の一つが $\pi/2$ で知られている walk 歩行の安定性解析とパラメータの設定法の提案を行う．文献 1) では，歩容生成に必要とされる位相差に一つでも $\pm\pi/2$ がある場合，ヤコビ行列が固有値 0 をもつ特殊な状況につながり，行列の固有値での安定性の解析ができなかった．本研究では，固有値 0 をもつ場合の解析方法として知られている中心多様体理論を用いて安定性解析を行う．

2.　位相の微分方程式

脚の 1 往復が位相の 0 から 2π の変化に対応するとし，左前脚，右前脚，左後脚，右後脚の位相をそれぞれ $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$, $\phi_4(t)$ と対応づけたとき文献 1) より，各脚の位相の微分方程式は

$$\dot{\phi}_1(t) = \omega_1 + k_{12}\sin(\phi_2(t) - \phi_1(t)) \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_2(t) = \omega_2 &+ k_{12}\sin(\phi_1(t) - \phi_2(t)) \\ &+ k_{23}\sin(\phi_3(t) - \phi_2(t))\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_3(t) = \omega_3 &+ k_{23}\sin(\phi_2(t) - \phi_3(t)) \\ &+ k_{34}\sin(\phi_4(t) - \phi_3(t))\end{aligned} \tag{3}$$

$$\dot{\phi}_4(t) = \omega_4 + k_{34}\sin(\phi_3(t) - \phi_4(t)) \tag{4}$$

と表せる．ここで，ω_i，$(i=1,\cdots,4)$ は各脚固有角振動数であり，実数の定数である．歩容を考える場合，固有角振動数は関節の角速度を意味し，その正負は脚運動の順逆（前進を生む方向か後退を生む方向）に対応する．各脚固有の角速度 ω_i をすべて順方向に対応させるため

$$\omega_i > 0\ ,\quad i=1,\cdots,4 \tag{5}$$

であることを歩容生成モデルとしての要請とする．

また，k_{12}, k_{23}, k_{34} は相互作用の結合係数で，実数の定数であり，

$$k_{12}\neq 0,\ k_{23}\neq 0,\ k_{34}\neq 0 \tag{6}$$

となる．

(1) 式 ～ (4) 式はリミットサイクルをもつスチュアート・ランダウ方程式を 4 脚それぞれの運動に結びつけ，それらを左前脚と右前脚，右前脚と左後脚，左後脚と右後脚とで結合し位相縮約したものである．

3. 位相差の方程式と walk の平衡点

歩容生成においては位相差を歩行に適した値に制御することが課題となるため，前節の位相の微分方程式から位相差の微分方程式を導く．位相差が walk 歩行に適した値に収束するための条件を考察するにあたり，位相差の微分方程式から得られる平衡点を明らかにする．

3.1 位相差の定義

振動子間の位相差を

$$\delta\phi_{12}(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) \tag{7}$$

$$\delta\phi_{23}(t) = \phi_2(t) - \phi_3(t) \tag{8}$$

$$\delta\phi_{34}(t) = \phi_3(t) - \phi_4(t) \tag{9}$$

と定義する．例えば $\delta\phi_{12}(t)$ は 1 と 2 の間の位相差，すなわち，左前脚と右前脚の位相差を表す．

以下，ij が 12, 23, 34 のときの位相差 $\delta\phi_{ij}$ の値を考えるときには，$\delta\phi_{ij}(t)+2n\pi$ （n は整数）は $\delta\phi_{ij}(t)$ と同一視し，$\delta\phi_{ij}(t)$ がとる値の範囲を

$$0 \leqq \delta\phi_{ij}(t) < 2\pi \tag{10}$$

とする．

3.2 位相差の微分方程式

(7) 式 ～ (9) 式を時間 t で微分し，得られた右辺に (1) 式 ～ (4) 式を代入すると，

$$\dot{\delta\phi}_{12}(t) = \delta\omega_{12} - 2k_{12}\sin\delta\phi_{12}(t) + k_{23}\sin\delta\phi_{23}(t) \tag{11}$$

$$\dot{\delta\phi}_{23}(t) = \delta\omega_{23} - 2k_{23}\sin\delta\phi_{23}(t) + k_{12}\sin\delta\phi_{12}(t) + k_{34}\sin\delta\phi_{34}(t) \tag{12}$$

$$\dot{\delta\phi}_{34}(t) = \delta\omega_{34} - 2k_{34}\sin\delta\phi_{34}(t) + k_{23}\sin\delta\phi_{23}(t) \tag{13}$$

が得られる．ただし，

$$\delta\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2\ ,\quad \delta\omega_{23} = \omega_2 - \omega_3\ ,\quad \delta\omega_{34} = \omega_3 - \omega_4 \tag{14}$$

と定義した．(11) 式 ～ (13) 式を位相差の微分方程式と呼ぶ．

3.3 walk 歩行の位相差

walk 歩行の位相差の特徴は，前脚どうしが逆位相，後脚は対角の前脚に対して約 $2/\pi$ の位相遅れで特徴づけられる [2]．これを位相差の定義に従うと

$$\delta\phi^*_{12} = \pi,\ \delta\phi^*_{23} = \frac{\pi}{2},\ \delta\phi^*_{34} = \pi \tag{15}$$

と表せる．

3.4 位相差の平衡点

walk 歩容を実行する平衡点について考える．平衡点について考察するため，(11) 式 ～ (13) 式の左辺を 0 とおいた

$$\delta\omega_{12} - 2k_{12}\sin\delta\phi_{12} + k_{23}\sin\delta\phi_{23} = 0 \tag{16}$$

$$\delta\omega_{23} - 2k_{23}\sin\delta\phi_{23} + k_{12}\sin\delta\phi_{12} + k_{34}\sin\delta\phi_{34} = 0 \tag{17}$$

$$\delta\omega_{34} - 2k_{34}\sin\delta\phi_{34} + k_{23}\sin\delta\phi_{23} = 0 \tag{18}$$

という方程式について walk 歩容の位相差である (15) 式を一つの平衡点とする場合におけるすべての平衡点を考える．

まずは，(15) 式を一つの平衡点とする場合のすべての平衡点の数を考察するため (16) 式 ∼ (18) 式を

$$\begin{pmatrix} -2k_{12} & k_{23} & 0 \\ k_{12} & -2k_{23} & k_{34} \\ 0 & k_{23} & -2k_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\delta\phi_{12} \\ \sin\delta\phi_{23} \\ \sin\delta\phi_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta\omega_{12} \\ -\delta\omega_{23} \\ -\delta\omega_{34} \end{pmatrix} \tag{19}$$

と書き直し，$(\sin\delta\phi_{12},\ \sin\delta\phi_{23},\ \sin\delta\phi_{34})$ を未知数とする線形な連立方程式と見なして考える．係数行列の行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} -2k_{12} & k_{23} & 0 \\ k_{12} & -2k_{23} & k_{34} \\ 0 & k_{23} & -2k_{34} \end{vmatrix} = -4k_{12}k_{23}k_{34} \tag{20}$$

となり，(6) 式よりこの行列式は 0 ではない．したがって係数行列が正則であるので，(19) 式の解が存在するとき，それはただ一組の $(\sin\delta\phi_{12},\ \sin\delta\phi_{23},\ \sin\delta\phi_{34})$ に限られる．(15) 式を平衡点の 1 つとする場合，$\delta\phi^*_{12}, \delta\phi^*_{34}$ は，それらとは異なる値として $\pi - \delta\phi^*_{12}$，$\pi - \delta\phi^*_{34}$ が

$$\sin\delta\phi^*_{12} = \sin(\pi - \delta\phi^*_{12}) \tag{21}$$

$$\sin\delta\phi^*_{34} = \sin(\pi - \delta\phi^*_{34}) \tag{22}$$

を満たすものとして存在する．すなわち，$\delta\phi_{12}, \delta\phi_{34}$ はそれぞれ π と 0 を解とする．また $\delta\phi_{23}$ は $\pi/2$ をたった 1 つの解とする．よって $\delta\phi_{12}, \delta\phi_{34}$ はそれぞれ 2 通り，$\delta\phi_{23}$ は 1 通りの解が存在することから，位相差としての解は 2^2 組存在する．これらの解は

$$(\delta\phi_{12}, \delta\phi_{23}, \delta\phi_{34}) = \begin{array}{l} \{(\pi, \frac{\pi}{2}, \pi) \\ (0, \frac{\pi}{2}, \pi) \\ (\pi, \frac{\pi}{2}, 0) \\ (0, \frac{\pi}{2}, 0)\} \end{array}$$

という 4 組の解として表される．

まとめると，walk 歩行に適した位相差

$$\boldsymbol{\delta\phi}_1 := (\pi, \frac{\pi}{2}, \pi) \tag{23}$$

が (11) 式 ∼ (13) 式のシステムの平衡点となるとき，

$$\boldsymbol{\delta\phi}_2 := (0, \frac{\pi}{2}, \pi) \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\delta\phi}_3 := (\pi, \frac{\pi}{2}, 0) \tag{25}$$

$$\boldsymbol{\delta\phi}_4 := (0, \frac{\pi}{2}, 0) \tag{26}$$

も平衡点となり，(11) 式 ∼ (13) 式のシステムの平衡点のすべては (23) 式 ∼ (26) 式の 4 組で表される．

4.　線形安定性解析

4 組それぞれの位相差の平衡点の安定性を考察するため，ヤコビ行列からそれぞれの平衡点に対する固有値を求める．

4.1　ヤコビ行列

それぞれの平衡点の安定性を考えるため，平衡点でのヤコビ行列を求める．(11) 式 ∼ (13) 式を

$$\dot{\delta\phi}_{12}(t) = f_{12}(\delta\omega_{12}(t), \delta\omega_{23}(t), \delta\omega_{34}(t)) \tag{27}$$

$$\dot{\delta\phi}_{23}(t) = f_{23}(\delta\omega_{12}(t), \delta\omega_{23}(t), \delta\omega_{34}(t)) \tag{28}$$

$$\dot{\delta\phi}_{34}(t) = f_{34}(\delta\omega_{12}(t), \delta\omega_{23}(t), \delta\omega_{34}(t)) \tag{29}$$

と表すと，ヤコビ行列は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{12}}{\partial\delta\phi_{12}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial\delta\phi_{23}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial\delta\phi_{34}} \\ \frac{\partial f_{23}}{\partial\delta\phi_{12}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial\delta\phi_{23}} & \frac{\partial f_{23}}{\partial\delta\phi_{34}} \\ \frac{\partial f_{34}}{\partial\delta\phi_{12}} & \frac{\partial f_{34}}{\partial\delta\phi_{23}} & \frac{\partial f_{34}}{\partial\delta\phi_{34}} \end{pmatrix} \tag{30}$$

を経由して計算されるものである．(11) 式 ∼ (13) 式を用いて計算すると

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2k_{12}\cos\delta\phi_{12} & k_{23}\cos\delta\phi_{23} & 0 \\ k_{12}\cos\delta\phi_{12} & -2k_{23}\cos\delta\phi_{23} & k_{34}\cos\delta\phi_{34} \\ 0 & k_{23}\cos\delta\phi_{23} & -2k_{34}\cos\delta\phi_{34} \end{pmatrix} \tag{31}$$

となる．(31) 式の ϕ_{12}, ϕ_{23}, ϕ_{34} に平衡点の値を代入したものがヤコビ行列となる．

また，(23) 式 ∼ (26) 式より，4 組すべての平衡点で共通な $\delta\phi_{23} = \pi/2$ を (31) 式へ代入すると，ヤコビ行列は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2k_{12}\cos\delta\phi_{12} & 0 & 0 \\ k_{12}\cos\delta\phi_{12} & 0 & k_{34}\cos\delta\phi_{34} \\ 0 & 0 & -2k_{34}\cos\delta\phi_{34} \end{pmatrix} \tag{32}$$

となる．

4.2　固有値による安定性判別

ヤコビ行列の固有値から平衡点の安定性を考える．ヤコビ行列 (32) 式の固有値は

$$\lambda = 0, -2k_{12}\cos\delta\phi_{12}, -2k_{34}\cos\delta\phi_{34} \tag{33}$$

となる．すなわち 4 組すべての平衡点のまわりの線形化行列が固有値 0 をもつ．

ここで $k_{12} < 0, k_{34} < 0$ とすると，平衡点 (24) 式 ∼ (26) 式のまわりの線形化行列は，実部が正になる固有値を一つ以上もつことになり不安定な平衡点になる．また，平衡点 (23) 式のまわりの線形化行列は固有値 0 をもち，他の二つの固有値の実部が負となる．この場合，平衡点 (23) 式の近傍で中心多様体が構成される．

5.　中心多様体

$k_{12} < 0, k_{34} < 0$ としたときの平衡点 (23) 式の安定性を考察するため，(23) 式を平衡点とする位相差の微分方程式の中心多様体を考える．

(23) 式を平衡点とする場合の $\delta\omega_{12}$，$\delta\omega_{23}$，$\delta\omega_{34}$ を決定するため，(16) 式 ∼ (18) 式に (23) 式を代入すると

$$\delta\omega_{12} = -k_{23}\ ,\quad \delta\omega_{23} = 2k_{23}\ ,\quad \delta\omega_{34} = -k_{23} \tag{34}$$

を得る．これらを (11) 式 ∼ (13) 式に代入すると，位相差の微分方程式は

$$\dot{\delta\phi}_{12}(t) = -k_{23} - 2k_{12}\sin\delta\phi_{12}(t) + k_{23}\sin\delta\phi_{23}(t) \tag{35}$$

$$\dot{\delta\phi}_{23}(t) = 2k_{23} - 2k_{23}\sin\delta\phi_{23}(t) + k_{12}\sin\delta\phi_{12}(t) + k_{34}\sin\delta\phi_{34}(t) \tag{36}$$

$$\dot{\delta\phi}_{34}(t) = -k_{23} - 2k_{34}\sin\delta\phi_{34}(t) + k_{23}\sin\delta\phi_{23}(t) \tag{37}$$

と書き直せる．

原点まわりで近似した中心多様体を考えることにより，原点での平衡点の安定性を調べることが可能である．従って，平衡点を原点に移動させるため

$$\delta\phi'_{12}(t) = \delta\phi_{12}(t) - \pi \tag{38}$$

$$\delta\phi'_{23}(t) = \delta\phi_{23}(t) - \frac{\pi}{2} \tag{39}$$

$$\delta\phi'_{34}(t) = \delta\phi_{34}(t) - \pi \tag{40}$$

とし平行移動を行うと (35) 式 ∼ (37) 式は

$$\dot{\delta\phi}'_{12}(t) = -k_{23} + 2k_{12}\sin\delta\phi'_{12}(t) + k_{23}\cos\delta\phi'_{23}(t) \tag{41}$$

$$\dot{\delta\phi}'_{23}(t) = 2k_{23} - 2k_{23}\cos\delta\phi'_{23}(t) - k_{12}\sin\delta\phi'_{12}(t) - k_{34}\sin\delta\phi'_{34}(t) \tag{42}$$

$$\dot{\delta\phi}'_{34}(t) = -k_{23} + 2k_{34}\sin\delta\phi'_{34}(t) + k_{23}\cos\delta\phi'_{23}(t) \tag{43}$$

となり，この微分方程式の原点の安定性を調べればよい．

次に線形部と非線形部に分割するため，マクローリン展開を行うと

$$\begin{aligned}\dot{\delta\phi}'_{12}(t) = &-k_{23}\\ &+2k_{12}\left(\delta\phi'_{12}(t) - \frac{\delta\phi'_{12}(t)^3}{3!} + \frac{\delta\phi'_{12}(t)^5}{5!} - \cdots\right)\\ &+k_{23}\left(1 - \frac{\delta\phi'_{23}(t)^2}{2!} + \frac{\delta\phi'_{23}(t)^4}{4!} - \cdots\right)\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}\dot{\delta\phi}'_{23}(t) = &\ 2k_{23}\\ &-2k_{23}\left(1 - \frac{\delta\phi'_{23}(t)^2}{2!} + \frac{\delta\phi'_{23}(t)^4}{4!} - \cdots\right)\\ &-k_{12}\left(\delta\phi'_{12}(t) - \frac{\delta\phi'_{12}(t)^3}{3!} + \frac{\delta\phi'_{12}(t)^5}{5!} - \cdots\right)\\ &-k_{34}\left(\delta\phi'_{34}(t) - \frac{\delta\phi'_{34}(t)^3}{3!} + \frac{\delta\phi'_{34}(t)^5}{5!} - \cdots\right)\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}\dot{\delta\phi}'_{34}(t) = &-k_{23}\\ &+2k_{34}\left(\delta\phi'_{34}(t) - \frac{\delta\phi'_{34}(t)^3}{3!} + \frac{\delta\phi'_{34}(t)^5}{5!} - \cdots\right)\\ &+k_{23}\left(1 - \frac{\delta\phi'_{23}(t)^2}{2!} + \frac{\delta\phi'_{23}(t)^4}{4!} - \cdots\right)\end{aligned} \tag{46}$$

となる．また，マクローリン展開によって生じた $\delta\phi'_{12}$, $\delta\phi'_{23}$, $\delta\phi'_{34}$ に関して 4 次以上の項をそれぞれ以下の関数として表すことにする．

$$r_1(\phi'_{12}) = \frac{\delta\phi'_{12}(t)^5}{5!} - \frac{\delta\phi'_{12}(t)^7}{7!} + \cdots \tag{47}$$

$$r_2(\phi'_{23}) = \frac{\delta\phi'_{23}(t)^4}{4!} - \frac{\delta\phi'_{23}(t)^6}{6!} + \cdots \tag{48}$$

$$r_3(\phi'_{34}) = \frac{\delta\phi'_{34}(t)^5}{5!} - \frac{\delta\phi'_{34}(t)^7}{7!} + \cdots \tag{49}$$

これらの関数を用いて (44) 式 ∼ (46) 式を整理すると

$$\dot{\delta\phi}'_{12}(t) = 2k_{12}\left(\delta\phi'_{12}(t) - \frac{\delta\phi'_{12}(t)^3}{6}\right)$$

$$-\frac{1}{2}k_{23}\delta\phi'_{23}(t)^2+2k_{12}r_1(\phi'_{12})+k_{23}r_2(\phi'_{23}) \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\dot{\delta\phi}'_{23}(t)&=k_{23}\delta\phi'_{23}(t)^2\\&-k_{12}\left(\delta\phi'_{12}(t)-\frac{\delta\phi'_{12}(t)^3}{6}\right)\\&-k_{34}\left(\delta\phi'_{34}(t)-\frac{\delta\phi'_{34}(t)^3}{6}\right)\\&-2k_{23}r_2(\phi'_{23})-k_{12}r_1(\phi'_{12})-k_{34}r_3(\phi'_{34})\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\dot{\delta\phi}'_{34}(t)&=2k_{34}\left(\delta\phi'_{34}(t)-\frac{\delta\phi'_{34}(t)^3}{6}\right)\\&-\frac{1}{2}k_{23}\delta\phi'_{23}(t)^2+2k_{34}r_3(\phi'_{34})+k_{23}r_2(\phi'_{23})\end{aligned} \tag{52}$$

となる．

この方程式の平衡点 $(0,0,0)$ のまわりの線形化行列は

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2k_{12}&0&0\\-k_{12}&0&-k_{34}\\0&0&2k_{34}\end{pmatrix} \tag{53}$$

であり，この線形化行列の固有値は

$$\lambda=0,\ 2k_{12},\ 2k_{34} \tag{54}$$

である．

(50) 式 ～ (52) 式の微分方程式を安定方向と中立安定方向に整理するため，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを用いて変数変換をする．

固有値 $0, 2k_{12}, 2k_{34}$ に対する固有ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{x_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{x_2}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{x_3}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

である．変数変換

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\delta\phi'_{12}\\\delta\phi'_{23}\\\delta\phi'_{34}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}v+w\\u-w\\-v+w\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{55}$$

を行うと

$$\begin{aligned}\dot{v}+\dot{w}&=2k_{12}\left\{(v+w)-\frac{(v+w)^3}{6}\right\}\\&-\frac{k_{23}}{2}(u-w)^2+2k_{12}r_1(v+w)\\&+k_{23}r_2(u-w)\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}\dot{u}-\dot{w}&=k_{23}(u-w)^2\\&-k_{12}\left\{(v+w)-\frac{(v+w)^3}{6}\right\}\\&-k_{34}\left\{(-v+w)-\frac{(-v+w)^3}{6}\right\}\\&-2k_{23}r_2(u-w)-k_{12}r_1(v+w)\\&-k_{34}r_3(-v+w)\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}-\dot{v}+\dot{w}&=2k_{34}\left\{(-v+w)-\frac{(-v+w)^3}{6}\right\}\\&-\frac{k_{23}}{2}(u-w)^2+2k_{34}r_3(-v+w)\\&+k_{23}r_2(u-w)\end{aligned} \tag{58}$$

となる．

(56) 式 ～ (58) 式を整理すると

$$\dot{u}=\frac{k_{23}}{2}(u-w)^2-k_{23}r_2(u-w) \tag{59}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}&=k_{12}\left\{(v+w)-\frac{(v+w)^3}{6}\right\}\\&-k_{34}\left\{(-v+w)-\frac{(-v+w)^3}{6}\right\}\\&+k_{12}r_1(v+w)-k_{34}r_3(-v+w)\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}\dot{w}&=k_{12}\left\{(v+w)-\frac{(v+w)^3}{6}\right\}\\&+k_{34}\left\{(-v+w)-\frac{(-v+w)^3}{6}\right\}\\&-\frac{k_{23}}{2}(u-w)^2+k_{12}r_1(v+w)\\&+k_{23}r_2(u-w)+k_{34}r_3(-v+w)\end{aligned} \tag{61}$$

となる．

ここで，ある負の実数の定数 k を用いて $k_{12}=k_{34}=k$ と仮定すると (59) 式 ～ (61) 式は

$$\dot{u}=\frac{k_{23}}{2}(u-w)^2-k_{23}r_2(u-w) \tag{62}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}&=2kv+\frac{-(v+w)^3}{6}k+\frac{(-v+w)^3}{6}k\\&+kr_1(v+w)-kr_3(-v+w)\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}\dot{w}&=2kw+\frac{-(v+w)^3}{6}k-\frac{(-v+w)^3}{6}k\\&-\frac{k_{23}}{2}(u-w)^2+kr_1(v+w)\\&+k_{23}r_2(u-w)+kr_3(-v+w)\end{aligned} \tag{64}$$

となり安定方向と中立安定方向に分割できる．

安定方向の方程式である (63) 式と (64) 式を正方行列を用いてまとめると (62) 式 ∼(64) 式は

$$\dot{u} = \frac{k_{23}}{2}(u-w)^2 \tag{65}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-(v+w)^3}{6}k + \frac{(-v+w)^3}{6}k \\ \frac{-(v+w)^3}{6}k - \frac{(-v+w)^3}{6}k - \frac{k_{23}}{2}(u-w)^2 \end{pmatrix} \tag{66}$$

と書き換えられる．ここで原点近傍の中心多様体を調べるため u, v, w に関してそれぞれ 4 次以上の項である $k_{23}r_2(u-w), kr_1(v+w), kr_3(-v+w)$ を無視し近似した．

中心多様体理論より原点近傍の中心多様体 $W^c(0,0,0)$ は 1 変数 u で

$$W^c(0,0,0) = (u, g(u), h(u)) \tag{67}$$

と表せる．

また中心多様体 $W^c(0,0,0)$ は原点を通り，原点で u 平面と接するので未知係数 α, β を用いると原点近傍で

$$v = g(u) = \alpha_1 u^2 + \alpha_2 u^3 \tag{68}$$

$$w = h(u) = \beta_1 u^2 + \beta_2 u^3 \tag{69}$$

となり，それぞれの時間微分は

$$\dot{v} = \left(2\alpha_1 u + 3\alpha_2 u^2\right)\dot{u} \tag{70}$$

$$\dot{w} = \left(2\beta_1 u + 3\beta_2 u^2\right)\dot{u} \tag{71}$$

となる．これら 2 式に (65) 式を代入すると

$$\dot{v} = \left(2\alpha_1 u + 3\alpha_2 u^2\right)\cdot\frac{k_{23}}{2}(u-w)^2 \tag{72}$$

$$\dot{w} = \left(2\beta_1 u + 3\beta_2 u^2\right)\cdot\frac{k_{23}}{2}(u-w)^2 \tag{73}$$

となり，さらにこれら 2 式に (68) 式, (69) 式を代入すると

$$\dot{v} = \left(2\alpha_1 u + 3\alpha_2 u^2\right)\cdot\frac{k_{23}}{2}\left\{u - \left(\beta_1 u^2 + \beta_2 u^3\right)\right\}^2 \tag{74}$$

$$\dot{w} = \left(2\beta_1 u + 3\beta_2 u^2\right)\cdot\frac{k_{23}}{2}\left\{u - \left(\beta_1 u^2 + \beta_2 u^3\right)\right\}^2 \tag{75}$$

となる．

また v, w の微分方程式 (66) 式の左辺に (74) 式, (75) 式を，右辺に (68) 式，(69) 式をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \left(2\alpha_1 u + 3\alpha_2 u^2\right)\cdot\frac{k_{23}}{2}\left\{u - \left(\beta_1 u^2 + \beta_2 u^3\right)\right\}^2 \\ \left(2\beta_1 u + 3\beta_2 u^2\right)\cdot\frac{k_{23}}{2}\left\{u - \left(\beta_1 u^2 + \beta_2 u^3\right)\right\}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 u^2 + \alpha_2 u^3 \\ \beta_1 u^2 + \beta_2 u^3 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{-\left\{\left(\alpha_1 u^2+\alpha_2 u^3\right)+\left(\beta_1 u^2+\beta_2 u^3\right)\right\}^3}{6}k \\ \frac{-\left\{\left(\alpha_1 u^2+\alpha_2 u^3\right)+\left(\beta_1 u^2+\beta_2 u^3\right)\right\}^3}{6}k \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{\left\{-\left(\alpha_1 u^2+\alpha_2 u^3\right)+\left(\beta_1 u^2+\beta_2 u^3\right)\right\}^3}{6}k \\ -\frac{\left\{-\left(\alpha_1 u^2+\alpha_2 u^3\right)+\left(\beta_1 u^2+\beta_2 u^3\right)\right\}^3}{6}k \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \\ -\frac{k_{23}}{2}\left\{u - \left(\beta_1 u^2 + \beta_2 u^3\right)\right\}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{76}$$

となり，係数比較をすることによって未知係数 α, β を求める．

(76) 式を係数比較すると

$$\alpha_1 = 0\,, \alpha_2 = 0\,, \beta_1 = \frac{k_{23}}{4k}\,, \beta_2 = 0 \tag{77}$$

である．

これらの未知係数を (68) 式，(69) 式に代入すると

$$v = g(u) = 0 \tag{78}$$

$$w = h(u) = \frac{k_{23}}{4k}u^2 \tag{79}$$

となり原点近傍の中心多様体 $W^c(0,0,0)$ は

$$W^c(0,0,0) = \left(u, 0, \frac{k_{23}}{4k}u^2\right) \tag{80}$$

となる．

6. 安定性解析

求めた原点近傍の中心多様体から平衡点である原点の安定性を吟味する．中立安定方向に関しての平衡点の安定性を調べるため，(65) 式に (79) 式を代入すると

$$\dot{u} = \frac{k_{23}}{2}\left(u - \frac{k_{23}}{4k}u^2\right)^2 \tag{81}$$

$$= \frac{k_{23}}{2}u^2 - \frac{k_{23}^2}{4k}u^3 + O\left(u^4\right) \tag{82}$$

$$\approx \frac{k_{23}}{2}u^2 \tag{83}$$

となる．すなわち原点近傍では，$k_{23} > 0$ のとき原点を最小値とする二次関数，$k_{23} < 0$ のとき原点を最大値とする二次関数になる．これを模式的に相図にしたものを Fig.1 に示す．

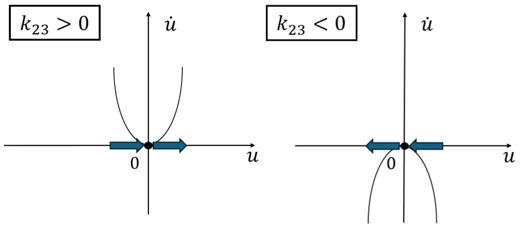

Fig. 1　原点近傍における (83) 式の模式的な相図

Fig.1 から，平衡点 $u = 0$ に収束していく解軌道が存在することが確認できる．これは中心多様体理論より，平衡点 (23) 式に収束することと一致している．

第 4.2 節で述べた固有値による安定性判別により，位相差の微分方程式に関して収束する可能性のある平衡点は (23) 式のみである．これは Fig.1 に関して，解が原点以外で u 軸と交わることはないことを意味する．また，3.1 節で定義した位相差では，位相差がとる値の範囲を決め，$\delta\phi_{ij}(t) + 2n\pi$（$n$ は整数）は $\delta\phi_{ij}(t)$ と同一視するものとしている．

これら二つの節で述べた内容から，Fig.1 で一見原点から離れていく解軌道も，最終的には平衡点 (23) 式に収束する．

変数 u は位相差 $\delta\phi_{12}(t)$，$\delta\phi_{23}(t)$，$\delta\phi_{34}(t)$ を平行移動し，変数変換したものであり

$$u = \delta\phi_{23}(t) + \frac{1}{2}\left(\delta\phi_{12}(t) + \delta\phi_{34}(t)\right) - \frac{3}{2}\pi \quad (84)$$

と表せる．すなわち

$$-\frac{3}{2}\pi \le u < \frac{5}{2}\pi \quad (85)$$

である．

7.　パラメータの設定方法

位相差の微分方程式である (11) 式 ～ (13) 式において，walk 歩行の位相差である $\delta\phi^*_{12} = \pi$, $\delta\phi^*_{23} = \pi/2$, $\delta\phi^*_{34} = \pi$ にそれぞれの位相差を収束させたい場合のパラメータ $\delta\omega_{12}, \delta\omega_{23}, \delta\omega_{34}, k_{12}, k_{23}, k_{34}$ の設定法について吟味した．

上記の内容を満たすための条件として

$$k_{12} = k_{34} < 0,\ k_{23} \neq 0 \quad (86)$$

$$\delta\omega_{12} = -k_{23},\ \delta\omega_{23} = 2k_{23},\ \delta\omega_{34} = -k_{23} \quad (87)$$

を満たすパラメータを設定する必要がある．このとき，それぞれの位相差の初期値は任意の値でよい．

8.　適用例に対するシミュレーション

例として，4 つのパターンでの数値シミュレーションから解軌道を追い妥当性を確認する．

8.1　適用例 1

パラメータを k_{12}, k_{23}, k_{34} を

$$k_{12} = k_{34} = -0.5,\ k_{23} = 0.5 \quad (88)$$

と設定すると (34) 式よりパラメータ $\delta\omega_{12}$，$\delta\omega_{23}$，$\delta\omega_{34}$ は

$$\delta\omega_{12} = -0.5,\ \delta\omega_{23} = 1.0,\ \delta\omega_{34} = -0.5 \quad (89)$$

となる．これは (86) 式，(87) 式の条件を満たす．

位相差の初期値を

$$\delta\phi_{12}(0) = 3.0,\ \delta\phi_{23}(0) = 1.5,\ \delta\phi_{34}(0) = 2.0 \quad (90)$$

とした場合，(84) 式から u の初期値 u_0 は

$$u_0 = -0.712\cdots \quad (91)$$

である．従って，uvw 空間での中心多様体において解が平衡点である原点に向かっていく．すなわち，解軌道は $\delta\phi_{12} = \pi$, $\delta\phi_{23} = \pi/2$, $\delta\phi_{34} = \pi$ に向かっていくことがわかる．

パラメータ $k_{12}, k_{23}, k_{34}, \delta\omega_{12}, \delta\omega_{23}, \delta\omega_{34}$ を (88) 式，(89) 式とし，位相差の初期値を (90) 式と設定した数値シミュレーションを行った (Fig.2)．$\delta\phi_{12} = \pi$, $\delta\phi_{23} = \pi/2$, $\delta\phi_{34} = \pi$ の位相差が現れていることが確認できる．

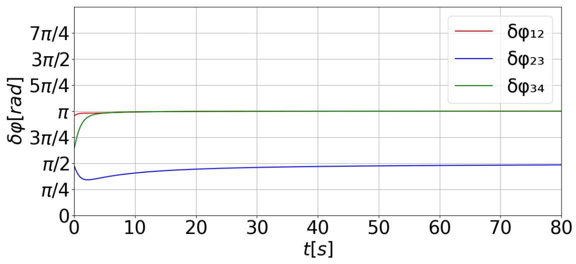

Fig. 2　適用例 1 の数値シミュレーション

8.2　適用例 2

パラメータ $k_{12}, k_{23}, k_{34}, \delta\omega_{12}, \delta\omega_{23}, \delta\omega_{34}$ を適用例 1 と同様に (88) 式，(89) 式と設定した．

位相差の初期値を

$$\delta\phi_{12}(0) = 4.0,\ \delta\phi_{23}(0) = 2.0,\ \delta\phi_{34}(0) = 3.1 \quad (92)$$

とした場合，u_0 は

$$u_0 = 0.838\cdots \quad (93)$$

である．従って，uvw 空間での中心多様体において解は平衡点 $u=0$ から離れていくが，最終的に解軌道は $\delta\phi_{12}=\pi$, $\delta\phi_{23}=\pi/2$, $\delta\phi_{34}=\pi$ に向かっていく．この条件で数値シミュレーションを行った (Fig.3)．$\delta\phi_{12}=\pi$, $\delta\phi_{23}=\pi/2$, $\delta\phi_{34}=\pi$ の位相差が現れていることが確認できる．

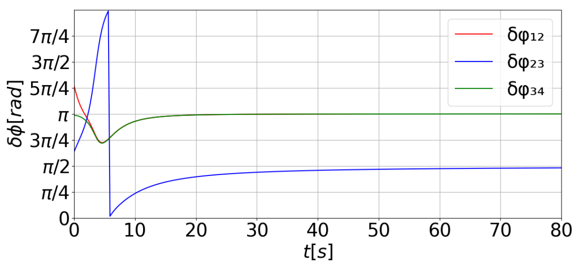

Fig. 3　適用例 2 の数値シミュレーション

8.3　適用例 3

パラメータを k_{12}, k_{23}, k_{34} を

$$k_{12} = k_{34} = -0.5,\ k_{23} = -0.5 \quad (94)$$

と設定すると (34) 式よりパラメータ $\delta\omega_{12}$, $\delta\omega_{23}$, $\delta\omega_{34}$ は

$$\delta\omega_{12} = 0.5,\ \delta\omega_{23} = -1.0,\ \delta\omega_{34} = 0.5 \quad (95)$$

となる．これは (86) 式，(87) 式の条件を満たす．

位相差の初期値を

$$\delta\phi_{12}(0) = 4.0,\ \delta\phi_{23}(0) = 2.0,\ \delta\phi_{34}(0) = 3.0 \quad (96)$$

とした場合，(84) 式から u の初期値 u_0 は

$$u_0 = 0.788\cdots \quad (97)$$

である．従って，uvw 空間での中心多様体において解が原点に向かっていく．すなわち解軌道は $\delta\phi_{12}=\pi$, $\delta\phi_{23}=\pi/2$, $\delta\phi_{34}=\pi$ に向かっていくことがわかる．この条件で数値シミュレーションを行った (Fig.4)．$\delta\phi_{12}=\pi$, $\delta\phi_{23}=\pi/2$, $\delta\phi_{34}=\pi$ の位相差が現れていることが確認できる．

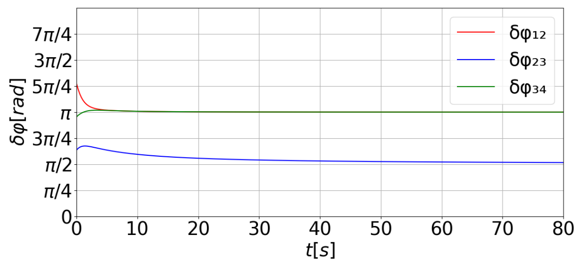

Fig. 4　適用例 3 の数値シミュレーション

8.4　適用例 4

パラメータ $k_{12}, k_{23}, k_{34}, \delta\omega_{12}, \delta\omega_{23}, \delta\omega_{34}$ を適用例 3 と同様に (94) 式，(95) 式と設定した．

位相差の初期値を

$$\delta\phi_{12}(0) = 3.0,\ \delta\phi_{23}(0) = 1.0,\ \delta\phi_{34}(0) = 3.5 \quad (98)$$

とした場合，(84) 式から u の初期値 u_0 は

$$u_0 = -0.462\cdots \quad (99)$$

である．従って，uvw 空間での中心多様体において解は平衡点 $u=0$ から離れていくが，最終的に解軌道は $\delta\phi_{12}=\pi$, $\delta\phi_{23}=\pi/2$, $\delta\phi_{34}=\pi$ に向かっていく．この条件で数値シミュレーションを行った (Fig.5)．$\delta\phi_{12}=\pi$, $\delta\phi_{23}=\pi/2$, $\delta\phi_{34}=\pi$ の位相差が現れていることが確認できる．

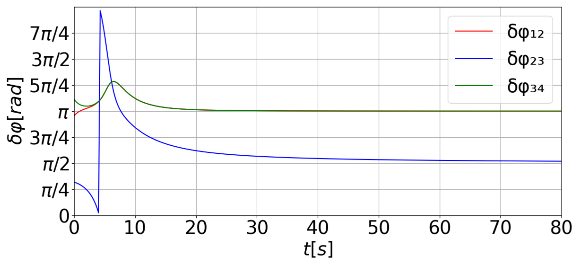

Fig. 5　適用例 4 の数値シミュレーション

8.5　シミュレーション

適用例 1 と適用例 3 において，それぞれの解軌道を uvw 空間で数値シミュレーションを行った (Fig.6)(Fig.7)．青い解軌道が適用例 1，緑の解軌道が適用例 3 である．

中心多様体上と予想されるプロットが多い箇所で

$$W^c(0,0,0) = \left(u, 0, -\frac{k_{23}}{2}u^2\right) \tag{100}$$

となっていることが確認できる．

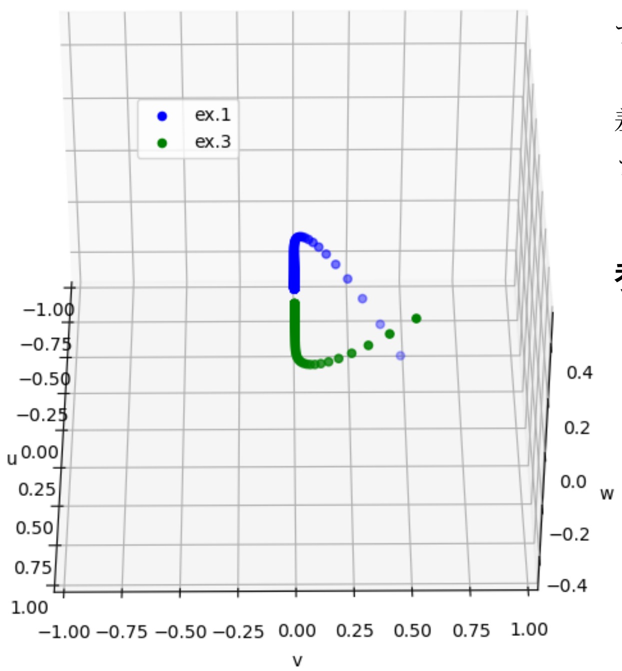

Fig. 6　適用例 1,3 の解軌道 1

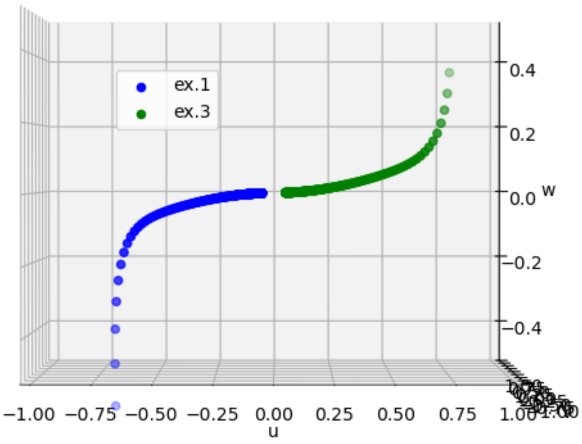

Fig. 7　適用例 1,3 の解軌道 2

9.　まとめ

文献 1) で提案された結合振動子を用いた歩容生成のモデリングについて，walk 歩行を生成するための安定解析とパラメータの設定方法を示した．中心多様体定理は，固有値 0 をもつ平衡点の安定解析に適している．本研究では中心多様体縮約で，1 変数にすることにより中心多様体を導出した．

また，walk 歩行を生成するためのそれぞれの位相差の初期値は任意である．これにより歩容遷移を行うモデリングの生成にも取り入れることができる．

参考文献

1) 奥平，村松：スチュワート・ランダウ方程式を用いた歩容生成のモデリングと制御，第 68 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集,pp.536–543(2024) システム制御情報学会論文誌掲載予定 (2025)

2) 湯浅，伊藤（義)，伊藤（正)：分岐現象を用いた多様なパターンを生成する自律分散システム；計測自動制御学会論文集，vol.27, no.11, pp.1307-1314 (1991)

3) 木村浩：ロコモーション・パターン創発研究の現状と今後の展望；日本ロボット学会誌, vo1.41, No.3, pp.217-222 (2023)

4) 大脇大：動物の歩容遷移を再現する４脚ロボット；日本ロボット学会誌，vol.37, no.2, pp.126-131 (2019)

5) 群，森田：生物リズムと力学系，共立出版 (2011)

6) 桑村：パターン形成と分岐理論，共立出版 (2017)

7) 湯浅，伊藤：自律分散システムとその歩行パターン発生器への応用；計測自動制御学会論文集，vol.25, no.2, pp.180-187 (1989)