計測自動制御学会東北支部 第 S60 回研究集会 (2024.12.17)
資料番号 S60-4

結合振動子を用いた多足移動のための歩容生成

Gait generation for multi-legged locomotion using coupled oscillators

○齋藤怜斗 *，村松鋭一 *,

○ Reito Saito*, Eiichi Muramatsu*

*山形大学

*Yamagata University

キーワード： 結合振動子 (coupled oscillators), スチュアート・ランダウ方程式 (Stuart-Landau Equation), 位相縮約 (phase reduction), 多足歩容 (multi-legged gait)

連絡先： 〒 992-8510 米沢市城南 4 丁目 3-16 山形大学大学院理工学研究科機械システム工学専攻 村松鋭一，Tel.: (0238)26-3327，E-mail: muramatu@yz.yamagata-u.ac.jp

1. 研究の背景と目的

多足歩行における各脚の協調動作に対してさまざまな研究が進んでいる [1), 2)]．歩行のリズム生成の数理モデルとしてリミットサイクルをもつ結合振動子がある．各振動子の周期軌道を脚のリズムに結び付けて歩容のモデルとするとき，それらの間に存在する位相差が重要となる．文献 3)∼5) では，振動子を結合した微分方程式系に対して数理的な解析と設計によって歩容生成のモデルを提案している．文献 6) では四足歩行のモデリングのため，スチュアート・ランダウ方程式を結合し，歩容生成に必要とされる位相差が生成されるように，各振動子の固有各振動数および振動子間の結合係数を設定する方法が提案されている．

本研究では文献 6) で示されている四足に対する方法を n 足に拡張する．ただし n は 4 以上の偶数である．脚の本数が n 本となるような場合の歩容生成を考え，歩行に適した位相差が与えられるとする．任意の初期値から与えられた位相差が生成されるような結合振動子におけるパラメータの設定方法を提案する．

2. 振動子の微分方程式と位相縮約

本研究では複数の振動子を結合した微分方程式系を用いる．ここでは結合する前の単体の振動子の微分方程式と位相縮約，および，縮約によって得られる位相の微分方程式について説明する [7)]．

2.1 スチュアート・ランダウ方程式

時間とともに変化する複素数 $z(t)$ に関する微分方程式

$$\dot{z}(t) = (\mu + \omega i)z(t) - (1 + bi)|z(t)|^2 z(t) \quad (1)$$

はスチュアート・ランダウ方程式と呼ばれる．ここで $\mu > 0, \omega$，b は実数の定数，i は虚数単位である．複素平面上の任意の点を初期値 $z(0)$ としたとき，解 $z(t)$ の軌道は半径 $\sqrt{\mu}$，角速度 $\omega - b\mu$ の円軌道にリミットサイクルとして収束する．例えば $\mu = 4, \omega = 2, b = 1$ のとき，複素平面上の速度ベクトル $\dot{z}(t)$ は図 1 のようなベクトル場を形成し，図中の円がリミットサイクルとなる．

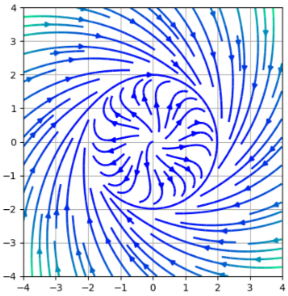

Fig. 1　複素平面上のベクトル場とリミットサイクル

2.2　位相の定義

本研究では振動子の周期軌道上の位相が重要となる．ここで同期現象の解析 [7)] ∼ [9)] で用いられる位相縮約を適用する．

まず，リミットサイクル上の軌道を $\boldsymbol{p}(t)$ とする．リミットサイクルの周期（時間）T に対して $\omega = 2\pi/T$ によって定まる角速度を ω とする．軌道上の位相はある初期時刻から経過時間 t を用いて

$$\phi(t) = \omega t \tag{2}$$

を軌道を各点に割り当てたものである．

リミットサイクルに収束する前の解軌道 $z(t)$ にはつぎのように位相を定める．リミットサイクルから離れたある点 z_0 を初期状態とする解軌道 $z(t)$ がリミットサイクルに収束するとする．このとき初期状態 z_0 に対応する位相は

$$\lim_{t\to\infty} \| z(t; z_0) - \boldsymbol{p}(\phi_0/\omega + t) \| = 0 \tag{3}$$

となるような ϕ_0 として定義される．このような対応をさまざまな解軌道の初期状態に適用することにより状態空間の各点に位相の値が定まる．

状態空間で解軌道 $z(t)$ が時間とともに空間内を動くことにより，空間内の各点に定まっている位相の値が変化する．この位相の時間変化を $\phi(t)$ で表す．

2.3　位相の微分方程式

位相 $\phi(t)$ が満たす微分方程式は (2) 式から得られる

$$\dot{\phi}(t) = \omega \tag{4}$$

である．ただし，後に述べる結合振動子系においては，他の振動子との結合が摂動項を生みだし，

$$\dot{\phi}(t) = \omega + \boldsymbol{Z}(\phi) \cdot \boldsymbol{G}(\phi, \phi'; k) \tag{5}$$

という形式になる．ここで $\boldsymbol{Z}(\phi)$ は位相感受関数であり，

$$\boldsymbol{Z}(\phi) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}(\phi/\omega)} \tag{6}$$

と定義されるものである．また，$\boldsymbol{G}(\phi, \phi'; k)$ は摂動を表し，他の振動子との相互作用で決まるベクトル値関数である．ここで ϕ' は他の振動子の位相，k は他の振動子との結合係数である．(5) 式は，他の振動子からの作用によって軌道の摂動 $\boldsymbol{G}$ が生じたとき，それが位相へどの程度影響するかを表す位相感受関数 $\boldsymbol{Z}(\phi)$ を用いて位相の時間変化を記述するものである．(4) 式は無摂動系の位相方程式，(5) 式は摂動系の位相方程式である．

3.　結合振動子と問題設定

この節では本研究で提案する歩容生成モデルとしての結合振動子を説明する．また，各脚間の位相差を定義し，問題設定を明らかにしておく．

3.1　スチュアート・ランダウ方程式の結合

先頭左脚，先頭右脚，次列左脚，次列右脚の順で各脚の往復運動のリズムをそれぞれ，複素数 $z_1(t), z_2(t), z_3(t), \cdots, z_{n-1}(t)$，$z_n(t)$ となるような変数とするスチュアート・ランダウ方程式の周期解の位相に対応づける．脚の 1 往復が位相の 0 から 2π の変化に対応する．脚間には相互作用が存在するとし，それらを結合項として加えたつぎの方程式を本研究で提案する結合振動子とする．

$$\dot{z}_1(t) = (\mu_1 + \omega_1 i)z_1(t) - (1 + b_1 i)|z_1(t)|^2 z_1(t) + k_{12}(z_2(t) - z_1(t)) \tag{7}$$

$$\dot{z}_2(t) = (\mu_2 + \omega_2 i)z_2(t) - (1 + b_2 i)|z_2(t)|^2 z_2(t) + k_{12}(z_1(t) - z_2(t)) + k_{23}(z_3(t) - z_2(t)) \tag{8}$$

$$\dot{z}_3(t) = (\mu_3 + \omega_3 i)z_3(t) - (1 + b_3 i)|z_3(t)|^2 z_3(t) + k_{23}(z_2(t) - z_3(t)) + k_{34}(z_4(t) - z_3(t)) \tag{9}$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{n-1}(t) = (\mu_{n-1} + \omega_{n-1} i)z_{n-1}(t) - (1 + b_{n-1} i)|z_{n-1}(t)|^2 z_{n-1}(t) + k_{n-2n-1}(z_{n-2}(t) - z_{n-1}(t)) + k_{n-1n}(z_n(t) - z_{n-1}(t)) \tag{10}$$

$$\dot{z}_n(t) = (\mu_n + \omega_n i)z_n(t) - (1 + b_n i)|z_n(t)|^2 z_n(t) + k_{n-1n}(z_{n-1}(t) - z_n(t)) \tag{11}$$

ここで，$\mu_i > 0, \omega_i, b_i \ (i = 1, \cdots, n)$ は実数の定数である．また，$k_{ii+1} \ (i = 1, \cdots, n-1)$ は実数の定数であり，

$$k_{ii+1} \neq 0\ , \quad i = 1, \cdots, n-1 \tag{12}$$

とする．(7) 式 ~ (11) 式における結合と各脚との対応は図 2 で表される．

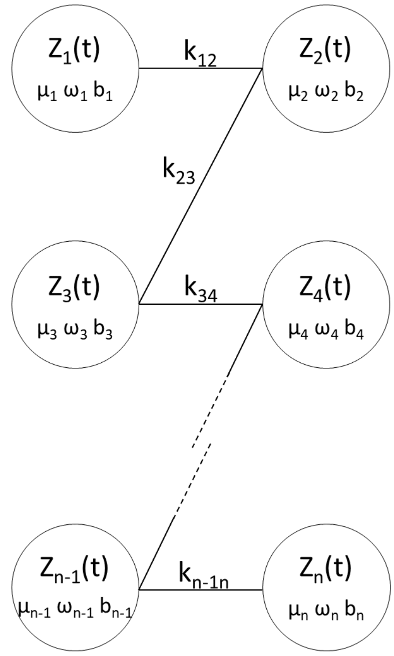

Fig. 2　各脚の結合

この図では先頭左脚，先頭右脚，次列左脚，次列右脚の順に 1, 2, 3, 4, $\cdots$, n の番号に対応づけている．また，各脚間の相互作用の係数は，1 と 2 の間の相互作用の係数が k_{12}，2 と 3 の間の相互作用の係数が k_{23}，$n-1$ と n の間の係数が k_{n-1n} となるようにそれぞれ設定する．

3.2　位相差の定義

各振動子の変数 $z_i(t)$ $(i = 1, \cdots, n)$ に対して第 2.2 節で述べた意味での位相を $\phi_i(t)$ $(i = 1, \cdots, n)$ とする．振動子間の位相差を

$$\delta\phi_{12}(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) \tag{13}$$

$$\delta\phi_{23}(t) = \phi_2(t) - \phi_3(t) \tag{14}$$

$$\delta\phi_{34}(t) = \phi_3(t) - \phi_4(t) \tag{15}$$

$$\vdots$$

$$\delta\phi_{n-1n}(t) = \phi_{n-1}(t) - \phi_n(t) \tag{16}$$

と定義する．例えば $\delta\phi_{12}(t)$ は 1 と 2 の間の位相差，すなわち，先頭左脚と先頭右脚の位相差を表す．

以下，ij $(ij = 12, 23, 34 \cdots, n-1n)$ の位相差 $\delta\phi_{ij}$ の値を考えるときには，$\delta\phi_{ij}(t) + 2n\pi$（$n$ は整数）と $\delta\phi_{ij}(t)$ と同一視し，$\delta\phi_{ij}(t)$ がとる値の範囲を

$$-\pi < \delta\phi_{ij}(t) \leqq \pi \tag{17}$$

とする．

3.3　問題設定

本研究では歩行に適した位相差が $\delta\phi_{ii+1}$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ と与えられているとする．ただし，それらは $\pm\frac{\pi}{2}$ を除く任意の値とする．例えば，

$$\delta\phi_{ij}^{*} = \pi \ , \ (ij = 12, 34, 56, \cdots, n-1n)$$
$$\delta\phi_{ij}^{*} = \frac{\pi}{12} \ , \ (ij = 23, 46, 78, \cdots, n-2n-1)$$

がある．

各振動子単体のリミットサイクルの半径は位相よりも重要ではないため，それを表すパラメータ μ_i は

$$\mu_i = 1 \ , \ \ (i = 1, \cdots, n) \tag{18}$$

としておく．リミットサイクル単体での固有角振動数は $\omega_i - b_i\mu_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ と表されるが，これを簡潔に ω_i とするため

$$b_i = 0 \ , \ \ (i = 1, \cdots, n) \tag{19}$$

とする．各脚固有の角速度 ω_i をすべて前進方向に対応させるため

$$\omega_i > 0 \ , \ \ (i = 1, \cdots, n) \tag{20}$$

であることを歩容生成モデルとしての要請とする．

本稿では (12) 式と (20) 式の要請のもと，(7) 式 ～ (11) 式の結合振動子の解軌道に存在する (13) 式 ～ (16) 式の位相差を時間の経過とともに $\delta\phi_{ij}^{*}$ に収束させることを考える．(18) 式と (19) 式より，(7) 式 ～ (11) 式の結合振動子の挙動は，

$$\omega_i \ , \ (i = 1, \cdots, n),$$
$$k_{ij} \ , \ (ij = 12, 23, 34 \cdots, n-1n)$$

のパラメータによって決まる．本研究ではこれらのパラメータの設定法を提案する．

4.　結合振動子の位相縮約

第 2.2 節および第 2.3 節で述べた位相縮約を (7) 式 ～ (11) 式に対して適用する．すなわち，(7) 式 ～ (11) 式を，(5) 式に対応する

$$\dot{\phi}_i(t) = \omega_i + \varepsilon \boldsymbol{Z}_i(\phi_i) \cdot \boldsymbol{G}_i(\phi, \phi'; k) \ , \ \ (i = 1, \cdots, n) \tag{21}$$

という形式に縮約する．

一般的な振動子に対して (6) 式の位相感受関数 $\boldsymbol{Z}(\phi)$ を解析的に求めることは困難であるが，(1) 式のスチュアート・ランダウ方程式で表される振動子に対しては位相および位相感受関数を解析的に求めることができる．まず，(7) 式 ～ (11) 式に存在する摂動を表す項を取り除いたスチュアート・ランダウ方程式に対して，$\mu = 1$, $b = 0$ のもと位相縮約を適用すると，各振動子の位相と位相感受関数はそれぞれ

$$\phi_i(t) = \angle z_i(t) \tag{22}$$
$$\boldsymbol{Z}(\phi_i) = \begin{pmatrix} -\sin\phi_i \\ \cos\phi_i \end{pmatrix} \ , \ \ (i = 1, \cdots, n) \tag{23}$$

と求められる[7]．ただし，$\angle z_i(t)$ は複素数 $z_i(t)$ を

$$z_i(t) = |z_i(t)| e^{i\angle z_i(t)} \tag{24}$$

と表すときの偏角である．

つぎに，(7) 式 ～ (11) 式における摂動を表す項

$$k_{ji}(z_j(t) - z_i(t)) \ , \ \ (i, j = 1, \cdots, n) \tag{25}$$

に対して (5) 式におけるベクトル値関数 $\boldsymbol{G}(\phi,\phi',k)$ に相当する表現を求める．(18) 式より無摂動系のリミットサイクルの半径が 1 であることと，位相 $\phi_i(t)$ が (22) 式のように偏角 $\angle z_i(t)$ で表されることから，$k_{12}(z_j(t)-z_i(t))$ における $z_i(t)$，$z_j(t)$ をそれぞれ $(\cos\phi_i,\ \sin\phi_i)^T$，$(\cos\phi_j,\ \sin\phi_j)^T$ に置き換えると，摂動を表す項は

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{G}_1(\phi_1,\phi_2;k_{12}) = k_{12}\begin{pmatrix}\cos\phi_2-\cos\phi_1\\ \sin\phi_2-\sin\phi_1\end{pmatrix}\\
&\boldsymbol{G}_2(\phi_2,\phi_1,\phi_3;k_{12},k_{23})\\
&\qquad = k_{12}\begin{pmatrix}\cos\phi_1-\cos\phi_2\\ \sin\phi_1-\sin\phi_2\end{pmatrix}\\
&\qquad +k_{23}\begin{pmatrix}\cos\phi_3-\cos\phi_2\\ \sin\phi_3-\sin\phi_2\end{pmatrix}\\
&\qquad\qquad \vdots\\
&\boldsymbol{G}_{n-1}(\phi_{n-1},\phi_{n-2},\phi_n;k_{n-2n-1},k_{n-1n})\\
&\qquad = k_{n-2n-1}\begin{pmatrix}\cos\phi_{n-2}-\cos\phi_{n-1}\\ \sin\phi_{n-2}-\sin\phi_{n-1}\end{pmatrix}\\
&\qquad +k_{n-1n}\begin{pmatrix}\cos\phi_n-\cos\phi_{n-1}\\ \sin\phi_n-\sin\phi_{n-1}\end{pmatrix}\\
&\boldsymbol{G}_n(\phi_n,\phi_{n-1};k_{n-1n})\\
&\qquad = k_{n-1n}\begin{pmatrix}\cos\phi_{n-1}-\cos\phi_n\\ \sin\phi_{n-1}-\sin\phi_n\end{pmatrix} \quad (26)
\end{aligned}
$$

と表される．

これら $\boldsymbol{G}_i$ と $\boldsymbol{Z}(\phi_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ を (21) 式に代入し，三角関数の加法定理を用いて計算すると，各振動子の位相の微分方程式が

$$
\begin{aligned}
&\dot{\phi}_1(t) = \omega_1 + k_{12}\sin(\phi_2(t)-\phi_1(t)) \quad (27)\\
&\dot{\phi}_2(t) = \omega_2 + k_{12}\sin(\phi_1(t)-\phi_2(t))\\
&\qquad +k_{23}\sin(\phi_3(t)-\phi_2(t)) \quad (28)\\
&\qquad\qquad \vdots\\
&\dot{\phi}_{n-1}(t) = \omega_{n-1}\\
&\qquad +k_{n-2n-1}\sin(\phi_{n-2}(t)-\phi_{n-1}(t))\\
&\qquad +k_{n-1n}\sin(\phi_n(t)-\phi_{n-1}(t)) \quad (29)\\
&\dot{\phi}_n(t) = \omega_n + k_{n-1n}\sin(\phi_{n-1}(t)-\phi_n(t)) \quad (30)
\end{aligned}
$$

として得られる．

5.　位相差の方程式

(13) 式 ～ (16) 式を時間 t で微分し，得られた右辺に (27) 式 ～ (30) 式を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\delta\dot{\phi}_{12}(t) = \delta\omega_{12} - 2k_{12}\sin\delta\phi_{12}(t)\\
&\qquad +k_{23}\sin\delta\phi_{23}(t) \quad (31)\\
&\delta\dot{\phi}_{23}(t) = \delta\omega_{23} - 2k_{23}\sin\delta\phi_{23}(t)\\
&\qquad +k_{12}\sin\delta\phi_{12}(t)\\
&\qquad +k_{34}\sin\delta\phi_{34}(t) \quad (32)\\
&\qquad\qquad \vdots\\
&\delta\dot{\phi}_{n-2n-1}(t) = \delta\omega_{n-2n-1}\\
&\qquad -2k_{n-2n-1}\sin\delta\phi_{n-2n-1}(t)\\
&\qquad +k_{n-3n-2}\sin\delta\phi_{n-3n-2}(t)\\
&\qquad +k_{n-1n}\sin\delta\phi_{n-1n}(t) \quad (33)\\
&\delta\dot{\phi}_{n-1n}(t) = \delta\omega_{n-1n} - 2k_{n-1n}\sin\delta\phi_{n-1n}(t)\\
&\qquad +k_{n-2n-1}\sin\delta\phi_{n-2n-1}(t) \quad (34)
\end{aligned}
$$

が得られる．ただし，

$$\delta\omega_{n-1n} = \omega_{n-1} - \omega_n \quad (35)$$

と定義した．(31) 式 ～ (34) 式を位相差の微分方程式と呼ぶ．(13) 式 ～ (16) 式と (22) 式より，$\delta\phi_{n-1n}(t)$ はそれぞれ $\angle z_{n-1}(t) - \angle z_n(t)$ を意味する．

6.　パラメータの設定方法

以上の準備のもと，本研究では n 足歩行に適した位相差 $\delta\phi^*_{ij}$ が与えられたときのパラメータ ω_{ij}，k_{ij} の設定法を提案する．この方法は文献 6) の 4 足に対する方法を n 足に拡張したものである．

歩行に適した位相差を $\delta\phi^*_{ij}$ とする．(7) 式 ～ (11) 式において $\mu_i=1$, $b_i=0$ $(i=1,\cdots n)$ とし，k_{ij} を

$$k_{ij}\cos\delta\phi^*_{ij} > 0 \quad (36)$$

を満たすものとして定める．それら k_{ij} と $\delta\phi^*_{ij}$ を用いて，

$$\delta\omega_{12} = 2k_{12}\sin\delta\phi^*_{12} - k_{23}\sin\delta\phi^*_{23} \quad (37)$$

$$\delta\omega_{23} = 2k_{23}\sin\delta\phi^*_{23} - k_{12}\sin\delta\phi^*_{12} - k_{34}\sin\delta\phi^*_{34} \quad (38)$$

$$\vdots$$

$$\delta\omega_{n-2n-1} = 2k_{n-2n-1}\sin\delta\phi^*_{n-2n-1} - k_{n-3n-2}\sin\delta\phi^*_{n-3n-2} - k_{n-1n}\sin\delta\phi^*_{n-1n} \quad (39)$$

$$\delta\omega_{n-1n} = 2k_{n-1n}\sin\delta\phi^*_{n-1n} - k_{n-2n-1}\sin\delta\phi^*_{n-2n-1} \quad (40)$$

を求める．これらとある ω_1 を用いて

$$\omega_2 = \omega_1 - \delta\omega_{12}$$

$$\omega_3 = \omega_2 - \delta\omega_{23}$$

$$\vdots$$

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \delta\omega_{n-1n} \quad (41)$$

を定める．ただし，ω_1 の値は (20) 式を満たすよう大きさを調整して決める．

このように定めたパラメータに対し，(31) 式 ∼ (34) 式の位相差 $\delta\phi_{n-1n}(t)$ が $\delta\phi^*_{n-1n}$ に収束するかをつぎの節のシミュレーションによって検証する．

7. シミュレーションによる検証

例として，ムカデを想定し各脚の位相差が

$$\delta\phi^*_{ij} = \pi\ ,\ (ij = 12, 34, 56, \cdots, 99\ 100) \quad (42)$$

$$\delta\phi^*_{ij} = \frac{\pi}{12}\ ,\ (ij = 23, 45, 67, \cdots, 98\ 99) \quad (43)$$

となる 100 足の歩行の生成を考える．

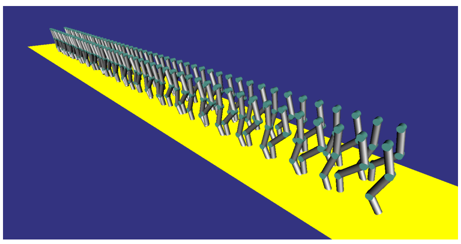

Fig. 3　100 足歩行

$$\cos\delta\phi^*_{12} = \cos\pi = -1 < 0$$

$$\cos\delta\phi^*_{23} = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{4}+\sqrt{6}}{4} > 0$$

$$\cos\delta\phi^*_{34} = \cos\pi = -1 < 0$$

$$\vdots$$

$$\cos\delta\phi^*_{n-1n} = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{4}+\sqrt{6}}{4} > 0$$

であることから，(36) 式を満たすには

$$k_{ij} < 0\ ,\ (ij = 12, 34, 56, \cdots, 99\ 100) \quad (44)$$

$$k_{ij} > 0\ ,\ (ij = 23, 45, 67, \cdots, 98\ 99) \quad (45)$$

であればよく，ここでは

$$k_{ij} = -0.5\ ,\ (ij = 12, 34, 56, \cdots, 99\ 100) \quad (46)$$

$$k_{ij} = 0.5\ ,\ (ij = 23, 45, 67, \cdots, 98\ 99) \quad (47)$$

とする．

これら k_{ij} と (42) 式 (43) 式の $\delta\phi^*_{ij}$ の値を (37) 式 ∼ (40) 式に代入して

$$\delta\omega_{ij} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8},\quad ij = 12, 34, 56, \cdots, 99\ 100 \quad (48)$$

$$\delta\omega_{ij} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\quad ij = 23, 45, 67, \cdots, 98\ 99 \quad (49)$$

を得る．

ここで例えば

$$\omega_1 = 3\pi \quad (50)$$

とすると，(41) 式より

$$\omega_2 = 3\pi + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$$

$$\omega_3 = 3\pi - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$$

$$\omega_4 = 3\pi + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$$

$$\omega_5 = 3\pi - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$$

$$\vdots$$

$$\omega_{100} = 3\pi \quad (51)$$

と定まり，(20) 式は満たされている．

こうして得られた k_{ij} $(ij = 12, \cdots, n-1n)$ と ω_i $(i = 1, \cdots, n)$ と $\mu_i = 1$, $b_i = 0$ を (7) 式 $\sim$ (11) 式に設定して $z_i(t)$ $(i = 1, \cdots, n)$ の数値解を求めた（図 4）．$\angle z_{n-1}(t) - \angle z_n(t)$ が (42) 式 (43) 式の位相差に収束していることを確認できる（Fig.4）．

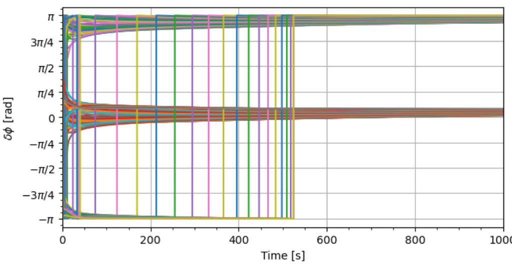

Fig. 4　位相差制御のシミュレーション

8.　まとめ

多数の脚による歩容生成を考え，文献 6) の 4 脚の方法を n（4 以上の偶数）本の脚に拡張する方法を提案した．数値シミュレーションにおいてはムカデを想定し，$n = 100$ として (42) 式, (43) 式の位相差で有効性を示した．これとは異なる n，および他の位相差でのシミュレーションでも有効性を確認できる．

本稿で提案した方法の理論的な安定性解析による妥当性の証明は今後の課題である．また，実際の空間で正しく歩行することができるのかの確認も今後の課題となる．

参考文献

1) 木村浩：ロコモーション・パターン創発研究の現状と今後の展望；日本ロボット学会誌, vo1.41, No.3, pp.217-222 (2023)

2) 大脇大：動物の歩容遷移を再現する 4 脚ロボット；日本ロボット学会誌，vol.37, no.2, pp.126-131 (2019)

3) 湯浅，伊藤（義），伊藤（正）：分岐現象を用いた多様なパターンを生成する自律分散システム；計測自動制御学会論文集，vol.27, no.11, pp.1307-1314 (1991)

4) 湯浅，伊藤：自律分散システムの構造理論；計測自動制御学会論文集，vol.25, no.12, pp.1355-1362 (1989)

5) 湯浅，伊藤：自律分散システムとその歩行パターン発生器への応用；計測自動制御学会論文集，vol.25, no.2, pp.180-187 (1989)

6) 奥平，村松：スチュアート・ランダウ方程式を用いた結合振動子による歩容生成；第 68 回システム制御情報学会研究発表講演会資料，pp.536-543 (2024)，システム制御情報学会論文誌掲載予定 (2025)

7) 郡，森田：生物リズムと力学系；共立出版 (2011)

8) 蔵本，河村：同期現象の数理；培風館 (2010)

9) 中尾裕也：結合位相振動子系の安定性と同期現象；計測と制御，Vol.55, No.4 (2016)