計測自動制御学会東北支部 60 周年記念学術講演会 (2024.12.17)
資料番号 S60-6

ハミルトン入出力システムに対するオブザーバの設計

Observer design for Hamilton input-output systems

〇片野裕貴*，村松鋭一*
〇Hiroki Katano*, Eiichi Muramatsu*

*山形大学
*Yamagata University

キーワード: ハミルトン系(Hamilton system) 非線形制御(nonlinear control) 非線形オブザーバ(nonlinear observer) 多様体(manifold) シンプレクティック幾何学(symplectic geometry) 微分形式(differential form)

連絡先: 〒992-8510 山形県米沢市城南町 4-3-16
山形大学大学院理工学研究科機械システム工学専攻 村松鋭一
Tel.: (0238)26-3327　Fax.: (0238)26-3327　E-mail: muramatsu @ yz.yamagata-u.ac.jp

1. 緒言

非線形制御は今後の制御工学の発展に対して必要不可欠な問題である．一方で，その状態変数はすべてが観測できるとは限らない. その中で様々な手法でオブザーバの研究が行われている．

現在「非線形オブザーバ」と呼ばれるものの大半は局所的にシステムを線形化するか出力方程式(観測方程式)が線形であると仮定するものが多い．

しかし, 大域的な変化に対して局所線形化したオブザーバでは全制御領域の観測を行う際に性能の劣化が生じる．

今回の研究では, ハミルトン入出力系と呼ばれるエネルギーが保存されるような非線形システムに対して, 線形化を必要としないオブザーバの設計を目指す．

2. ハミルトン入出力システム

2.1. シンプレクティック多様体

ハミルトン系の状態空間はシンプレクティック多様体となる．シンプレクティック多様体の定義は以下のようになる[1)]，

M を C^∞ 級多様体，M 上の C^∞ 級 k 次微分形式全体の集合を$D^k(M)$ とする．M 上の非退化で閉じた 2 次微分形式を $\omega \in D^2(M)$ とする．ωが閉形式で，さらに，M 上で非退化，すなわち，任意の $p \in M$ に対して，ω_p が非退化なとき，ω を M 上のシンプレクティック形式，組 (M, ω) をシンプレクティック多様体という．

ここで、具体的な局所座標系 (p, q) を導入する．このとき, 微分形式ωは以下のようになる．

$$\omega = dp \wedge dq \tag{1}$$

ハミルトン系であるとき，すなわち保存量 H が存在するとき，ハミルトンの運動方程式が成り立ち，

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \tag{2}$$

となる．また，M 上で運動方程式の解となるような曲線が存在し，対応する接ベクトルは以下のように表される．

$$X = \frac{d}{dt} = \dot{q}\frac{\partial}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial}{\partial p} \tag{3}$$

式 3 は 式 2 により，以下のように書き直せる．

$$X = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} \tag{4}$$

式4のようなベクトル場をなすとき, X をハミルトンベクトル場という.

つまり, シンプレクティック多様体 (M,ω) 上の滑らかな関数 H に対して, M 上のベクトル場 X は,

$$-dH = \omega X \tag{5}$$

によって一意に定まる.

2.2. ハミルトン入出力システム

幾何学的な構造をもつ制御系としてハミルトン入出力システム(Hamilton input-output System)と呼ばれるシステムが存在する.

ハミルトン入出力システムとは解析力学のハミルトン系に入力が加わったシステムとして表される. このシステムは入力が時間依存しないという条件を満たすとき保存系となることが知られている.

今回, 以下のような$\mathbb{R}^{2k}$上のm入力r出力のアフィン非線形制御系を考える.

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u^i \tag{6}$$
$$y^k = h_k(x) \qquad (k = 1, ..., r)$$

このシステムがハミルトン入出力系であるというのは以下の 式 7, 式 8 をみたすときである [2).]

m 入力 m 出力のシステムが存在して,

$$dH_0 = \omega(f),\ dH_i = \omega(g_i) \ \ (\mathrm{i = 1, 2, \ldots , m}) \tag{7}$$

$$h_k = H_k(x) \ \ (\mathrm{k = 1, 2, \ldots , m}) \tag{8}$$

このとき, 式 7 を用いて, 関数 $H(x,u)$ を以下のように定義する.

$$H(x,u) = H_0 + \sum_{i=1}^{m} H_i u^i \tag{9}$$

この関数を制御ハミルトン関数という.

3. オブザーバの設計

3.1. 力学系とハミルトン系

力学系とは以下のように表されるシステムである.

$$\dot{x}(t) = f(x,t) \tag{10}$$

力学系はベクトル場が時間に依存するため, システムの挙動が一様ではなくオブザーバの設計が難しい.

一方, 制御ハミルトン関数をもつハミルトン入出力システムはベクトル場が時間に依存しないため, システムが多様体の構造を持つ場合を仮定することができる.

これにより, 多様体の諸性質を応用したオブザーバの設計を考えることが出来る.

3.2. オブザーバの多様体

ここで, 微分形式 ω とベクトル場 X が未知, 制御ハミルトン関数が既知であると仮定する. 組 (H,ω,X) は 2 つが決まれば, 残り一つが決まる.

このとき, オブザーバの多様体をN, N上の 2 次微分形式を$\hat{\omega}$, システムの制御ハミルトン関数 H の総量を複製したものを観測ハミルトン関数と定義する. また, それに対応するベクトル場を$\hat{X}$とする.

制御ハミルトン関数は入力が一定であるから総量の時間変化はない. それとは対照的にオブザーバは任意の状態からシステムの状態を推定しなければならないため, オブザーバの状態変数は時間に依存してしまい, 観測ハミルトン関数の総量は時間とともに変動してしまうことになる.

これを解決するため, 観測ハミルトン関数が張るシンプレクティック多様体に依存しない多様体を考える. この多様体を L とし, この多様体に時間変化に関する特性を与えたい. これにより, オブザーバの多様体は結局 $P = N \times L$ と表される.

また, P から N への射影を開被覆 $U \in N$ を用いて,

$$\pi : U \times L \to U \tag{11}$$

とする.

N の開被覆として互いに交わった 2 つの開弧U_1, U_2を取ったとき, 局所座標系 (φ_1, U_1) から (φ_2, U_2) への座標変換を考える. このとき, 合成写像 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ は連続で可逆な写像である.

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (U_1 \cap U_2) \times L \to (U_1 \cap U_2) \times L \tag{12}$$

ここで, $p \in U_1 \cap U_2$ および $l \in L$ として, p を固定して l だけ変化させると固定された p に対し, $\varphi_2 \circ \varphi_1$ は単に l から l への写像と見なすことが出来る. この写像を $g_{12}(x)$ とする. この写像 g_{12} は L の同相写像となっている. この写像 g について以下が成り立つ.

- $g \circ g \in L$
- $(g \circ g) \circ g = g \circ (g \circ g)$
- $g_{21} = g_{12}^{-1}$
- $g_{11} = g_{22} = e$

以上より，座標筋傍系に対するこの同相写像全体は群をなす.

3.3. 誤差とオブザーバへのフィードバック

$x \in M$，$\hat{x} \in P$とすると，誤差は出力の差

$$e(\hat{x}, x) = \hat{x} - x \tag{13}$$

によって決まる関数 となる.

また，オブザーバの出力関数は 式 6 より，$y_k = h_k(\hat{x})$ となる．実際の出力とオブザーバの出力の差をとった関数を K とすると，フィードバックされる関数は

$$K(\hat{x}, x) = h_k(\hat{x}) - h_k(x) \tag{14}$$

と表される.

3.4. オブザーバの設計

節 3.2 より，N は多様体，L は多様体かつ群であることが分かった．これにより，P でも接ベクトルを考えることができる.

このとき，$u \in P$ における接空間 $T_u(P)$ は以下の条件 1-2 を満たすことで水平部分空間 $H_u(P)$ と垂直部分空間 $V_u(P)$ に分離できる[3].

$V_u(P)$ は多様体 N の構造だけで決まるが，$H_u(P)$ には条件をみたす限り任意性がある.

(条件 1)

$$T_u(P) = V_u(P) \bigoplus H_u(P) \tag{15}$$

(条件 2)

$P \ni u \mapsto u' = ug \ \ (g \in L)$ のとき，

$$H_{u'} = H_{ug} = R_g H_u \tag{16}$$

多様体 N の次元を n，群 L の次元を d とすると，接空間$T_u(P)$の次元は条件 1 より$n+d$となる．条件 1 より，$V_u(p)$ は d 次元，$V_u(p)$ は n 次元となる.

$H_u(P)$ の基底を，

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} + C_{\mu ij}\frac{\partial}{\partial g_{ij}} \tag{17}$$

とすると，$C_{\mu ij}$ が決まれば $H_u(P)$ が決まる.

ここで P 上の 1 次微分形式 ω は，垂直部分空間 V_u への射影を与えることから，以下の条件を得る.

(条件 3)

任意の $X \in T_u(P)$ に対して．$X \in H_u(P)$ という条件は

$$\omega X = 0 \tag{18}$$

となる.

したがって，条件 1-3 をみたすならば，$C_{\mu ij}$ を自由に決めることができる． この $C_{\mu ij}$ に対して時間依存の関数やフィードバック関数 $K(\hat{x}, x)$ を適応することで，オブザーバのシンプレクティック構造を保ち，線形化を行わずに大域的なオブザーバを構成できると予想する.

4. 結言

本文ではハミルトン入出力系について，多様体を用いた非線形オブザーバの構成の可能性を提示した.

今後はオブザーバの多様体の接ベクトルへ時間依存の関数やフィードバック関数を適応し，具体的なオブザーバの構成と挙動について議論していく.

参考文献

1) 藤岡敦: 具体例から学ぶ多様体, 201/208, 裳華房(2017)

2) 横山政裕, 島公脩: ハミルトン制御系の不変性と無散逸化制御, 計測自動制御学会論文集 Vol.30, No.12, 1458/1465 (1994)

3) 和達三樹: 微分・位相幾何，165/178, 岩波書店(1996)